

EL POTENCIAL DEL CAMPO GRAVIFICO TERRESTRE. SIGNIFICADO Y MEDIDA DE SUS FUNCIONES DERIVADAS

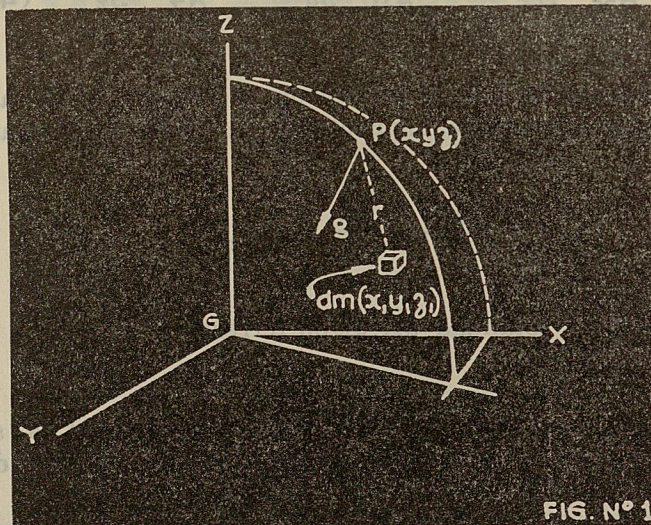
POR EL ING. ALFONSO DE LA O. CARREÑO

PROFESOR DE "METODOS GEOFISICOS DE EXPLORACION"
EN LA E. N. DE INGENIEROS DE LA UNIVERSIDAD NA-
CIONAL AUTONOMA.—JEFE DE LA OFICINA DE GEOLOGIA
DE LA COMISION NACIONAL DE IRRIGACION.

El presente estudio forma parte de un volumen titulado "La Gravimetría en México.—Estudios y Resultados de las Determinaciones Gravimétricas Hechas en la República", enviado a la Segunda Reunión Panamericana de Consulta sobre Geografía y Cartografía, que tuvo lugar en el mes de agosto de este año en Río de Janeiro, Brasil, como parte de la contribución científica de nuestro país a dicha reunión.

EL POTENCIAL DEL CAMPO GRAVIFICO TERRESTRE

La extensión tan grande del tema que voy a exponer me impide entrar en detalles en sus diferentes aspectos; por lo tanto, esta exposición solamente será una síntesis de tan interesante capítulo de la Geofísica.



Supongamos un sistema cartesiano de coordenadas, cuyo origen coincide con el centro de gravedad del globo terrestre y de tal modo que el eje de las (Z) corresponda al eje

polar. Si en un punto P en la superficie del globo, de coordenadas (x, y, z) consideramos la unidad de masa, ésta será solicitada por la pesantez, cuyas componentes, en el punto considerado, las podremos representar como sigue:

$$\begin{aligned} g_x &= X + \omega^2 x + X_1 \\ g_y &= Y + \omega^2 y + Y_1 \\ g_z &= Z + Z_1 \end{aligned} \quad (1)$$

En las cuales, X, Y, Z , son las componentes de la atracción de la tierra; $\omega^2 x, \omega^2 y$ las de la fuerza centrífuga, siendo ω , la velocidad angular del movimiento de rotación terrestre, que consideramos constante; X_1, Y_1, Z_1 , las componentes de la atracción de los cuerpos celestes que es muy pequeña.

El trabajo de la pesantez al pasar la unidad de masa, de un punto P a otro P_1 , infinitamente cercano a P , y de coordenadas $(x + dx), (y + dy), (z + dz)$, tendrá por expresión:

$$dU = g_x dx + g_y dy + g_z dz \quad (2)$$

U es el potencial gravífico o de pesantez, y es una función cuya variación sólo depende de la distancia al centro de gravedad considerado, lo que podemos expresar analíticamente como sigue:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (3)$$

De donde se deduce, teniendo en cuenta la expresión (2), que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = g_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = g_y \quad \frac{\partial U}{\partial z} = g_z \quad (4)$$

Es decir, en valor absoluto, U es la función de fuerzas en el campo gravífico terrestre y tiene por expresión general la siguiente, según puede demostrarse:

$$U = K \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (5)$$

La integral abarca la totalidad del globo terrestre.

En esta ecuación:

K , es la constante de la gravitación universal, cuyo valor es, según las últimas determinaciones hechas por Heyl, de $(6.664 \pm 0.002) \times 10^{-8}$ C. G. S., dm , es una masa elemental del globo, r su distancia al punto que se considere.

Por lo tanto, las primeras derivadas parciales de la función (4), respecto a las tres variables (x, y, z) serán las respectivas componentes de la pesantez, según los tres ejes de coordenadas.

Si despreciamos las componentes X_1, Y_1, Z_1 , en las ecuaciones (1), por ser muy pequeñas, podremos valuar g_x, g_y, g_z , como sigue, partiendo de la ecuación clásica de Newton* que nos da el valor de la atracción entre dos masas m y m_1 a una distancia (r) entre sí, siendo K , la constante de la gravitación universal:

$$f = K \frac{m m_1}{r^2} \quad (6)$$

para lo cual consideraremos el globo terrestre dividido en elementos, de lados dx, dy, dz , de masa dm , cuyas coordenadas podemos representar por x_1, y_1, z_1 ; acordándonos que las de la unidad de masa son x, y, z , la atracción elemental que cada masa dm , ejerce sobre la unidad de masa será:

$$dF = K \frac{dm}{r^2} = K \sigma \frac{dx dy dz}{r^2} \quad (7)$$

siendo σ , la densidad del elemento. Para encontrar la atracción de todo el globo, necesitaremos integrar la anterior expresión, siendo necesario conocer la ley de variación de la densidad con la profundidad, lo cual podemos eliminar tomando un valor medio para ella, con lo cual la atracción total será:

$$F = K \sigma \iiint \frac{dx dy dz}{r^2} \quad (7A)$$

y el de las tres componentes:

$$\left. \begin{aligned} X &= K \sigma \iiint \frac{x_1 - x}{r^3} dx dy dz \\ Y &= K \sigma \iiint \frac{y_1 - y}{r^3} dx dy dz \\ Z &= K \sigma \iiint \frac{z_1 - z}{r^3} dx dy dz \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

Substituyendo estos valores en las ecuaciones (1), tendremos, finalmente, las tres componentes de la pesantez:

* En los cálculos comunes de gravimetría no es necesario acudir a la ley Relativista.

$$g_x = K\sigma \iiint \frac{x_1 - x}{r^3} dx dy dz + \omega^2 x$$

$$g_y = K\sigma \iiint \frac{y_1 - y}{r^3} dx dy dz + \omega^2 y \quad (9)$$

$$g_z = K\sigma \iiint \frac{z_1 - z}{r^3} dx dy dz$$

Por otra parte, la ecuación (5) podemos escribirla como sigue, puesto que también en ella cada masa elemental vale $dm = \sigma dx dy dz$ y considerando el mismo valor medio para la densidad σ :

$$U = K\sigma \iiint \frac{dx dy dz}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (10)$$

Es fácil ver que las primeras derivadas de esta función, respecto a x , y , z , son precisamente los valores del grupo (9), o componentes de la pesantez, lo que es, simplemente, una verificación de las ecuaciones (4).

El potencial es una magnitud escalar, mientras que sus primeras derivadas son vectores. La función U representa una serie de superficies curvas; todos los puntos de una misma superficie tienen el mismo potencial, llamándose, por este motivo, a la superficie, equipotencial.

Si ahora, partiendo de las ecuaciones (4), calculamos las derivadas de cada una de ellas respecto a la variable correspondiente, obtendremos un nuevo grupo de segundas derivadas de la función U , cuyos valores son los siguientes, teniendo en cuenta las expresiones (9):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial g_x}{\partial x} = K\sigma \iiint \left[\frac{3(x_1 - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] dx dy dz + \omega^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial g_y}{\partial y} = K\sigma \iiint \left[\frac{3(y_1 - y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] dx dy dz + \omega^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = K\sigma \iiint \left[\frac{3(z_1 - z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] dx dy dz$$

$$(11)$$

Si sumamos ordenadamente estas ecuaciones, obtenemos la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2\omega^2 = 0 \quad (12)$$

Que en el supuesto de que $\omega = 0$, se reduciría simplemente a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

Que es la ecuación de continuidad, tan conocida en numerosos problemas de la física.

Del mismo modo, partiendo de las ecuaciones (4) y (9), podemos calcular otro grupo de derivadas segundas, como sigue:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = K\sigma \iiint \frac{(x_i - x)(y_i - y)}{r^5} dx dy dz \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g_y}{\partial x} = K\sigma \iiint \frac{(y_i - y)(x_i - x)}{r^5} dx dy dz \quad (15)$$

Es decir:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial g_z}{\partial x} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial g_z}{\partial y}$$

En operaciones de gravimetría no es necesario acudir a funciones derivadas de orden superior, cuando menos por ahora.

SIGNIFICADO DE LAS FUNCIONES DERIVADAS. UNIDADES

Podemos hacer un resumen de las funciones derivadas de U , usando las diferentes notaciones que se utilizan como sigue, haciendo la aclaración que en la Exploración Gravimétrica, se toma como origen de coordenadas la estación de observación, siendo el plano de las XY el del horizonte que pase por la misma estación, considerándose como eje de las X la línea N. S. astronómica; la línea E. W. como eje de las Y , considerando como primer cuadrante el N. E. Como eje de las Z se toma la normal al esferoide en la estación, tomando como positivos las (z) abajo del horizonte. La forma de las ecuaciones de U y sus derivados será diferente pero simbólicamente las podemos representar igual que las anteriores.

Así pues, tendremos:

U , potencial gravífico

Unidades c. g. s.: $\frac{\text{ergs}}{\text{grmo}} = \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}$

Primeras derivadas de U , componentes de la pesantez g :

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = g_x$$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = g_y \quad (17)$$

$$U_z = \frac{\partial U}{\partial z} = g_z$$

Valor de la pesantez:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} \quad (18)$$

Para este grupo las unidades son $\frac{\text{dinas}}{\text{gramo}} = \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$ llamándose convencionalmente:

$$1 \text{ Gal} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \quad (\text{En honor de Galileo, el ilustre físico de Pisa.})$$

$$1 \text{ miligal} = 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

$$1 \text{ microgal} = 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

Segundas derivadas de U .

Primer grupo:

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial g_x}{\partial x}$$

$$U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial g_y}{\partial y} \quad (19)$$

$$U_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

Segundo grupo:

$$U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g_y}{\partial x} = U_{yx}$$

$$U_{xz} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial g_z}{\partial x} = U_{zx} \quad (20)$$

$$U_{yz} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial g_z}{\partial y} = U_{zy}$$

Para estos grupos la unidad es dinas por gramo, por centímetro o sea $\frac{1}{\text{seg}^2}$. En honor del Barón von Eötvös, ilustre físico y matemático húngaro que desarrolló la teoría de la balanza de torsión y sus aplicaciones, se llama 1 Eötvös a la magnitud $10^{-9} \left(\frac{1}{\text{seg}^2}\right)$, es decir:

$$1 \text{ E} = 1 \text{ Eötvös} = 10^{-9} \left(\frac{1}{\text{seg}^2}\right) = 10^{-9} \frac{\text{Gales}}{\text{cm}} \text{ (cm, horizontal).}$$

De las segundas derivadas las que aparecen en las operaciones de gravimetría son:

$$U_{xz} = U_{zx}.$$

$$U_{yz} = U_{zy}.$$

$$U_{xy} = U_{yx} \text{ y la diferencia}$$

$$U_{yy} - U_{xx} \text{ que se representa por } U_{\Delta}$$

Cuyos valores se miden con las balanzas de torsión.

Veamos el significado físico de las segundas derivadas.

Las segundas derivadas U_{xx} , U_{yy} , U_{zz} , son las rapidezces de variación de las tres componentes de la pesantez en el sentido de los ejes respectivos.

La diferencia $U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx}$, está relacionada, como lo veremos al referirnos a las balanzas de torsión, con la curvatura de las superficies.

U_{xy} es la rapidez de variación de la componente g_x de la pesantez hacia el eje de las Y. Esta magnitud está también relacionada con la curvatura de las superficies.

U_{xz} y U_{yz} , son los gradientes de las componentes g_x y g_y en la vertical, en las direcciones de las X y de las Y. Estas magnitudes se miden también con las balanzas de torsión.

VARIACION DE LA GRAVEDAD CON LA LATITUD

Partiendo de consideraciones teóricas para determinar la figura de la Tierra, Clairaut (1713-1765), estableció el siguiente teorema que da el valor del aplastamiento o elipticidad de la misma:

$$f = \frac{5}{2} R - \alpha = \frac{a-b}{a} \quad (21)$$

en la que:

$$R = \frac{\omega^2 a}{g_0} \quad (22)$$

relación entre la fuerza centrífuga y la gravedad, ambas en el ecuador.

$$\alpha = \frac{g_p - g_0}{g_p} \quad (23)$$

Incremento de la gravedad del ecuador al polo, entre la gravedad en este punto.

a, semieje ecuatorial; b, semieje polar. Estas cantidades están ligadas con la siguiente expresión, que da la variación de la gravedad en función de la latitud al nivel del esferoide, sin escribir los términos de segundo orden:

$$g_{\varphi} = g_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} R - f \right) \text{sen}^2 \varphi \right] \quad (24)$$

La discusión y ajuste de las observaciones de la pesantez en diferentes regiones del globo, han permitido establecer las siguientes ecuaciones, basadas en la anterior, cuyas constantes han ido modificándose a medida que se dispone de más datos de observación:

Primera ecuación de Helmert (1901):

$$g = 973.030 (1 + 0.005302 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.000007 \operatorname{sen}^2 2\varphi) \quad (25)$$

Elementos del elipsoide:

$$a = 6\,378\,200 \text{ m}, \quad b = 6\,356\,818 \text{ m}.$$

$$f = \frac{a-b}{a}, \quad \frac{1}{f} = 298.2.$$

Segunda ecuación de Helmert (1915):

Esta ecuación tiene un término de corrección por longitud, pues el autor consideró un elipsoide de tres ejes, dos de ellos en el ecuador, el extremo del más corto a una longitud de 73° E. de Greenwich, y el más largo (230 m. más que el anterior), a 17° W. de Greenwich:

$$g = 978.052 [1 + 0.005285 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.000007 \operatorname{sen}^2 2\varphi + 0.000018 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 17^\circ)] \quad (26)$$

λ , es la longitud. En este caso $\frac{1}{f} = 296.7 \pm 0.4$.

Ecuación de Berroth:

Berroth con una selección de valores de g más estricta estableció:

$$g = 978.046 [1 + 0.005296 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.000007 \operatorname{sen}^2 2\varphi + 0.0000116 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 10^\circ)] \quad (27)$$

Valor medio de f : 297.8. Eje ecuatorial mayor (a) a 10° W. G., 150 ± 58 m más grande.

Ecuación de Bowie (U. S. Coast and Geodetic Survey), 1917:

$$g = 978.039 (1 + 0.005294 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.000007 \operatorname{sen}^2 2\varphi) \quad (28)$$

$$\frac{1}{f} = 297.4.$$

Ecuación internacional aceptada en 1930, por la Unión Geodésica Internacional en Estocolmo:

$$g = 978.049 (1 + 0.0052884 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.0000059 \operatorname{sen}^2 2\varphi) \quad (29)$$

En este caso: $a = 6\,378\,388 \text{ m}$, $b = 6\,356\,909 \text{ m}$.

$$\frac{1}{f} = 297.0.$$

Esta es la ecuación usada en operaciones mundiales de gravimetría.

CALCULO DE LAS ANOMALIAS DE LA GRAVEDAD

Las anomalías de la gravedad se calculan con dos criterios diferentes, como luego se explica, ya sea que se trate de investigaciones de la Geodesia o de la Exploración Gravimétrica.

Primer caso.

Si en una estación de latitud (ϕ) y de altitud (H), la gravedad observada es g_{obs} y la gravedad teórica es g_t , la anomalía es la diferencia:

$$\Delta g = g_{obs} - g_t. \tag{30}$$

La gravedad teórica g_t la calcularemos agregando al valor teórico al nivel del esferoide una serie de correcciones cuyo significado en seguida explicaremos, esto es:

$$g_t = g_o (1 + A \text{sen}^2 \phi - B \text{sen}^2 2\phi) + C_H + C_T + C_I + C_e \tag{31}$$

C_H , es la corrección por altura libre o de Faye, que tiene en cuenta la disminución de la gravedad debida a la altitud (H) de la estación. Esta corrección será negativa, salvo para las depresiones o lugares con cota negativa, como el Mar del Salton, en California, y el Mar Muerto, en Asia Menor.

Esta corrección, con suficiente precisión se calcula con la siguiente expresión:

$$C_H = \pm 0.3086 H \text{ (Miligales, H en metros)} \tag{32}$$

C_T , es la corrección por topografía, que tiene en cuenta el efecto de todas las masas que circundan la estación, correspondientes a las irregularidades del relieve terrestre, tanto de las cuencas oceánicas y mares, como de los relieves continentales y grandes islas. Esta corrección puede ser positiva o negativa, y para poder calcularla es indispensable disponer de buenos mapas locales y regionales configurados, así como un buen globo terrestre, también debidamente configurado.

De manera semejante a como se explica al aplicar esta corrección, según el criterio en la Exploración Gravimétrica, se considera en este caso la superficie terrestre dividida en una serie de zonas y éstas en trapecios, calculándose su efecto parcialmente y sumando el total de ellos. En este caso se consideran dos regiones fundamentales, desde el punto de vista de su lejanía a la estación. La primera hasta un radio de 200 km. y de ahí en adelante se extenderá la región de masas lejanas hasta el nadir de la estación.

De acuerdo con la nueva división propuesta por el señor ingeniero Ricardo Toscano, las zonas de la región de masas cercanas son:

Zonas	Radios extremos	
A	0.0	0.5 Km.
B	0.5	1 „
C	1	2 „
D	2	4 „
E	4	20 „
F	20	100 „
G	100	200 „

Hasta aquí pueden considerarse los anillos cilíndricos y puede partirse de las ecuaciones números 41 y 42, que dan el efecto de un cilindro sólido y de un anillo sobre una masa colocada en el centro de su base superior para el cálculo correspondiente. Es bueno aclarar que

para observaciones al nivel del mar (Geoide), si en vez de agua se trata de rocas, el efecto sería nulo (caso de densidad uniforme) pero como la densidad del agua apenas es de 1.027 como término medio, hay una deficiencia en densidad igual a $2.67 - 1.027 = 1.643$.

Valor que se tomará para σ , en las ecuaciones 41 y 42, la atracción será negativa y la altura del cilindro o corona H , será la profundidad del océano en la zona considerada.

A partir de los 200 km., a causa de la forma de la Tierra, no es posible considerar los anillos, como se ha explicado, sino como zonas esféricas (es suficiente, en este caso, considerar la tierra esférica). La ecuación que en este caso se aplica es la siguiente:

$$C_T = \frac{2\pi K \sigma R^2 H}{n} (\cos C_2 - \cos C_1) (E_1 + E_2 + \dots + E_n) \quad (33)$$

Siendo en general:

$$E = \frac{\text{sen} \left(\frac{1}{2} C - \text{ang. sen} \frac{H \cos \frac{1}{2} C}{D} \right)}{D^2 + H^2 + 2HD \text{sen} \frac{1}{2} C} \quad (34)$$

En estas:

- K , constante de la gravitación.
- σ , densidad.
- R , radio medio terrestre.
- H , altitud media de cada zona, comprendida entre dos ángulos geocéntricos C_1 y C_2 , suficientemente cercanos para que la diferencia angular ($C_2 - C_1$) sea pequeña.

D , es la distancia en línea recta entre la estación al punto de la superficie que corresponde al ángulo C . Si se miden los ángulos a partir de la estación tomando ésta como polo, serán iguales a la mitad del ángulo central o sean los valores $\frac{1}{2} C$.

Para la región de masas lejanas el señor ingeniero Toscano ha hecho la división de zonas como sigue:

Zonas	Ángulos $\frac{1}{2} C$ extremos
1	1° 48' (200 Km.) 3°
2	3 6°
3	6 10°
4	10 20°
5	20 50°
6	50 90°
7	90 180°

De acuerdo con estas bases el señor ingeniero Toscano calculó sus tablas para la corrección topográfica y de la isostasia, muy cómodas y que facilitan grandemente los cálculos.

C_T , es la corrección por Isostasia o de Bowie que tiene en cuenta los defectos de masa en los relieves y el exceso en los océanos, aprovechando los mismos datos de configuración que la topográfica, para lo cual pueden combinarse ambas correcciones, o tratarse separadamente.

Para el cálculo de esta corrección se hace uso de las mismas fórmulas que se emplean en la corrección topográfica, pero entrando en ellas con un valor σ^1 , de la densidad, que cada vez se calcula por la ecuación:

$$g' = \frac{0.615 \sigma^1 H^1}{H - H^1} \quad (35)$$

σ^1 , densidad normal, es decir, la de una columna de la corteza que desde la superficie de compensación isostática termine al nivel del mar. H profundidad de compensación, que en nuestro país se toma igual a -114 km., H^1 profundidad media del océano en la zona considerada. Esta corrección es de signo contrario a la topográfica, siendo positiva la que corresponde a los océanos y negativa a la de los continentes.

C_σ , es la corrección que tiene en cuenta las densidades anormales locales por la presencia de materiales de diversa naturaleza y es difícil de calcular.

Segundo caso.

En la Exploración Geofísica el problema fundamental es precisamente el localizar y determinar las acumulaciones de materiales de diversa naturaleza locales y la aplicación de correcciones se hace, como se dijo anteriormente, con otro criterio.

Se parte del valor de la gravedad en una cierta estación, que sirve de base o referencia; se observan las otras estaciones que interese conocer y los valores observados se reducen a la estación fundamental aplicando las respectivas correcciones.

Los valores finales son debidos a las masas perturbadoras locales, cuyas dimensiones, profundidad y distribución determinarán la forma en la que se desarrolle la anomalía.

Conviene hacer notar que si las observaciones se hacen con péndulos, se obtendrán, ya sea valores **totales** de la gravedad en cada estación, o diferencias; en cambio, si se hacen con gravímetros, los valores serán diferencias.

Supongamos que el valor de la gravedad, ya sea obtenido por medio de un péndulo o gravímetro, en la estación base lo llamamos g_1 , y la gravedad en otra estación cualquiera g_2 , para obtener los valores finales que nos interesan, aplicaremos las siguientes correcciones, como luego se explica:

$$g_1 + C_T \quad (36)$$

$$g_2 + C_\varphi + C_H + C_B + C_{T_2} \quad (37)$$

C_φ , es la corrección por diferencia de latitud entre ambas estaciones, positiva si la estación (2) está al sur de la fundamental, y negativa en caso contrario, porque el valor de g aumenta con la latitud.

Con suficiente aproximación esta corrección se calcula por la siguiente expresión:

$$C = 0.0008122 \text{ sen } 2\varphi \cdot \Delta x \text{ (Miligales, } \Delta x \text{ en m)} \quad (38)$$

Para la latitud (ϕ) se toma un valor regional, o bien un valor medio entre los puntos considerados.

C_H , es la corrección por altura libre, empleándose la misma expresión (Núm. 32), pero, en este caso, H es el desnivel entre ambas estaciones. Si la estación (2) es más alta, $g_2 < g_1$, y la corrección será positiva, y negativa en caso contrario.

C_B , es la corrección de Bouguer, que tiene en cuenta el efecto de la masa de la capa rocosa de espesor H uniforme y de extensión indefinida. Si la estación es más alta, dicha capa rocosa aumenta el valor de g_2 ($g_2 > g_1$) y la corrección será negativa, en caso contrario será positiva.

Las dos expresiones equivalentes con las que puede calcularse esta corrección son:

$$C_B = 2\pi K \sigma H = \frac{3}{2} \frac{\sigma H}{\delta R} g \quad (39)$$

o simplemente:

$$C_B = 0.0419 \sigma H \text{ (Miligales, } H \text{ en m)} \quad (40)$$

K , es la constante de la gravitación universal.

σ , la densidad de la masa rocosa considerada.

δ , la densidad media de la tierra.

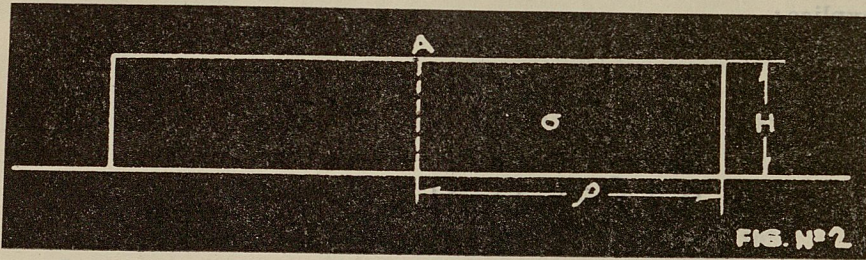
g , la gravedad en el punto considerado.

R , el radio medio de la tierra.

H , el desnivel entre ambas estaciones.

C_T es la corrección topográfica, pero en este caso no tiene en cuenta el efecto total de las masas por las irregularidades de todo el globo, sino que tiene el carácter de una corrección local y en realidad viene siendo un complemento de la corrección de Bouguer, que considera el efecto de la plancha de rocas entre ambas estaciones, de espesor uniforme.

La ecuación fundamental de que se parte es la que da el efecto de una masa cilíndrica, sobre un punto colocado en el centro de su superficie y que tiene por valor:



$$\Delta g = 2\pi K \sigma (H - \sqrt{H^2 + \rho^2} + \rho) \quad (41)$$

De la que se deduce la que da el efecto de un cilindro hueco o anillo de radios interior y exterior ρ_1 y ρ_2 .

$$\Delta g = 2\pi K \sigma (\rho_1 - \rho_2 + \sqrt{H^2 + \rho_1^2} - \sqrt{H^2 + \rho_2^2}) \quad (42)$$

o su equivalente:

$$\Delta g = 0.04196 \left(\rho_2 - \rho_1 + \sqrt{H^2 + \rho_1^2} - \sqrt{H^2 + \rho_2^2} \right) \quad (43)$$

En miligales, si las magnitudes lineales están en metros.

Para aplicar esta ecuación en la práctica, dado que en una zona generalmente los desniveles (H), respecto a la estación, varían por las irregularidades del terreno, conviene dividirlo en trapecios circulares, de azimut arbitrario, e iguales en extensión, dentro de cada zona. Es conveniente proceder siempre de la misma manera para hacer los cálculos, siguiendo siempre la misma secuela, como brevemente se explica.

Se comienza por trazar en un papel transparente, o en una hoja de celuloide, un conjunto de circunferencias concéntricas, cada vez mayores, a la escala del plano topográfico donde se van localizando las estaciones. Los radios sucesivos que se ha convenido fijar son los siguientes, siendo el primero el que corresponde a la plataforma de la estación.

2 metros.	2 614
17 „	4 470
53 „	6 650
170 „	9 900
390 „	14 740
895 „	21 940
1 530 „	

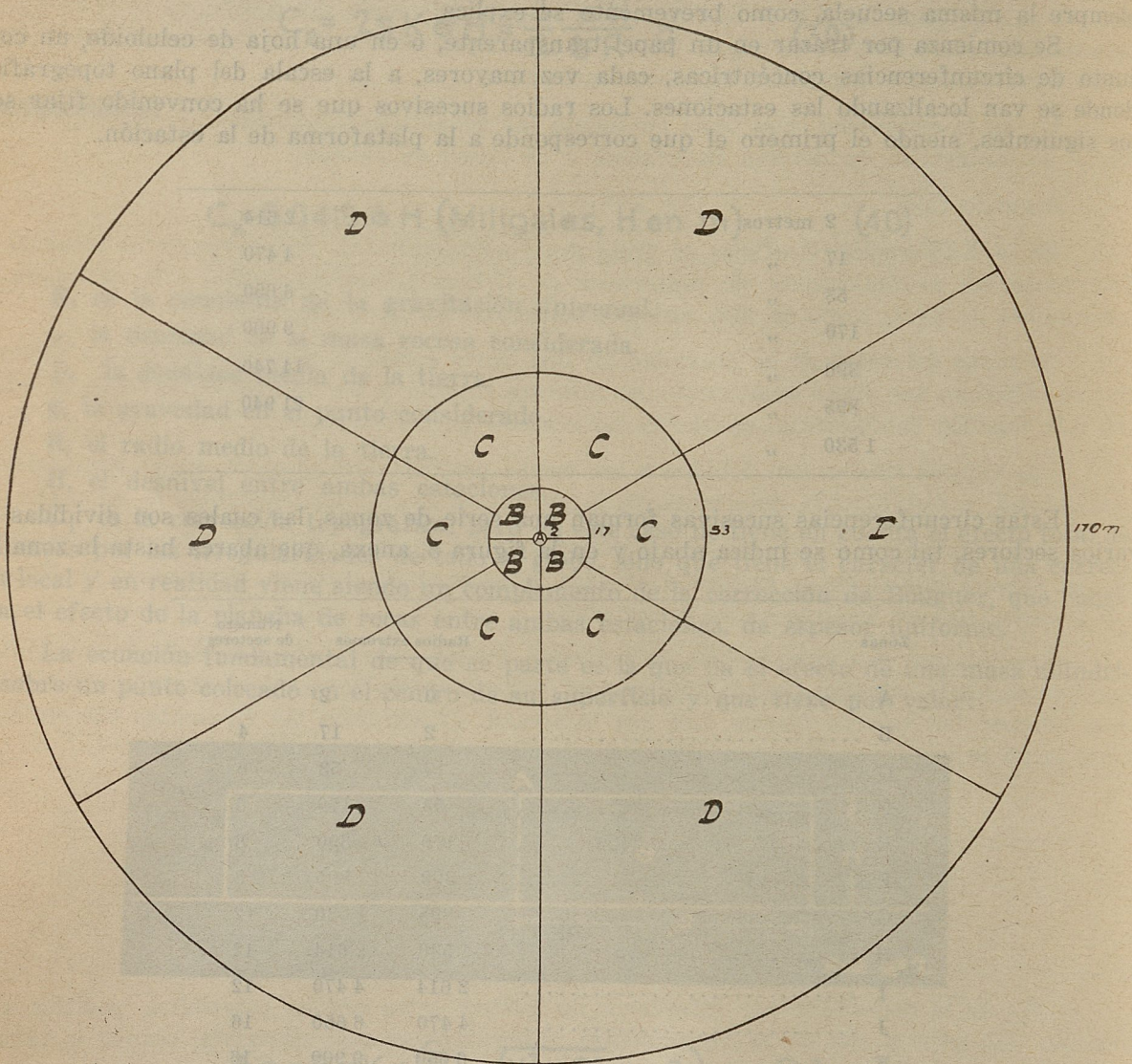
Estas circunferencias sucesivas forman una serie de zonas, las cuales son divididas en varios sectores, tal como se indica abajo y en la figura 3, anexa, que abarca hasta la zona D:

Zonas	Radios extremos		Número de sectores
A	0	2	
B	2	17	4
C	17	53	6
D	53	170	6
E	170	390	8
F	390	895	8
G	895	1 530	12
H	1 530	2 614	12
I	2 614	4 470	12
J	4 470	6 650	16
K	6 650	9 900	16
L	9 900	14 740	16
M	14 740	21 940	16

Hammer dió a conocer su tabla en 1939, para el cálculo de esta corrección, para sectores de diferentes alturas (H), o desnivel medio, con respecto a la estación y para cada zona, partiendo de la ecuación fundamental y dentro de límites prácticos, de acuerdo con la división anteriormente explicada, tabla que da la corrección con una precisión de 0.1 de miligal. Esta tabla ha sido adaptada, por el que esto escribe, al sistema métrico, y se da aquí.

FIG N° 3

DIVISION DEL TERRENO EN SECTORES PARA EL CALCULO DE LA CORRECCION TOPOGRAFICA



Nota En la figura solo aparece hasta la zona D

ESCALA 1 2000

TABLA DE HAMMER PARA LA CORRECCION TOPOGRAFICA EN OBSERVACIONES GRAVIMETRICAS

ADAPTADA AL SISTEMA METRICO, POR EL ING. ALFONSO DE LA O

ZONAS	ZONA B	ZONA C	ZONA D	ZONA E	ZONA F	ZONA G	ZONA H	ZONA I	ZONA J	ZONA K	ZONA L	ZONA M
Número de Trapecios	4	6	6	8	8	12	12	12	16	16	16	16
Rad. Int.	2.00	16.64	53.34	170.07	390.14	894.89	1529.48	2614.57	4468.97	6652.56	9 902.95	14 741.65
Radio Ext.	16.64	53.34	170.07	390.14	894.89	1529.48	2614.57	4468.97	6652.56	9902.95	14 741.65	21 944.38
T	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.	± h, Mts.
Miligals	0 a 0.34	0 a 1.31	0 a 2.34	0 a 5.48	0 a 8.22	0 a 17.67	0 a 22.86	0 a 30.18	0 a 50.90	0 a 62.17	0 a 75.90	0 a 92.65
0												
0.001	0.34 a 0.57	1.31 a 2.28	2.34 a 4.08	5.48 a 9.14	8.22 a 14.02	17.67 a 30.48	22.86 a 39.92	30.18 a 52.12	50.90 a 88.39	62.17 a 107.89	75.90 a 131.36	92.65 a 160.32
0.002	0.57 a 0.76	2.28 a 2.95	4.08 a 5.27	9.14 a 11.88	14.02 a 18.28	30.48 a 39.31	39.92 a 51.51	52.12 a 67.05	88.39 a 113.99	107.89 a 139.29	131.36 a 169.77	160.32 a 207.26
0.003	0.76 a 0.88	2.95 a 3.50	5.27 a 6.24	11.88 a 14.32	18.28 a 21.64	39.31 a 46.53	51.51 a 60.96	67.05 a 79.55	113.99 a 133.02	139.29 a 164.59	169.77 a 209.86	207.26 a 245.05
0.004	0.88 a 1.03	3.50 a 3.99	6.24 a 7.07	14.32 a 16.15	21.64 a 24.38	46.53 a 52.73	60.96 a 68.88	79.55 a 90.22	133.02 a 153.00	164.59 a 186.84	209.86 a 227.68	245.05 a 277.97
0.005	1.03 a 1.12	3.99 a 4.42	7.07 a 7.83	16.15 a 17.67	24.38 a 26.82	52.73 a 58.21	68.88 a 76.20	90.22 a 99.67	153.00 a 169.16	186.84 a 206.34	227.68 a 251.76	277.97 a 307.24
0.01	1.12 a 2.13	4.42 a 7.31	7.83 a 13.10	17.67 a 29.55	26.82 a 44.50	58.21 a 86.02	76.20 a 126.18	99.67 a 164.59	169.16 a 279.80	206.34 a 341.07	251.76 a 416.05	307.24 a 507.49
0.02	2.13 a 2.74	7.31 a 9.75	13.10 a 17.06	29.55 a 38.40	44.50 a 57.60	96.02 a 124.93	126.18 a 163.06	164.59 a 212.75	279.80 a 361.19	341.07 a 440.43	416.05 a 537.36	507.49 a 655.32
0.03	2.74 a 3.65	9.75 a 11.88	17.06 a 20.11	38.40 a 45.11	57.60 a 68.27	124.93 a 143.13	163.06 a 192.93	212.75 a 252.06	361.19 a 427.63	440.43 a 521.51	537.36 a 635.81	655.32 a 775.72
0.04	3.65 a 4.26	11.88 a 13.72	20.11 a 23.16	45.11 a 51.82	68.27 a 77.72	143.13 a 163.24	192.93 a 219.15	252.06 a 285.90	427.63 a 485.24	521.51 a 591.62	635.81 a 721.16	775.72 a 879.65
0.05	4.26 a 4.87	13.72 a 15.34	23.16 a 25.60	51.82 a 57.60	77.72 a 85.95	163.24 a 189.23	219.15 a 242.62	285.90 a 316.38	485.24 a 537.06	591.62 a 654.10	721.16 a 797.66	879.65 a 972.61
0.06	4.8 a 5.8	15.34 a 17.4	25.6 a 28.0	57.60 a 62.8	85.95 a 93.9	189.23 a 203.0	242.62 a 264.0	316.38 a 344.1	537.06 a 584.3	654.10 a 711.7	797.66 a 867.5	972.61 a 1057.7
0.07	5.8 a 6.4	17.4 a 19.2	28.0 a 30.5	62.8 a 67.5	93.9 a 100.9	203.0 a 218.2	264.0 a 283.8	344.1 a 369.7	584.3 a 627.9	711.7 a 764.7	867.5 a 932.1	1057.7 a 1136.3
0.08	6.4 a 7.3	19.2 a 20.7	30.5 a 32.6	67.5 a 72.5	100.9 a 107.6	218.2 a 232.0	283.8 a 302.4	369.7 a 393.8	627.9 a 669.0	764.7 a 814.4	932.1 a 992.7	1136.3 a 1210.1
0.09	7.3 a 8.2	20.7 a 22.5	32.6 a 34.7	72.5 a 76.8	107.6 a 114.0	232.0 a 246.6	302.4 a 320.0	393.8 a 416.7	669.0 a 707.7	814.4 a 861.4	992.7 a 1049.7	1210.1 a 1279.6
0.10	8.2 a 9.1	22.5 a 24.4	34.7 a 36.6	76.8 a 81.1	114.0 a 120.1	246.6 a 259.7	320.0 a 336.8	416.7 a 438.3	707.7 a 744.6	861.4 a 906.2	1049.7 a 1104.0	1279.6 a 1345.4
0.11	24 a 26	36 a 38	81 a 85	120 a 125	259 a 272	337 a 353	438 a 459	744 a 779	906.2 a 951.0	1104.0 a 1161.0	1345.4 a 1414.0
0.12	26 a 27	38 a 40	85 a 89	125 a 131	272 a 284	353 a 368	459 a 479	779 a 813	951.0 a 1000.0	1161.0 a 1221.0	1414.0 a 1486.0
0.13	27 a 30	40 a 43	89 a 93	131 a 137	284 a 296	368 a 383	479 a 498	813 a 846	1000.0 a 1050.0	1221.0 a 1284.0	1486.0 a 1562.0
0.14	30 a 32	43 a 45	93 a 97	137 a 142	296 a 307	383 a 398	498 a 516	846 a 877	1050.0 a 1100.0	1284.0 a 1351.0	1562.0 a 1643.0
0.15	32 a 34	45 a 46	97 a 101	142 a 147	307 a 319	398 a 411	516 a 534	877 a 908	1100.0 a 1150.0	1351.0 a 1421.0	1643.0 a 1728.0

Cada zona es un anillo circular de radio dado en metros, dividida en 4, 6, 8, 12 o 16 trapecios circulares de azimut arbitrario, (h) es el desnivel medio, en metros (independiente del signo), de cada trapecio con respecto a la estación.
 Las tablas dan la corrección (T) para cada trapecio, en miligals, para una densidad $\sigma = 2.0$
 Esta corrección, cuando se aplica a valores de la anomalía de Bouguer que hayan sido calculados simplemente con la corrección de Bouguer, es siempre positiva.

Se comienza por aplicar el diagrama de división sobre el plano topográfico, con curvas de nivel, leyéndose la cota media de cada uno de los trapecios en las zonas sucesivas a cuya cota se resta la de la estación, para obtener el desnivel medio correspondiente. Para la zona B serán cuatro desniveles; para la C, 6 y así sucesivamente. Con estos desniveles se entra en la tabla, para determinar las correcciones parciales de cada trapecio, que sumadas darán el efecto en la zona a que correspondan, y la suma de éstos el efecto total. Todo se lleva ordenadamente en un registro.

Como las tablas están calculadas para una densidad arbitraria de 2, para otra densidad (σ) cualquiera, el valor final de la corrección será:

$$C_T = \frac{\sigma}{2} C_{T_2} \quad (44)$$

Como generalmente no se dispone de planos topográficos de conjunto con curvas de nivel, se aprovechan las nivelaciones de las estaciones sucesivas de gravímetro, para hacer una configuración general. Sin embargo, si los puntos acotados están muy separados, podrán hacerse nivelaciones radiales en 4 u 8 direcciones, hasta los 390 m, a menos que la configuración del terreno obligue a prolongar la corrección más allá de la zona E. En cambio, habrá terrenos muy llanos, en los que no sea necesario aplicar esta corrección.

De la interpretación de las anomalías gravimétricas, desde el punto de vista de la Exploración Geofísica, nos ocuparemos al hablar de las observaciones con péndulos y gravímetros.

MEDICIONES DE LA GRAVEDAD (*)

Los sistemas para las medidas de la gravedad podemos clasificarlos como sigue:

I.—Sistemas dinámicos:

- a) Péndulos.
- b) Caída de los cuerpos en el vacío.
- c) Comparación de la fuerza centrífuga de un líquido en rotación con g (poco preciso).

II.—Sistemas estáticos:

a) Gravímetros:

Pneumatométricos.

Mecánicos o seismogravímetro

Verticales (astáticos, no astáticos). Horizontales (astáticos, no astáticos).

b) Balanzas de torsión.

De todos estos procedimientos, los más precisos son los llevados a cabo con péndulos, seismogravímetros y balanzas de torsión y de ellas me ocuparé en esta memoria, de manera general.

En la actualidad los instrumentos con que se hacen las observaciones han llegado a un gran perfeccionamiento, lo mismo que la técnica que se sigue en ellas, obteniéndose los valores de la gravedad con gran precisión.

Los péndulos permiten hacer determinaciones absolutas o relativas del valor total de la gravedad.

Los gravímetros permiten hacer determinaciones relativas de la misma por diferencias.

Las balanzas de torsión miden la gravedad diferencial o, mejor dicho, varias de las segundas derivadas del potencial, de las cuales es posible partir para calcular valores relativos de la gravedad y también las desviaciones de la vertical.

(*) Usaremos la palabra gravedad como sinónimo de pesantez.

Mientras que los péndulos se utilizan preferentemente en operaciones de Geodesia, los gravímetros y balanzas de torsión son utilizadas más bien en Exploración Geofísica, aunque todos estos instrumentos puedan utilizarse en uno y otro casos.

OBSERVACIONES POR MEDIO DE PENDULOS

Sabemos que la ecuación del movimiento de un péndulo simple en el vacío es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (45)$$

En la que (θ) , es el ángulo que corresponde a una posición cualquiera del péndulo, entre la de equilibrio y una de las extremas; l es la longitud del péndulo y g la intensidad de la gravedad en el lugar de oscilación del péndulo.

La anterior ecuación nos conduce a una integral elíptica definida del primer tipo, cuyo módulo es $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, siendo α , la amplitud de la oscilación del péndulo. Esta integral nos conduce al valor del período de la oscilación que es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256} \operatorname{sen}^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right) \quad (46) \quad (*)$$

Si α es reducida, escribiremos simplemente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{9\alpha^4}{1024} + \frac{25\alpha^6}{16384} + \dots \right) \quad (47)$$

Todavía más, si α , es infinitamente pequeña, el período valdrá simplemente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (48)$$

Las anteriores ecuaciones subsisten cuando se trata de un péndulo compuesto o real, con tal que se substituya el valor de la longitud (l) del péndulo simple por $l = \frac{I}{ML}$, siendo I el momento de inercia del péndulo con respecto al eje de rotación; L la longitud del péndulo compuesto o sea la distancia entre dicho eje y el centro de gravedad del péndulo y M su masa. En efecto, en este caso es fácil demostrar que la ecuación del movimiento es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MLg}{I} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (49)$$

análoga a la número 45.

(*) Como apéndice de esta memoria se da una demostración breve de esta ecuación del Sr. Prof. Carlos Martínez B.

Por definición, la frecuencia angular o frecuencia natural del péndulo es:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{MLg}{I}} \quad (50)$$

Si la oscilación se hace en un medio resistente, cuya resistencia (f) sea proporcional a la velocidad variable del movimiento ($f = -p l \frac{d\theta}{dt}$), es fácil ver que la ecuación del movimiento es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{p}{m} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (51)$$

La que para pequeñas oscilaciones nos conduce a la siguiente expresión, para el valor del período:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{p^2}{4m^2}}} \quad (52)$$

Que se convierte en la número 48, si el coeficiente $p = 0$

En este tipo de movimiento si α_0 es la amplitud inicial, después de (n) oscilaciones, se habrá reducido a:

$$\alpha_n = \alpha_0 e^{-nbt} \quad (53)$$

De la que se deduce:

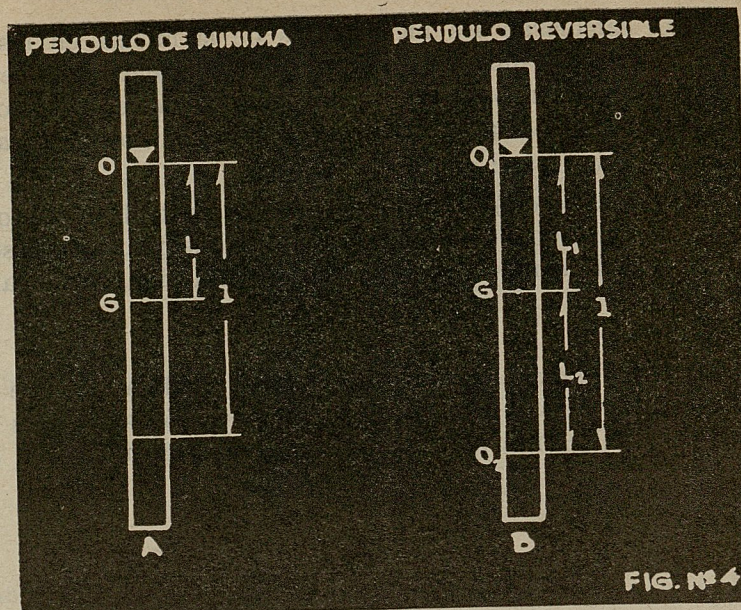
$$b = \frac{\text{Log. } \alpha_0 - \text{Log. } \alpha_n}{nt} \quad (54)$$

llamado decremento logarítmico.

En la práctica se procura siempre que la oscilación se haga, hasta donde sea posible, en el vacío, dentro de una campana metálica, a la que se extrae el aire hasta un cierto grado de enrarecimiento.

PENDULOS DE PERIODO MINIMO

Son péndulos compuestos, que tienen la propiedad de que su oscilación se efectúa en un tiempo mínimo, lo que se consigue si la longitud (l) del péndulo simple equivalente es igual al doble de la longitud (L) del péndulo real, condición que puede demostrarse teóricamente. (Fig. 4-A.)



Se construyen de cuarzo en forma de barra.

PÉNDULOS REVERSIBLES

Son péndulos compuestos, con dos ejes de oscilación O_1 y O_2 (Fig. 4-B), colocados de tal modo que el período es igual, cualquiera que sea el eje que se utilice, lo que se consigue separándolos una distancia igual a la longitud del péndulo simple equivalente (1).

Éstos péndulos se utilizan para las determinaciones absolutas de la gravedad.

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS GRAVIMÉTRICOS

Los péndulos se construyen de modo que su longitud sea invariable, o si sufren cambios, sean pequeñísimos y que puedan tenerse en cuenta desechando las observaciones que presenten discrepancias por este motivo, puesto que el período T aumentará o disminuirá con un incremento de la longitud aun cuando no haya variación de la gravedad.

A este respecto Sans Huelin al analizar observaciones de la gravedad en España correspondientes a un período de 21 años (1907-1928), ha deducido un acortamiento progresivo de los péndulos Sterneck empleados para tales investigaciones, que corresponden a disminuciones totales en el período de 2.5×10^{-5} a 3×10^{-5} segundos.

OBSERVACIONES PÉNDULARES SUBMARINAS

El doctor Vening Meinesz demostró la forma de llevar a cabo, mediante dispositivos adecuados, observaciones de la gravedad con péndulos instalados en submarinos, realizando, como se sabe, una brillante jira mundial, haciendo esta clase de observaciones. Primeramente utilizó un equipo de péndulos que oscilaban en fase opuesta en el mismo plano vertical. Posteriormente agregó un tercer péndulo central, que oscila sólo debido a las oscilaciones del submarino.

DETERMINACION DE LOS INCREMENTOS DE g

Si no se dispone de un péndulo reversible para hacer la determinación de la gravedad absoluta, en una estación que se observe, se partirá de un punto cuya gravedad relativa o ab-

sóluta sea conocida y se calcularán los incrementos de la misma en las demás estaciones de observación, determinando, con mucha precisión, las variaciones en el período o períodos de oscilación, regresando a la estación base de partida para cerrar el circuito de observaciones. De este modo, se conocerá la gravedad relativa en la estación considerada.

Pueden presentarse dos casos:

Que en la estación base se disponga de un péndulo central, cuyas oscilaciones se van comparando con las del péndulo o péndulos de campaña, mediante radio-señales; o bien, que sólo se disponga del equipo de campo y cronógrafos de precisión, cuya marcha se corrige cada 24 horas.

Primer caso:

Supongamos que en la estación base se dispone del péndulo (a), que el péndulo de campo sea (b) y que la intensidad de la gravedad en dicha estación sea g ; los períodos de ambos péndulos y el número de oscilaciones en un mismo intervalo de tiempo t , serían, respectivamente:

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{l_a}{g_0}} \quad N_a = \frac{t}{T_a} \quad (55)$$

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{l_b}{g_0}} \quad N_b = \frac{t}{T_b} \quad (56)$$

Si ahora, dejando el péndulo central en la base, hacemos oscilar el otro péndulo en una estación cualquiera, en un intervalo de tiempo t' , que en general será diferente al original t , el número de oscilaciones para cada péndulo serán, respectivamente:

$$N'_a = \frac{t'}{T_a} \quad N'_b = \frac{t'}{T_b} \quad (57)$$

De éstas y las anteriores observaciones se deduce fácilmente el valor de la gravedad en la nueva estación:

$$g_1 = g_0 \left(\frac{N'_b N_a}{N'_a N_b} \right) \quad (58)$$

O bien, con suficiente aproximación, el incremento de g por la ecuación

$$\Delta g = 2g_0 \left(\frac{N'_b}{N'_a} - \frac{N_b}{N_a} \right) = -2g_0 \frac{\Delta T T_a}{T'_b T_b} \quad (59)$$

Si sólo se dispone de un solo equipo, las observaciones se harán de modo semejante a las hechas con el péndulo de campo del caso anterior. En este caso, el período en la estación de partida (O), y en otra estación cualquiera (1), así como el número de oscilaciones serían, respectivamente:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}} \quad N_0 = \frac{t_0}{T_0} \quad (60)$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} \quad N_1 = \frac{t'}{T_1} \quad (61)$$

De las que se deduce

$$g_1 = g_0 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^2 \quad (62)$$

O con suficiente aproximación, el incremento de g :

$$\Delta g = -2g_0 \left(\frac{t_1 N_0}{t_0 N_1} - 1 \right) = -2g_0 \frac{\Delta T}{T_1} \quad (63)$$

Las ecuaciones (59) y (63) nos indican que la precisión que se obtenga en el incremento de la gravedad dependerá de la que se obtenga en el ΔT . La técnica que se sigue en las observaciones permite obtener estas magnitudes con una gran precisión.

Las oscilaciones y número de ellas se controlan por el método llamado de las coincidencias y las observaciones pueden hacerse mediante registro fotográfico o directamente.

A las observaciones pendulares hay que hacerles varias correcciones instrumentales, que sólo enumeraremos para no alargar mucho esta exposición.

Estas correcciones son:

1. Por marcha del cronógrafo.
2. Por la amplitud (α) de la oscilación.
3. Por temperatura.
4. Por presión del interior de la cámara pneumática.
5. Por balanceo del soporte.

TIPOS DE PENDULOS USADOS

Tres son los tipos de péndulos que se usan, atendiendo a la forma geométrica de la masa oscilante.

Péndulos de lenteja. (Mendenhall, U. S. Coast and Geodetic Survey.) (Fig. 5-A.)

Se fabricaban anteriormente de bronce, pero su longitud era más afectada por los cambios de temperatura. En la actualidad, se construyen de acero-níquel, en proporción de una parte de Ni por dos de Fe. (Invar.)

El Departamento Geográfico de la Secretaría de Agricultura y Fomento posee un equipo de péndulos de bronce y otro de invar, cuya longitud, desde el eje de suspensión hasta la parte inferior de la lenteja, es de 294 mm. Los péndulos números 5 y 10 pesan, respectivamente, 1478.5 y 1472.5 gramos. Su período es, como término medio, de $\frac{1}{2}$ segundo.

En la fotografía número 1 se ve uno de estos equipos.

Péndulos de von Sterneck (Fig. 5-B). Se construyen tanto de bronce como de acero-níquel, su masa es, aproximadamente, de 1 000 gramos y su período alrededor de $\frac{1}{2}$ segundo.

Las fotografías números 2 y 3 muestran un equipo Askania, de cuatro péndulos de este tipo.

Péndulos de Meisser.—(Fig. 5-C.) Estos péndulos tienen la forma de una barra, como se ve en la figura, de unos 300 mm. de longitud, se fabrican de cuarzo o acero-níquel. En este tipo se construyen actualmente los péndulos de mínima y reversibles.

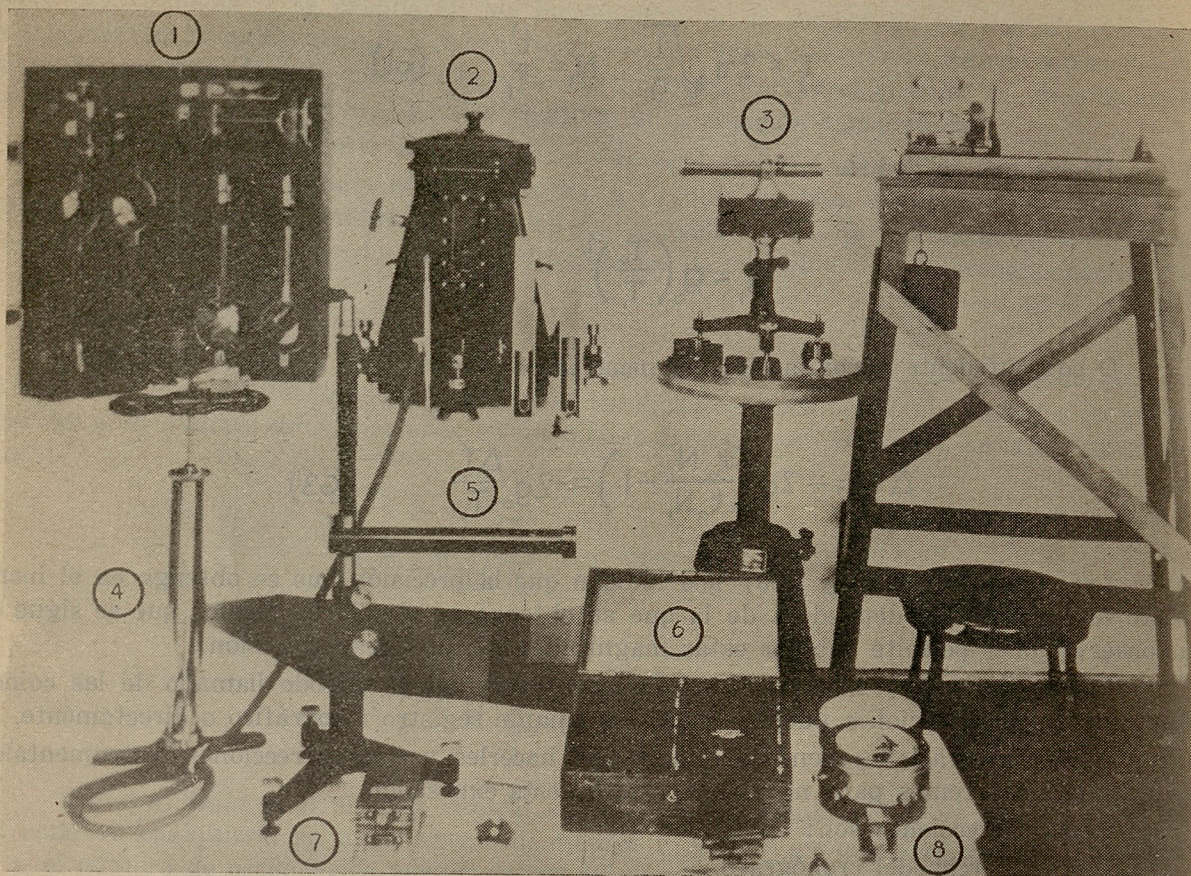


FOTO N° 1. Equipo de péndulos Gaertner del Depto. de Geografía de la S.A.F. 1.—Los péndulos en su estuche. 2.—Campana metálica para la instalación de los péndulos, el termómetro y manómetro. 3.—Aparato de los destellos. 4.—Bomba para hacer el vacío de la campana. 5.—Interferómetro. 6.—Tablero de control. 7.—Magneto. 8.—Cronómetro testigo.

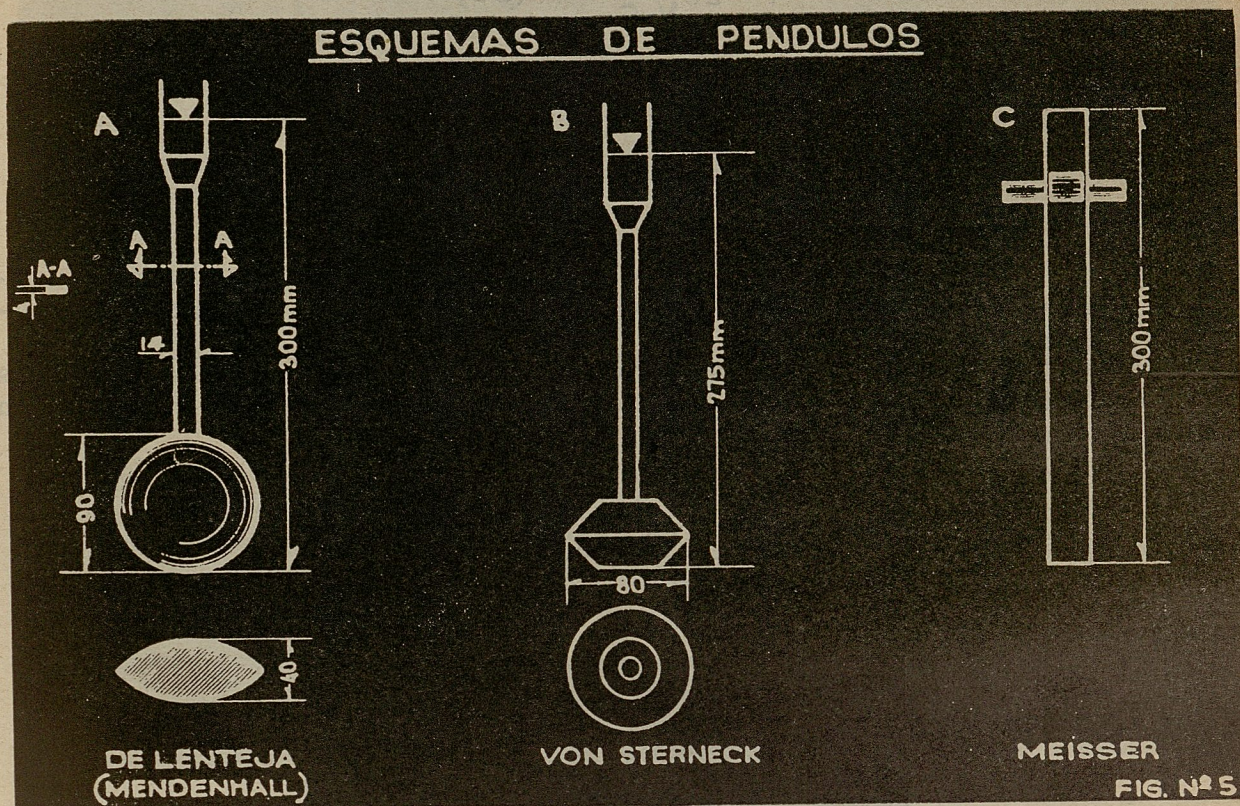
Los péndulos, como se ve en las figuras y fotografías, están apoyados en una barrita triangular de ágata, con apoyos del mismo material. Durante el transporte, o cuando no están trabajando, hay modo de aliviar el apoyo del peso del péndulo o desmontar éste y guardarlo en su estuche. Cada equipo consta de uno o varios péndulos, montados en el mismo aparato, que se instalan dentro de una campana metálica pneumática que se cierra herméticamente cuando los péndulos están trabajando, y que tiene unas ventanas para observar su interior, donde van, además de los péndulos, un termómetro y un manómetro. En los equipos Mendenhall, el termómetro va unido a un péndulo idéntico al que oscila. El termómetro tiene por objeto reducir los resultados de las observaciones a una misma temperatura, fijada de antemano, y el manómetro para medir el grado de enrarecimiento del aire en el interior de la campana, que se ajusta siempre a un mismo valor, extrayendo el aire por medio de una bomba, a fin de que la oscilación de los péndulos se haga acercándose lo más que sea posible a las condiciones ideales. En los equipos Mendenhall, cuando el manómetro indica 60 mm. de columna mercurial.

OBSERVACIONES POR MEDIO DE GRAVIMETROS

En la actualidad se ha generalizado más la construcción y uso de gravímetros mecánicos o seismogravímetros, ya sean verticales u horizontales, siendo astáticos o no astáticos.

En principio los gravímetros mecánicos son seismómetros muy sensibles, de masa pequeña, de frecuencia natural alta o intermedia y de gran amplificación.

En los gravímetros mecánicos la masa está suspendida de un simple resorte, o por medio de un sistema más o menos complicado de palancas y resortes, o dispositivos que hagan sus veces, de modo que la ecuación del movimiento y las que dan el valor del período y fre-



cuencia natural serán más o menos complicadas, dependiendo ello de las características del sistema oscilante.

Por lo que se refiere a su grado de estabilidad, que se traduce en sensibilidad mayor o menor, hay los no astáticos o estables y los astáticos o inestables.

Astatar un sistema oscilante es aumentar su sensibilidad, como luego veremos brevemente.

En la astatización intervienen tres fuerzas fundamentales:

1. La gravedad.
2. La fuerza equilibrante o de restitución, que generalmente es la fuerza elástica de un muelle o resorte.

3. La fuerza de astatización un poco menor que la anterior y de signo contrario a ella, es decir, dicha fuerza obra a favor de la gravedad y tiende a romper el equilibrio del sistema haciéndolo inestable.

El ejemplo más sencillo, en principio, de un gravímetro vertical se ilustra esquemáticamente en la figura 7 y consta de una masa (m) suspendida de un resorte F . En este tipo de aparato no hay fuerza de astatización y la ecuación del movimiento es:

$$\frac{d^2z}{dt^2} - g + \frac{c}{m} z = 0 \quad (64)$$

cuya integración nos permite encontrar el valor del período que es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (65)$$

o la frecuencia natural

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (66)$$

m , es la masa suspendida, C la constante del resorte o sea la fuerza elástica por unidad de longitud y z el desalojamiento vertical (+) o (—), respecto a la posición de equilibrio.

Ahora bien, si el sistema está en un instante dado en equilibrio y reposo y en estas condiciones (d) es la elongación total del resorte, evidentemente $Cd = mg$, y teniendo en cuenta la ecuación que da el período

$$d = \frac{mg}{c} = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{g}{\omega_0^2} \quad (67)$$

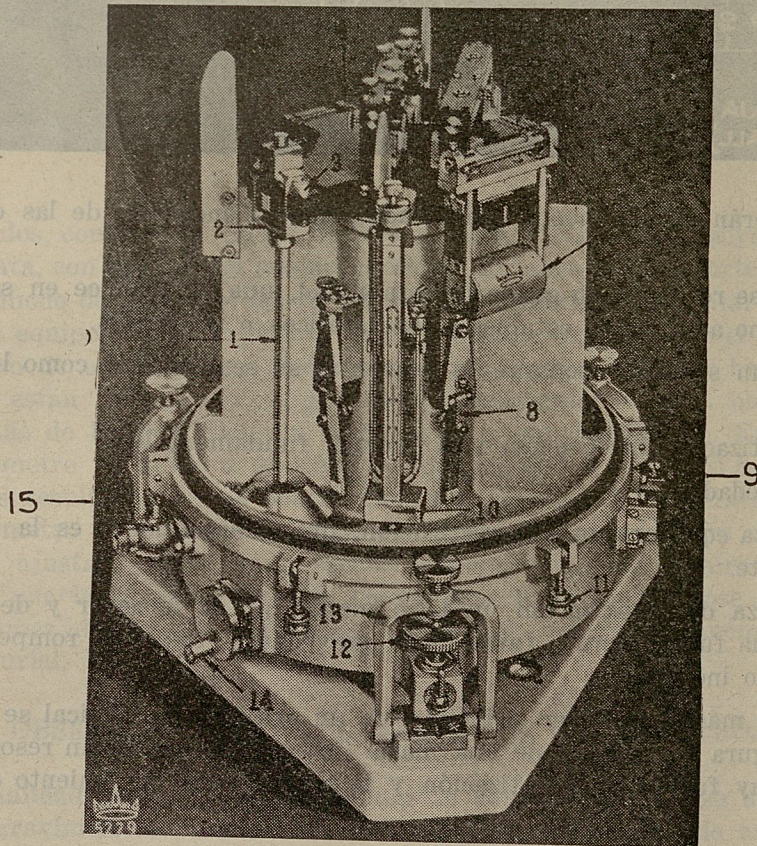


FOTO N° 2. EQUIPO ASKANIA de cuatro péndulos tipo V. Sterneck. 1.—Péndulo. 2.—Cabeza del péndulo. 3.—Cuchilla del péndulo. 4.—Apoyo en el mecanismo de fijación. 5.—Apoyo de ágata. 6.—Pieza principal del mecanismo de suspensión. 7.—Péndulo Nivel. 8.—Ajuste de la amplitud. 9.—Mariposa del limitador de la amplitud. 10.—Soporte del termómetro y del manómetro. 11.—Tornillos de maroma para la campana. 12.—Tornillo nivelador. 13.—Pieza de suspensión. 14.—Manivela de elevación y fijación del péndulo. 15.—Válvula de la bomba neumática.

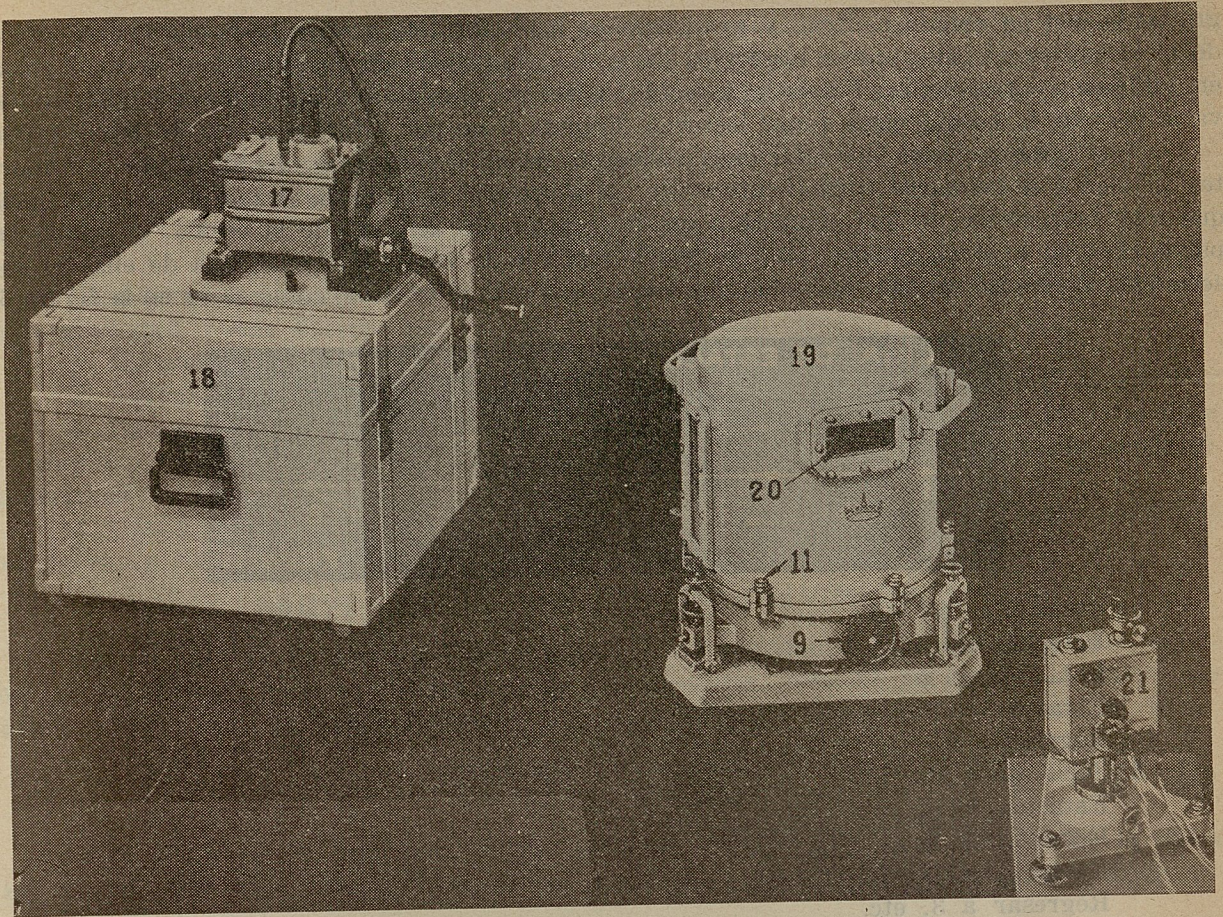


FOTO N° 3. Equipo ASKANIA de cuatro péndulos tipo V. Sterneck. 17.—Bomba de aceite. 18.—Caja de empaque. 19.—Campana neumática. 20.—Ventanilla de observación. 21.—Control de registro.

y para un cambio Δg de g :

$$\Delta d = \frac{T^2}{4\pi^2} \Delta g = \frac{\Delta g}{\omega_0^2} \quad (68)$$

Ecuación que nos indica que esta elongación adicional que tiende a aumentar la sensibilidad, es proporcional al cuadrado del período, o inversamente, proporcional a la frecuencia natural, si por un mecanismo adicional logramos aumentar el primero o disminuir la segunda, aumentaremos la sensibilidad, operación que constituye la astatización. Por lo tanto, en la ecuación 64 podremos aumentar T , si disminuimos el numerador, es decir:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C - C_1}} \quad (69)$$

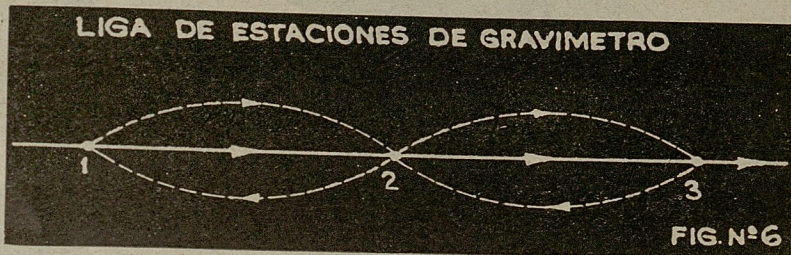
C , será la constante de la fuerza de restitución y C_1 la de la fuerza de astatización. A medida que C_1 se acerque a C , T aumentará y también la sensibilidad.

MODO DE LIGAR LAS OBSERVACIONES

Los cambios de intensidad de la gravedad se acusan en estos aparatos por el desalojamiento de la masa al deformarse el resorte o resortes de suspensión, más o menos de una estación a otra, desalojamientos que se registran por medio de un indicador en una escala

graduada con un origen central, y graduaciones hacia un lado y otro, para el registro, tanto de incrementos positivos como negativos de g . La graduación de la escala que es lineal, está en miligales y fracciones. En cada estación, antes del cambio a la siguiente, el índice se lleva al cero de la escala, para tener lecturas directas y no por diferencias en un micrómetro.

Las observaciones en estaciones sucesivas deben ir ligándose, debido a que los resortes tienden a deformarse permanentemente, de modo que el índice se desaloja paulatina aunque muy lentamente, lo que equivale a un desalojamiento del cero de la escala, que también puede deberse a otras causas. La liga puede hacerse de varias maneras, una de ellas es observar en forma de cadena, haciendo dos veces una misma estación, como se ve en la figura 6.



1. Serie (1 a 2).
Estación en 1.
Estación en 2.
Estación en 1.
Regreso a 2.
2. Serie (2 a 3):
Estación en 2.
Estación en 3.
Estación en 2.
Regresar a 3, etc.

De este modo el g entre 1 y 2 será:

$$\Delta g_{1,2} = g_2 - \frac{g_1' + g_1''}{2} \quad (70)$$

Y entre 2 y 3:

$$\Delta g_{2,3} = g_3 - \frac{g_2' + g_2''}{2} \quad (71)$$

Otro modo de ligar las observaciones es partir de la estación base, recorrer en un sentido las demás estaciones, y luego en sentido contrario, para terminar en la original y ajustar las observaciones.

CORRECCIONES INSTRUMENTALES A LAS OBSERVACIONES

Las lecturas deben corregirse por:

1. Temperatura.
2. Presión.
3. Humedad.

El efecto producido por cambios de temperatura es muy complejo, y sólo puede determinarse experimentalmente, para lo cual se calienta el instrumento a varias temperaturas, leyendo cada vez la escala.

Cosa semejante puede decirse de los cambios de presión. Se hace variar ésta con ayuda de bombas neumáticas y se miden los cambios con manómetros. Hay gravímetros herméticamente cerrados, en los que esta corrección se elimina, observando siempre a una misma temperatura.

En cuanto al efecto de humedad, se prefiere operar a una temperatura alta, que se mantiene estable con ayuda de un termostato.

CALIBRACION DE LOS GRAVIMETROS

La determinación del valor de las divisiones de la escala de un gravímetro en término de la gravedad, puede hacerse por los siguientes procedimientos:

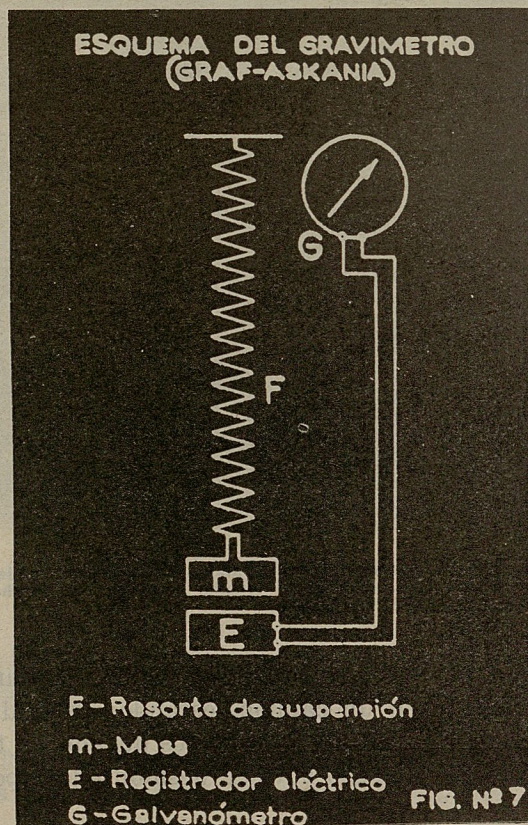
1. Determinación del valor del período.
2. Agregando masas adicionales pequeñas de valores conocidos a la masa del aparato.
3. Haciendo lecturas repetidas a diferentes horas, a distintas alturas de edificios altos y comparando las lecturas con los cambios de la intensidad de g y calculadas con ayuda de la ecuación 32, que da la corrección por altura libre.
4. Comparación de las lecturas de la escala con los incrementos de g , entre estaciones hechas con otros aparatos como péndulos, balanzas de torsión u otros gravímetros.

BREVE DESCRIPCION DE TRES GRAVIMETROS

Actualmente en el mercado hay un gran número de patentes comerciales de estos aparatos. Aquí describiré primero el gravímetro Graf-Askania, vertical, no astático, y luego dos verticales astáticos, muy perfeccionados, el de la Mott-Smith Corporation y el de C. H. Frost.

Gravímetro Graf-Askania (Vertical, no astático)

Como se ve en el esquema figura 7, de un resorte (F) está suspendida la masa (m). Un sistema eléctrico (E), dotado de un galvanómetro (G), registra los desalojamientos de m.



Especificaciones generales

1. Sensibilidad: 1 miligal por 6 ó 12 milímetros de la escala, que es lineal.
2. Precisión: ± 0.1 de miligal.
3. Rango de la escala: 1000 a 1600 miligales.
4. Error por desnivel, correspondiente a un desnivel de 60", 0.1 de miligal.
5. Temperatura interior constante, por medio de un termostato doble.
6. Herméticamente cerrado: no se necesita hacer la corrección barométrica.
7. Período de oscilación: un segundo.
8. Fuente de energía: una pila de 12 volts.
9. Peso: 57 kg.
10. Duración de la observación: 4 a 5 minutos.
11. Rendimiento por día de trabajo: hasta 25 estaciones, si no distan entre sí más de 2 km. y se cuenta con buenos caminos.

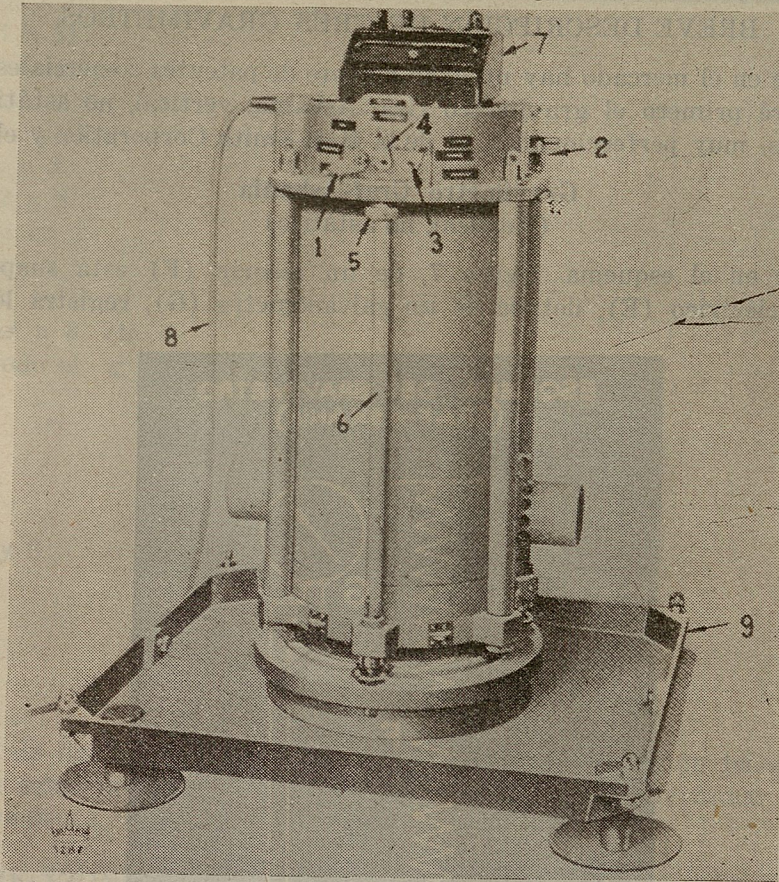
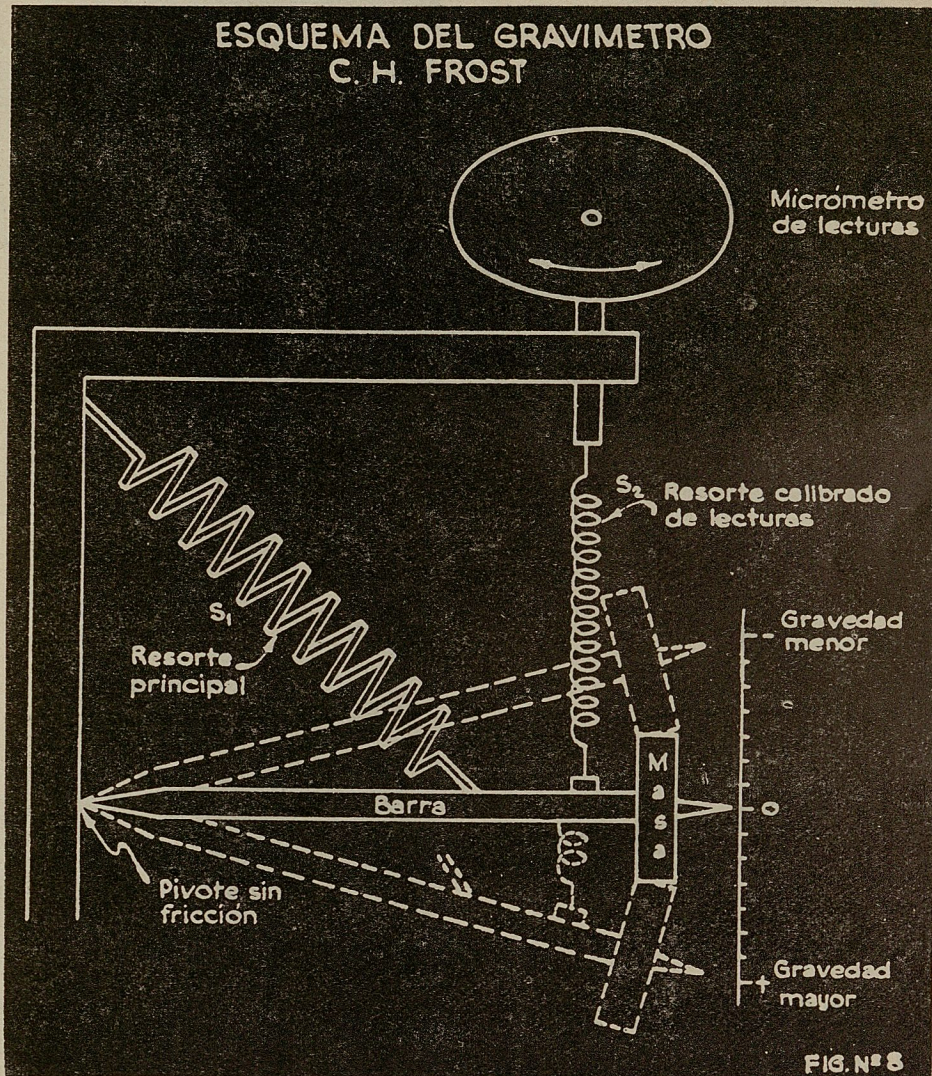


FOTO N° 4. Gravímetro Graf-ASKANIA (Vertical no astático). 1.—Palanca de fijación. 2.—Ajuste del rango de la escala. 3.—Masa de calibración. 4.—Ajuste del resorte de suspensión. 5.—Cabeza del tornillo nivelador. 6.—Flecha del tornillo nivelador. 7.—Micro-amperímetro. 8.—Cable conductor eléctrico. 9.—Placa de apoyo.

La fotografía número 4 es una vista exterior de este gravímetro en su placa de apoyo. El aparato puede ser instalado en un camión, estando suspendido por medio de un dispositivo especial, que lo defiende de choques o impactos durante el transporte. Durante la observación puede descender hasta el terreno sin ser desmontado, apoyándolo en su placa metálica.

Gravímetro C. H. Frost (Vertical estático)

Este gravímetro, como se ve en el esquema anexo (Fig. 8), consta de una barra en uno de cuyos extremos está la masa (m). El otro extremo termina en un apoyo sin fricción. Este sistema está suspendido de un resorte principal S_1 . Cualquier cambio en el valor de g , modificará la tensión de otro resorte calibrado S_2 , aumentándola o disminuyéndola, cambio que se mide por la diferencia de lecturas leída en el tornillo micrométrico T , al restaurar la masa al cero de la escala.



Especificaciones generales

1. Escala lineal.
2. Sensibilidad: una división del tornillo corresponde a 0.075 miligales.
3. Rango: 80 miligales, una vez ajustado para cierta latitud, pero se adapta a cualquier región.
4. Insensible hasta para un desnivel del aparato de $1' 40''$.
5. Compensado para cambios de temperatura hasta de $\pm 1.67^\circ\text{C}$. ($\pm 3^\circ\text{F}$.) por división en el microscopio.

6. Compensando barométricamente.
7. No magnético.
8. Todo el control exterior.
9. Peso: 14 kg.
10. Altura: 35 centímetros.
11. La aproximación en las lecturas, puede llevarse hasta 0.1 de división.
12. Rendimiento por día en condiciones óptimas: 80 estaciones.

El aparato dispone de un tripié especial para su apoyo durante la observación.

En la fotografía número 5 se da una vista de conjunto de este gravímetro, que es muy portátil.

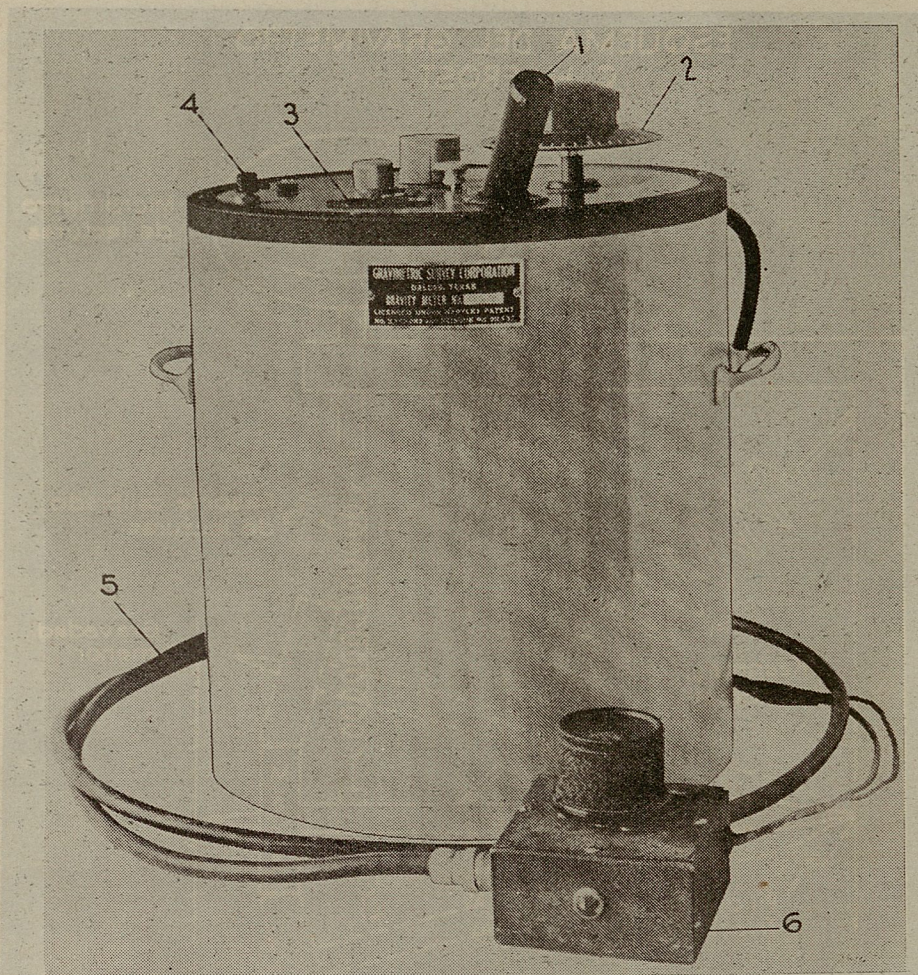
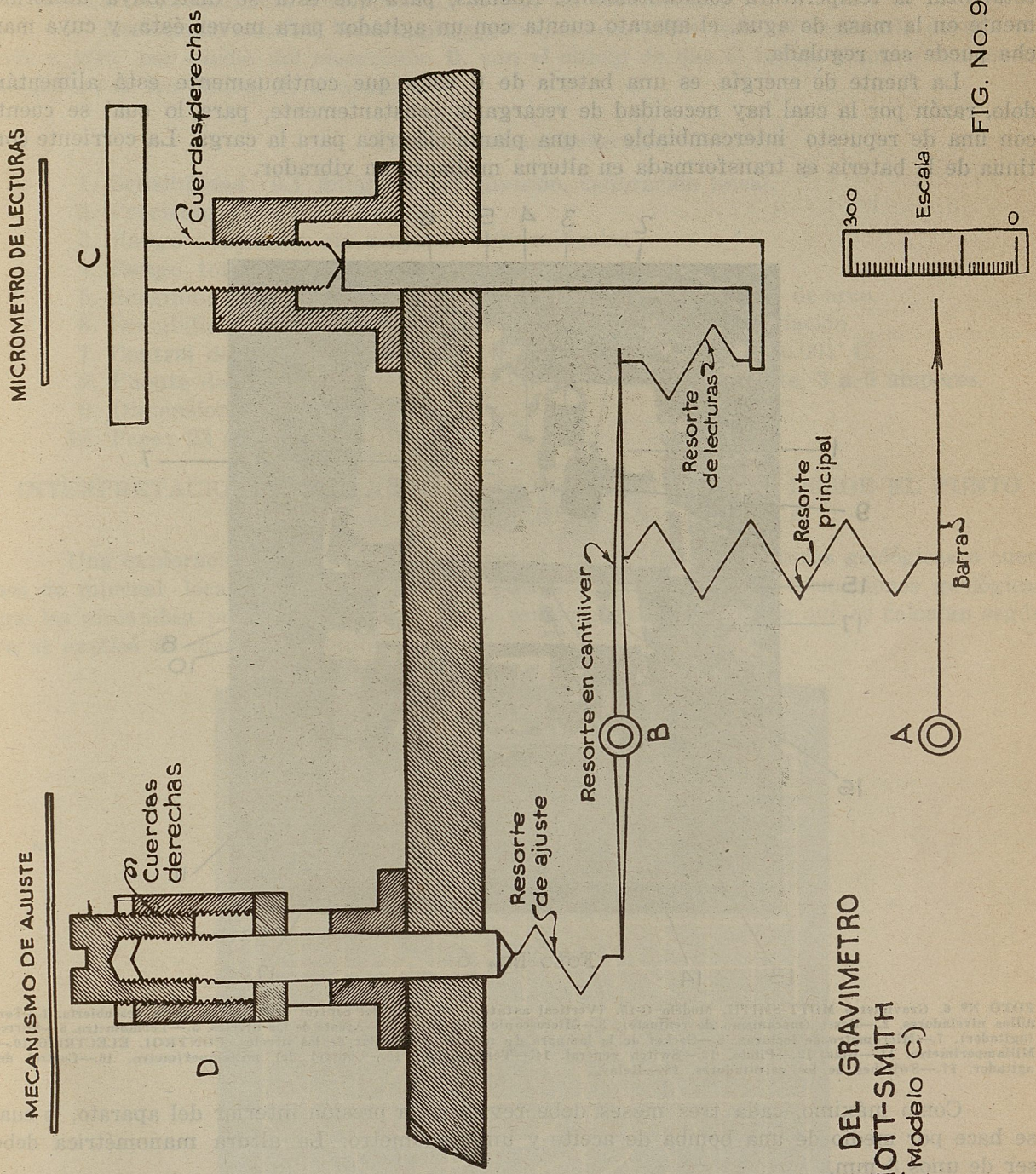


FOTO N° 5. Gravímetro de C. H. FROST (Vertical astático). 1.—Microscopio. 2.—Micrómetro de lecturas. 3.—Niveles. 4.—Switch. 5.—Cable eléctrico conductor. 6.—Caja del relay eléctrico regulador de temperatura.

Gravímetro Mott-Smith Corporation, Tipo C. (Vertical astático)

El mecanismo sensible de este gravímetro está constituido en esencia, como se ilustra en el esquema, de una barra, que suspendida de un resorte puede girar en (A). El resorte a su vez va unido al brazo mayor de otro resorte, en cantiliver, que a su vez está sostenido por otro conectado con el micrómetro de lecturas C, por un extremo, y por el otro, al mecanismo de reajuste del sistema D, por medio de otro resorte. El mecanismo sensible está encerrado en una pequeña caja metálica, herméticamente cerrada, colocada en el interior de una cubierta general en la que va el tablero de control de funcionamiento del aparato. La temperatura se mantiene estable mediante un baño de agua destilada, cambiabile, que se in-



**ESQUEMA DEL GRAVIMETRO
MOTT-SMITH
(Modelo C)**

FIG. No. 9

produce a una temperatura de 56° , que continuamente se controla mediante un termómetro Beckman, un "piloto" y una celda fotoeléctrica. Dos bancos de calentadores se encargan de estabilizar la temperatura constantemente. Además, para que ésta se distribuya uniformemente en la masa de agua, el aparato cuenta con un agitador para mover ésta, y cuya marcha puede ser regulada.

La fuente de energía es una batería de 6 volts que continuamente está alimentándolo, razón por la cual hay necesidad de recargarla constantemente, para lo cual se cuenta con una de repuesto intercambiable y una planta eléctrica para la carga. La corriente continua de la batería es transformada en alterna mediante un vibrador.

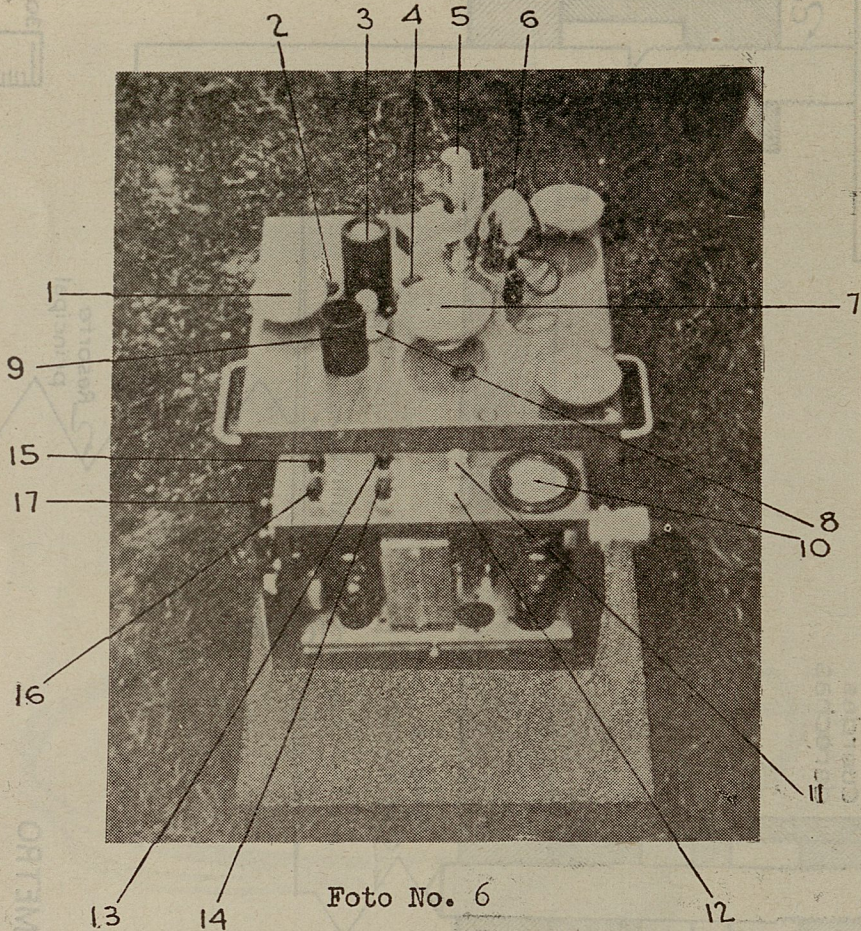


Foto No. 6

FOTO N° 6. Gravímetro MOTT-SMITH. Modelo C-15. (Vertical astático). La caja del control eléctrico en parte descubierta. 1.—Tornillos niveladores. 2.—Reset (mecanismo de reajuste). 3.—Microscopio de lecturas. 4.—Ajuste de los niveles. 5.—Termómetro. 6.—Stirrer (agitador). 7.—Micrómetro de lecturas. 8.—Socket de la lámpara de niveles. 9.—Ocular de los niveles. CONTROL ELECTRICO 10.—Miliamperímetro. 11.—Bias. 12.—Piloto. 13.—Switch general. 14.—Termómetro. 15.—Control del miliamperímetro. 16.—Control del agitador. 17.—Switches de los calentadores. 18.—Relay.

Como máximo, cada tres meses debe revisarse la presión interior del aparato, lo cual se hace por medio de una bomba de aceite y un manómetro. La altura manométrica debe ser de unos 3 mm.

El aparato se instala sobre una tabla y se nivela por medio de tres tornillos que tiene para tal objeto. Los niveles, que están alumbrados por una lámpara, se ven a través de un ocular.

Los cambios en la intensidad de la gravedad provocan deformaciones en los resortes del mecanismo sensible, que se manifiestan por desalojamientos del índice en la escala. Por medio del micrómetro de lecturas se lleva dicho índice siempre a una misma lectura de la escala que es la de referencia, a través del microscopio. Se anota la lectura del micrómetro, la temperatura y la hora,

En la estación siguiente se harán operaciones semejantes; se registrará una nueva lectura micrométrica para llevar el índice a la constante de la escala; la diferencia entre las dos lecturas micrométricas corresponderá al Δg , sin correcciones.

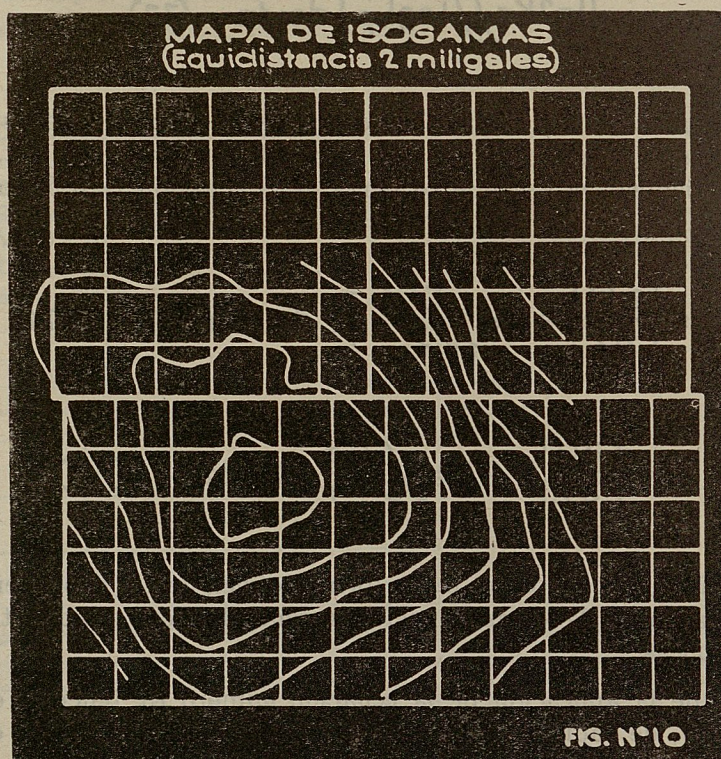
El mecanismo sensible tendrá que ser reajustado, sobre todo al cambiarlo de una región a otra por medio del mecanismo D, con el objeto de que el índice siempre se encuentre dentro de los límites de la escala.

Especificaciones generales

1. Sensibilidad: 0.1 miligales por división, calibración lineal.
2. Precisión: ± 0.03 miligales.
3. Rango o alcance, sin reajuste: 100 miligales.
4. Rango total: 6000 miligales.
5. Sensibilidad por desnivel: menos de 0.05 miligales por 60" de arco.
6. Sensibilidad a la temperatura: 2 miligales por 1° C. de variación.
7. Control de temperatura: constante dentro de un límite de 0.001° C.
8. Fuente de energía: batería de 6 volts; consumo de corriente, 3 a 5 amperes.
9. Dimensiones: un pie cúbico.
10. Peso: 23 kg.

INTERPRETACION DE LAS ANOMALIAS DE LA GRAVEDAD, DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA EXPLORACION GEOFISICA

Una exploración gravimétrica, tiene por objeto localizar estructuras geológicas o cuerpos de mineral locales cuyos contrastes en densidad respecto a las formaciones geológicas que los circundan provocan anomalías en el campo gravífico terrestre que se calculan según ya se explicó de manera general.



Una vez hecho el estudio geológico superficial con todo el detalle que sea necesario, se proyecta el geofísico siguiendo líneas convenientemente escogidas, que comprenderán una se-

rie de estaciones cuyo espaciamento dependerá del problema por resolver en cada caso. Al final se tendrán una serie de perfiles gravimétricos que servirán directamente para la interpretación o para construir cartas de isogamas o sea de líneas de igual anomalía que también sirven para la interpretación.

Es posible establecer teóricamente la ley de variación de las anomalías provocadas por masas de formas geométricas sencillas, que se semejen a los accidentes geológicos ocultos, y construir perfiles de dichas variaciones, con el objeto de que los obtenidos en el campo sean comparados con ellos y determinar las dimensiones y profundidad del accidente de que se trata. La interpretación no es sencilla, salvo en casos especiales, pues casi siempre se tienen efectos sobrepuestos de diferentes accidentes y la dificultad está en separar los distintos efectos.

Para establecer en cada caso la ecuación que da la forma teórica de la anomalía, se parte de las ecuaciones fundamentales del potencial, tomando como origen la estación de los aparatos de observación.

En este caso la expresión general del potencial de gravitación es:

$$U = K\epsilon \iiint \frac{dx dy dz}{r} \quad (72)$$

Cuando una de las dimensiones del cuerpo cuya fuerza se considere es muy grande, por ejemplo, en el sentido de las (Y), la forma general de la ecuación de U es:

$$U = 2K\epsilon \iint \text{Log}\left(\frac{1}{r}\right) dx dz \quad (73)$$

El efecto de una masa local tendrá su componente vertical que es la que miden los péndulos o gravímetros, y que será igual a la derivada de U, respecto a z, cuyas expresiones generales son las siguientes, ya sea que se parta de la ecuación 72 o de la 73:

$$U_z = \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| = K\epsilon \iiint \frac{z}{r^3} dx dy dz \quad (74)$$

$$U_z = \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| = 2K\epsilon \iint \frac{z}{r^2} dx dz \quad (75)$$

La determinación, en cada caso, de la forma teórica de U_z , dependerá de que sea posible hacer las integraciones de estas ecuaciones generales, que pueden también expresarse en coordenadas cilíndricas.

Como ejemplo de la aplicación de la ecuación número 73, tenemos el caso de una masa esférica (Fig. 11-A), de radio R y a una profundidad z . Si suponemos que el aparato (P) se desaloja en el eje de las (X), de modo que este eje sea la intersección del terreno, con la prolongación de un plano meridiano de la esfera que sea vertical, el desarrollo de la anomalía estará dado por la siguiente ecuación, cuyos valores dependerán de (x), distancia positi-

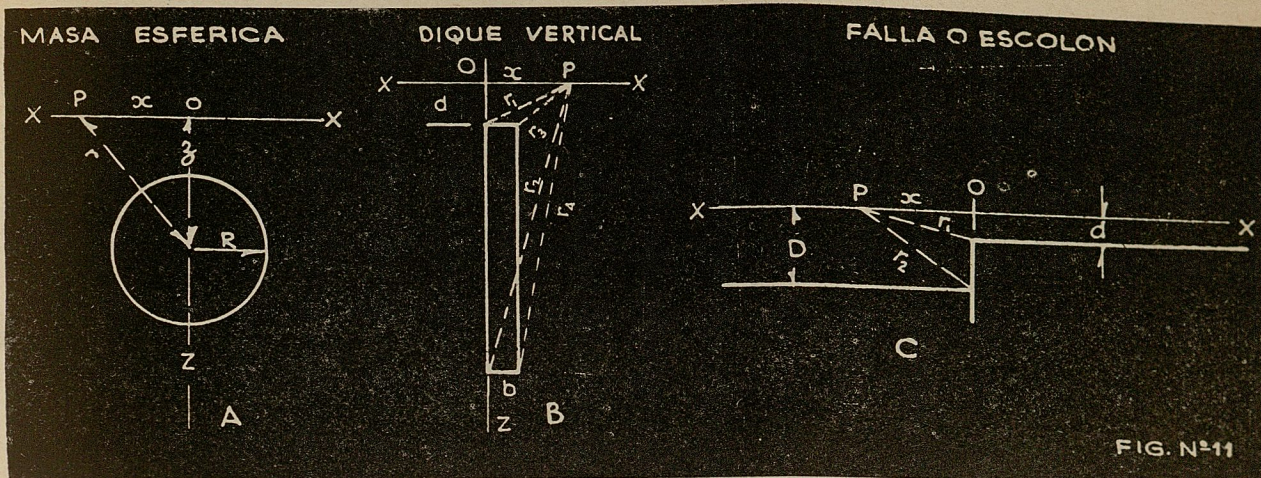


FIG. N°11

va o negativa, que se cuenta a partir del punto O, origen de coordenadas, en la vertical del centro de la esfera.

$$\Delta g = U_z = \frac{4}{3} \pi K \sigma z \frac{R^3}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \quad (76)$$

Como ejemplos de aplicación de la ecuación número 74, tenemos el caso de un dique (Fig. 11-B), y de una falla vertical (Fig. 11-C).

Suponemos el dique de dimensiones indefinidas en la dirección normal al plano de la sección y de bastante profundidad, en este caso:

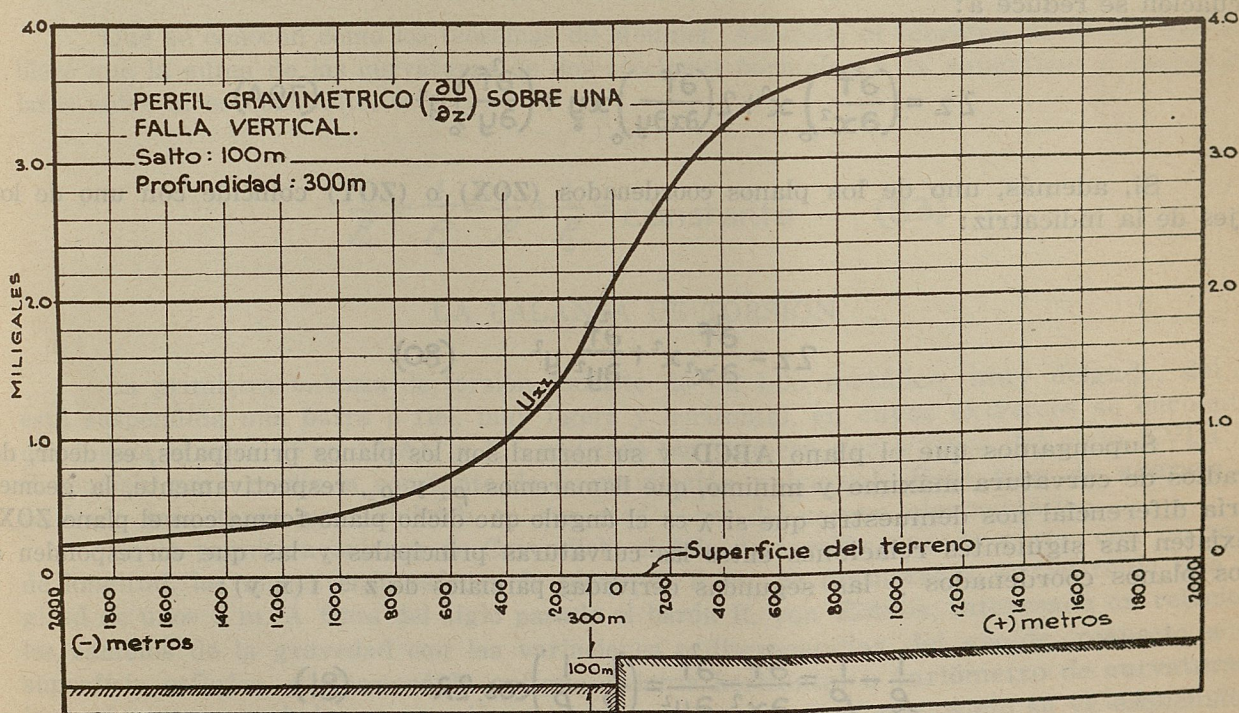


FIG. N°12

$$\Delta g = U_z = 2K\epsilon \left[x \log \frac{r_2}{r_1} + b \left(\log \frac{r_2}{r_3} + 1 \right) - d (\varphi_1 - \varphi_3) \right] \quad (77)$$

r_1 , r_3 y r_4 dependen de (x) .

Y para el escalón o falla,

$$\Delta g = U_z = 2K\epsilon \left(x \log \frac{r_2}{r_1} + D\varphi_2 - d\varphi_1 \right) \quad (78)$$

En la figura 12 se da el perfil gravimétrico que corresponde a una falla vertical de 100 m. de salto y a una profundidad de 300 m.

OBSERVACIONES GRAVIMETRICAS CON BALANZAS DE TORSION

Empezaremos por referirnos brevemente a algunos puntos relacionados con la curvatura de las superficies que después necesitaremos.

Si consideramos una superficie curva, uno de cuyos puntos como (O) (Fig 13) escogemos como origen de coordenadas, siendo el eje de las (Z) normal a la superficie en este punto, podremos expresar como sigue el valor de $z = f(xy)$, de acuerdo con la serie de Maclaurin.

$$z = f(0,0) + \frac{1}{1} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 y \right] + \frac{1}{1 \cdot 2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \right] + \dots \quad (79)$$

Si z es infinitamente pequeña, además, constante, representará la ecuación de un plano paralelo al XOY muy cercano a él y cuya intersección con la superficie determina una cónica que es la indicatriz de ella.

Se ve que por las condiciones escogidas para el origen de coordenadas, la anterior ecuación se reduce a:

$$2z = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \quad (79A)$$

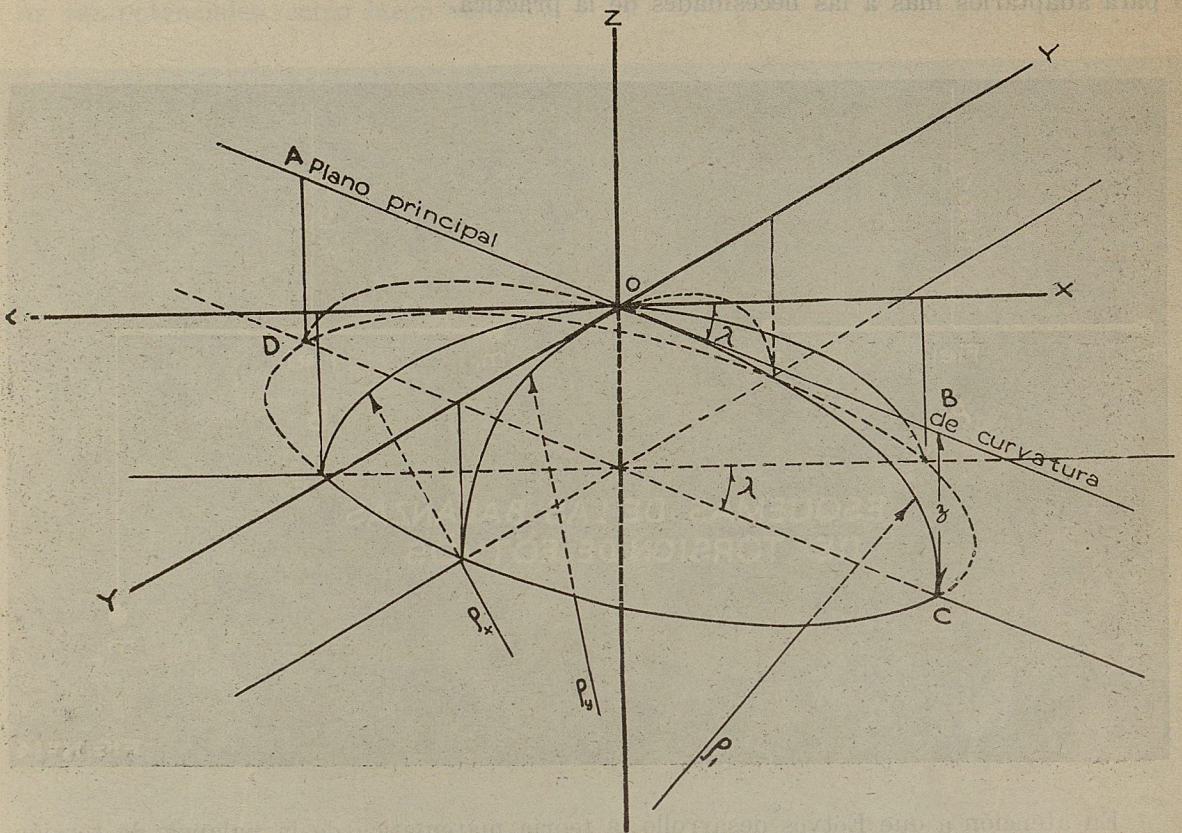
Si, además, uno de los planos coordenados (ZOX) o (ZOY) coincide con uno de los ejes de la indicatriz:

$$2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 \quad (80)$$

Supongamos que el plano ABCD y su normal son los planos principales, es decir, de radios de curvatura máximo y mínimo, que llamaremos ρ_1 y ρ_2 , respectivamente, la geometría diferencial nos demuestra que si λ es el ángulo que dicho plano forma con el plano ZOX, existen las siguientes relaciones entre las curvaturas principales y las que corresponden a los planos coordenados y las segundas derivadas parciales de $z = f(x, y)$:

$$\frac{1}{\rho_x} - \frac{1}{\rho_y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos. 2\lambda \quad (81)$$

$$\left(\frac{1}{\rho_x} - \frac{1}{\rho_y}\right) \operatorname{tg}.2\lambda = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \operatorname{tg}.2\lambda = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (82)$$



Que se conocen como los teoremas de Meunier. Además, el teorema de Euler, que establece que la suma de las curvaturas de dos secciones normales a la superficie y perpendiculares entre sí es constante, esto es:

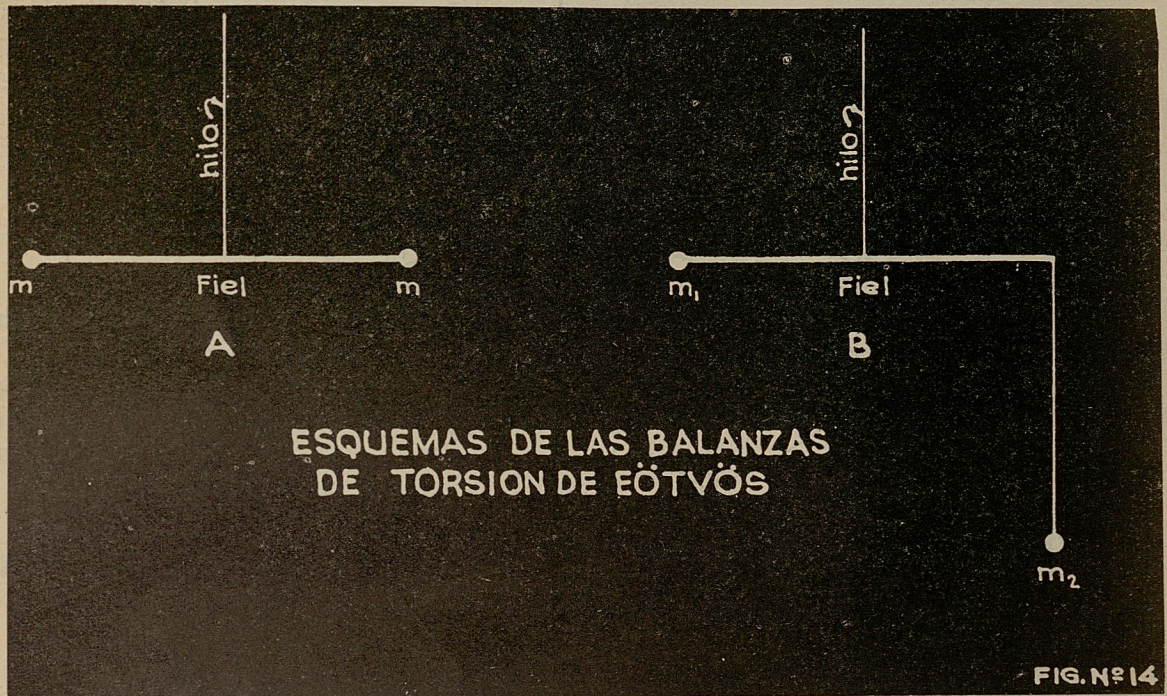
$$\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \text{constante} \quad (83)$$

LA BALANZA DE TORSION

La primitiva balanza de torsión consiste de un hilo metálico, muy delgado, del que está suspendida una barra o fiel, muy ligera y horizontal, en cuyos extremos se encuentran dos masas iguales (Fig. 14-A), y fué utilizada por primera vez a fines del siglo XVIII por Cavendish, para medir la constante de la gravitación universal. Este tipo de aparato fué utilizado más tarde por Coulomb en sus mediciones del campo electrostático.

En la primitiva balanza de Cavendish el hilo de torsión era de plata, con un metro de longitud, las masas eran esferas de plomo de 5 cm. de diámetro y el fiel tenía una longitud de unos 2 m. A fines del siglo pasado el barón R. von Eötvös, interesado en relacionar los cambios de la gravedad con las variaciones o discrepancias del geoide, respecto a una superficie esférica, perfeccionó la antigua balanza horizontal o variómetro de curvaturas, e inventó una nueva balanza o variómetro de curvatura y gradiente, como se ve esquemática-

mente en la figura 14-B, en la cual una de las masas no está en el extremo del fiel, sino que cuelga de un hilo metálico. Este aparato permite no solamente determinar las curvaturas sino también la variación de la gravedad para la unidad de distancia horizontal. Más adelante se darán algunas especificaciones de estos aparatos y las modificaciones que han sufrido para adaptarlos más a las necesidades de la práctica.



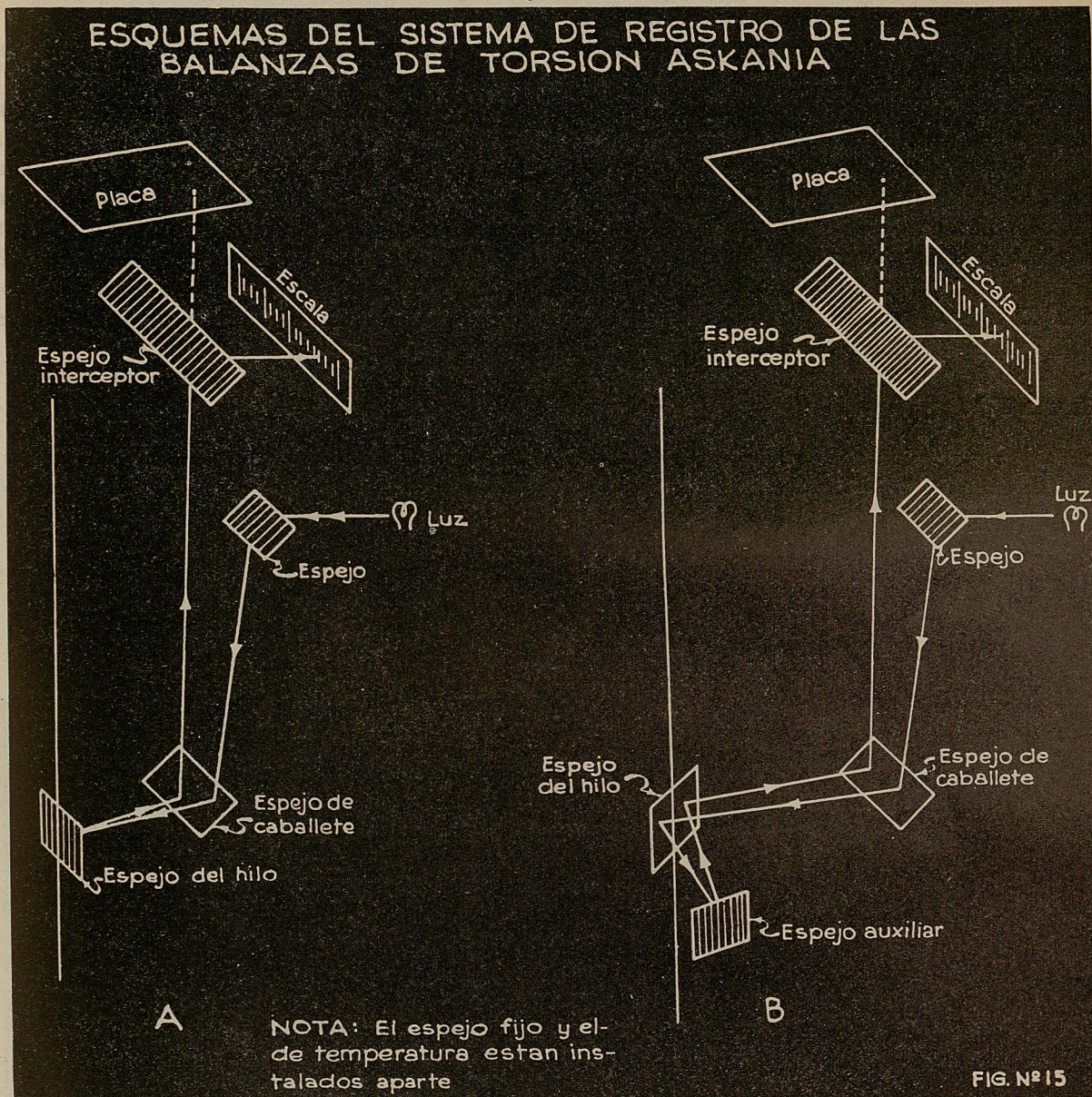
En atención a que Eötvös desarrolló la teoría matemática de la balanza de torsión se conoce dicho aparato con su nombre.

El principio en el que se basa el funcionamiento de este aparato y que se aprovecha en las medidas de la gravedad es el siguiente:

Supongamos el aparato en una región del globo en la que las equipotenciales sean rigurosamente esféricas. En este caso las líneas de fuerza de la gravedad, normales a dichas superficies en cada punto, serán radiales; no obstante, las que pasan por las dos masas y los dos brazos del fiel, quedarán en el plano vertical que contiene el hilo de suspensión y al propio fiel; la resultante de las fuerzas que obran sobre el aparato estará en el mismo plano y quedará equilibrada por la tensión del mismo hilo y no perturbará la balanza en el sentido horizontal, siendo indiferente en cualquier orientación. Si por el contrario, las equipotenciales no son esféricas, sino que se apartan de esta figura debido a la irregular distribución de masas de diferentes densidades, las líneas de fuerza de gravedad que pasan por ambas masas y el fiel, tendrán direcciones diferentes, no estarán comprendidas en un plano vertical dando una resultante que pasará por el centro de gravedad del sistema suspendido, estando equilibrada por la tensión del hilo y un par horizontal, que tenderá a mover el fiel, provocando la torsión del hilo de suspensión, hasta que el momento de torsión esté en equilibrio con el momento del par.

Si el plano vertical de la balanza e hilo coincide con uno de los dos planos principales de curvatura de la equipotencial, el aparato no sufrirá ninguna desviación debido a que las fuerzas que obran sobre el fiel, actúan entonces en el plano que contiene la línea de acción de la gravedad en el centro de la balanza y el propio fiel.

En general, no sucederá esto y la balanza se apartará de su posición neutra un cierto ángulo diferente en cada azimut que se oriente. Con estas desviaciones, con las características físicas del fiel y el coeficiente de torsión del hilo, es posible establecer ecuaciones que permiten calcular varias funciones gravimétricas, algunas de ellas relacionadas con la curvatura de las equipotenciales, como luego veremos.



Las desviaciones del fiel se registran con ayuda de un pequeño espejo metálico suspendido al hilo de torsión, que recibe un rayo luminoso, que por un sistema óptico es recibido en una escala graduada, como puede verse en la figura 15.

La posición de los puntos puede verse directamente en la escala o ser registrada en una placa fotográfica, mejora introducida por Schweydar, que permite que el aparato, una vez instalado, trabaje sin la intervención del operador.

En realidad la balanza es doble, es decir, consta de dos balanzas colocadas paralelamente dentro de la cubierta y de modo que las masas inferiores difieran 180°, lo que se hace para abreviar las observaciones.

En efecto, en las ecuaciones fundamentales aparecen 5 incógnitas y si la balanza es sencilla se necesitarían en cada estación 5 observaciones en otros tantos azimutes, para resolver el sistema. Con balanza doble serán 6 las incógnitas, por lo cual se necesitan otros tantos datos de observación, pero como en cada azimut se obtienen 2, sólo será necesario observar en 3 azimutes.

El uso de la balanza de torsión se empezó a generalizar en la Exploración Geofísica desde 1915 en Europa, en Estados Unidos en 1922 y en México en 1925.

Con algunas modificaciones, pero bajo el mismo principio, otros investigadores han dado a conocer sus balanzas de torsión, como la de H. Haalack (1924), la de Nikiforov (1927), la de Shaw y Lancaster-Jones de dos masas inferiores (1929), etc. Hay asimismo varias casas constructoras de estos aparatos como Oertling de Inglaterra y la Askania de Alemania.

En esta breve exposición daremos las especificaciones generales de las balanzas Askania que son las más conocidas. Esta casa, tratando de hacer cada vez más compactos sus aparatos, fué variando sus modelos, el primero (ver figura 16-A), es el más grande y el sistema suspendido corresponde al primeramente usado por Eötvös, es el modelo de 1921. En 1925 apareció la balanza con el fiel en forma de Z, con lo que se acortó bastante el aparato (figura 16-B). Vino todavía una simplificación más con la balanza de fieles inclinados, que apareció en 1934 (figura 16-C).

Se da una fotografía (Núm. 7) de estos aparatos y un corte de la balanza modelo Z (figura 17).

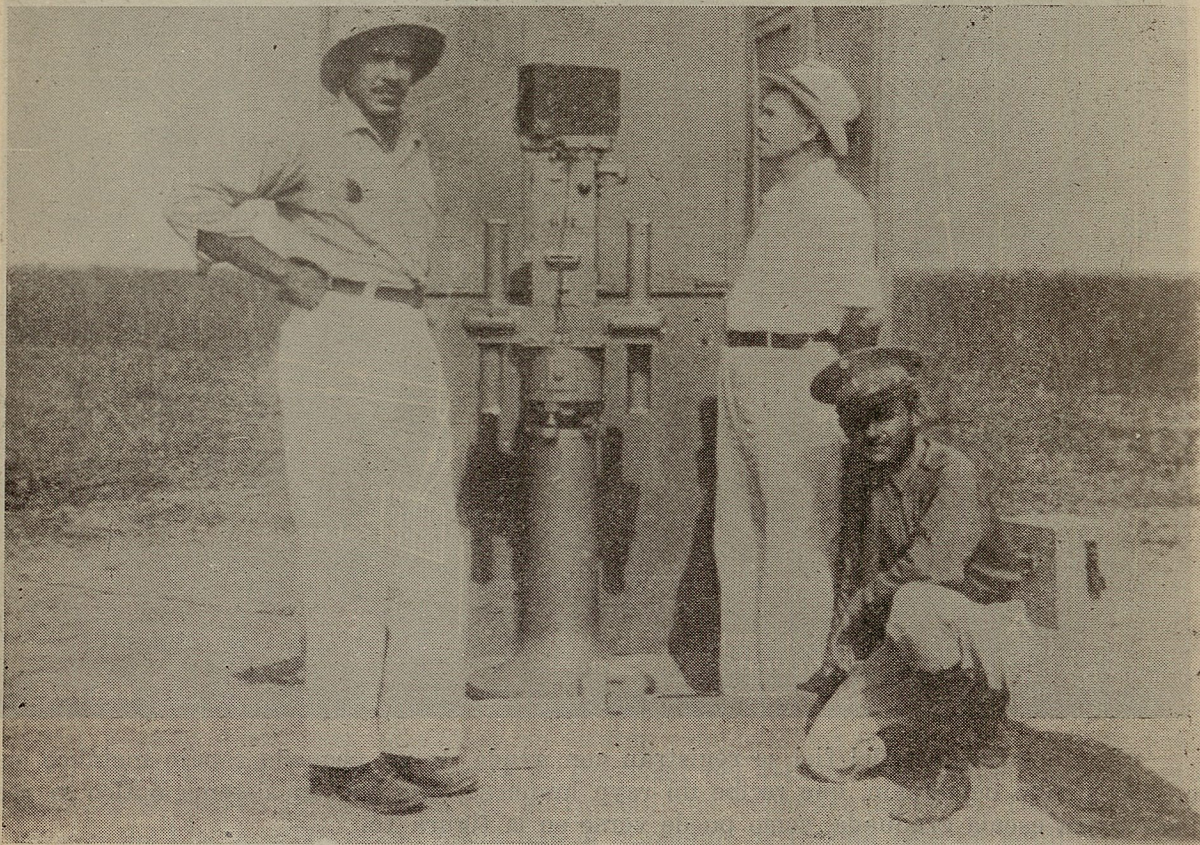
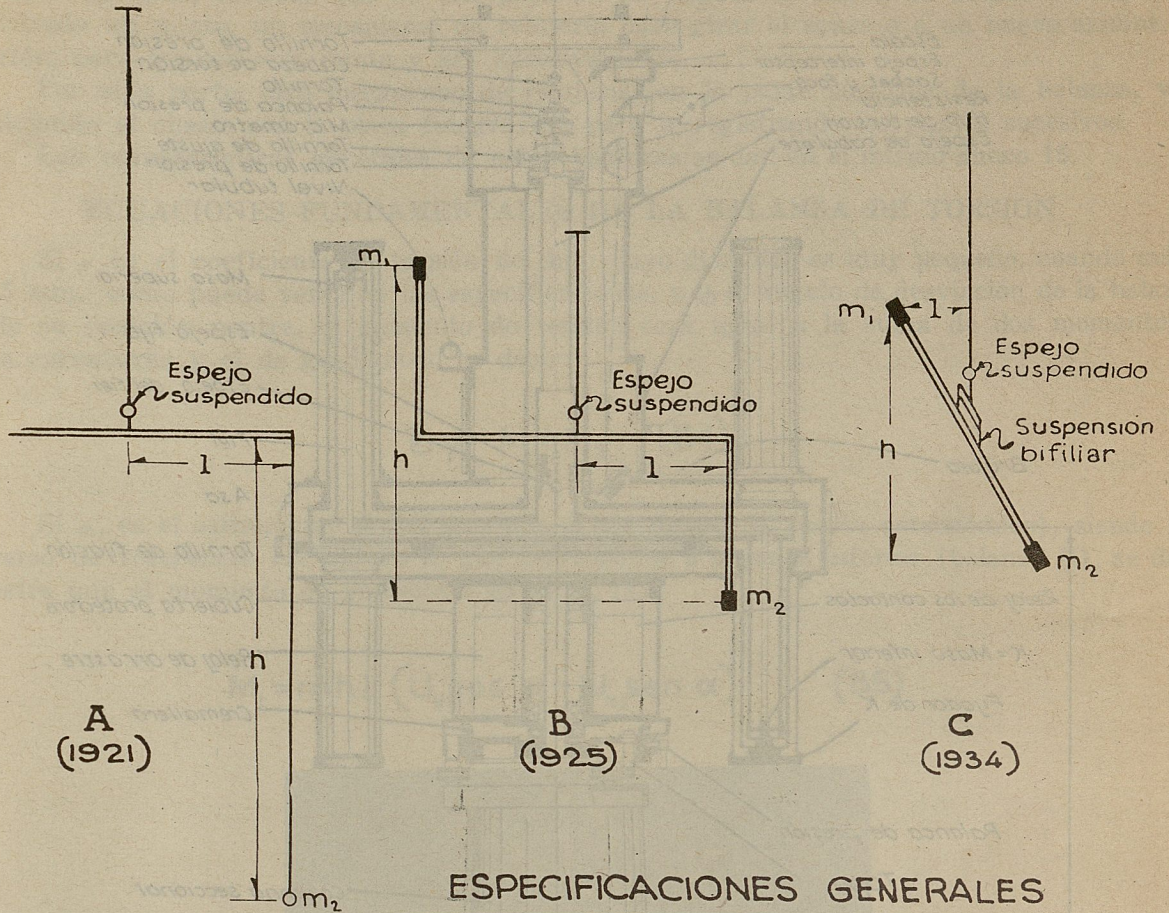


FOTO N° 7. Balanza de torsión ASKANIA, tipo Z dentro de su caseta protectora a medio desarmar.

El sistema suspendido va encerrado en una triple cubierta metálica que lo preserva de los cambios de temperatura, la humedad y el polvo, y el aparato se instala dentro de una caseta desarmable protectora. En la figura 15 se dan los esquemas de registro de estas balanzas que trabajan automáticamente mediante un reloj que hace el contacto eléctrico a in-

EVOLUCION DE LAS BALANZAS ASKANIA CON IDEAS DE SCHWEYDAR

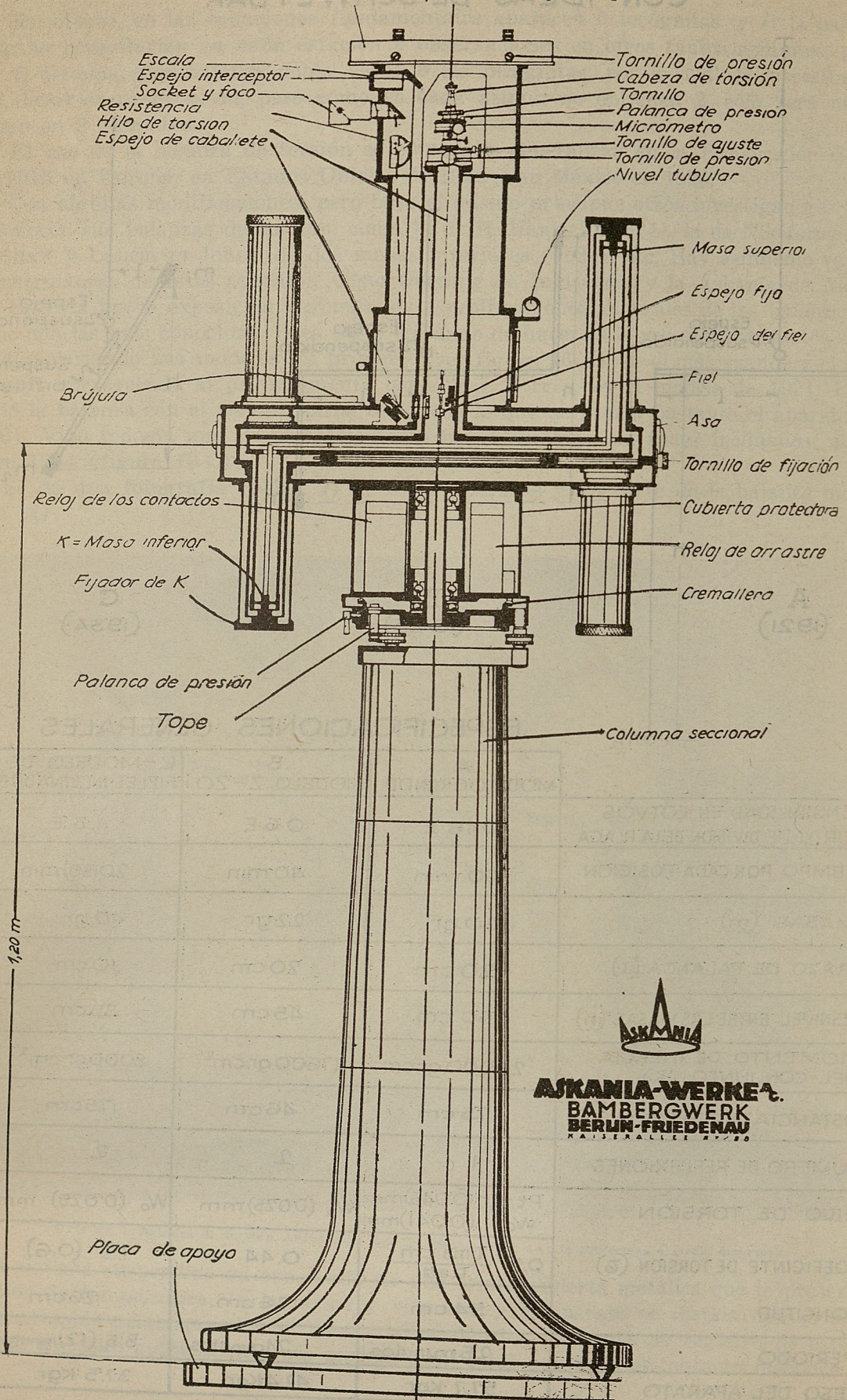


ESPECIFICACIONES GENERALES

	A MODELO GRANDE	B MODELO Z-20	C - MODELO DE FIELES INCLINADOS
SENSIBILIDAD EN EÖTVÖS POR 0.1 DE DIVISION DE LA PLACA	0.46 E	0.6 E	1.5 E
TIEMPO POR CADA POSICION	60 min	40 min	20(30) min
MASAS (m)	30 gr	22 gr	40 gr
BRAZO DE PALANCA (l)	20 cm	20 cm	10 cm
DESNIVEL ENTRE LAS MASAS (h)	60 cm	45 cm	35 cm
MOMENTO DE INERCIA DEL CONJUNTO (K)	25000 gr.cm ²	17600 gr.cm ²	8000 gr.cm ²
DISTANCIA DE REFLEXION (D)	75 cm	46 cm	75 cm
NUMERO DE REFLEXIONES	1	2	2
HILO DE TORSION	Pt-Ir (0.045) mm W ₀ (0.041) mm	W ₀ (0.025) mm	W ₀ (0.025) mm
COEFICIENTE DE TORSION (G)	0.5 $\frac{\text{Dina.cm}}{\text{Rad}}$	0.44	1.2 (0.6)
LONGITUD	54 cm	26 cm	26 cm
PERIODO	25 minutos	21 minutos	8.5 (12) minutos
PESO DEL APARATO	57.7 Kgr	47.4 Kgr.	37.5 Kgr.

FIG. N° 17

Cubierta del portaplacas y su reloj



ASKANIA-WERKE^{AG}
BAMBERGWERK
BERLIN-FRIEDENAU
KAISERALLEE 172/18

tervalos regulares, después que en una posición ha llegado el fiel a su estado de reposo. Registrado un punto, un mecanismo de relojería hace girar el aparato a un nuevo azimut o posición, para gravar otro punto y así sucesivamente.

Por otra parte, otro mecanismo de relojería en la parte superior de la balanza, va desalojando el chasis con la placa fotográfica, para ir registrando los puntos sucesivos.

Las características generales de estas balanzas se dan en el mismo anexo 16.

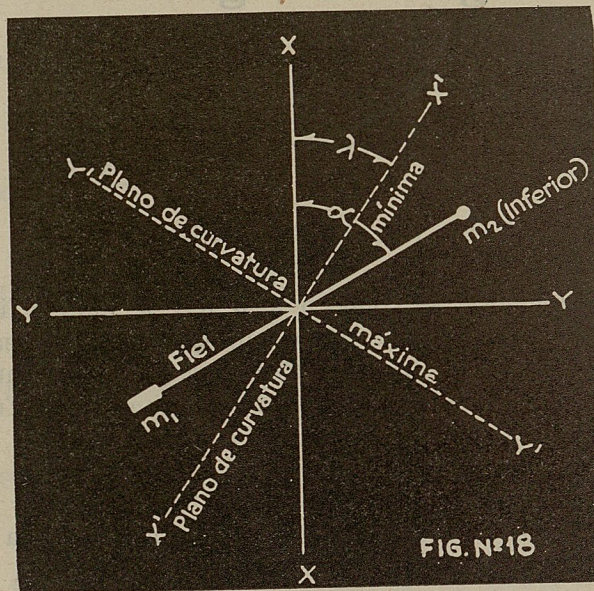
ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA BALANZA DE TORSION

Si τ es el coeficiente de torsión del hilo cuyo diámetro es muy pequeño, cuando más 0.045 mm., como puede verse en las especificaciones, y ϕ el ángulo de desviación de la balanza de su posición neutra, el momento de torsión será igual a la suma de dos momentos, el de curvaturas y el de gradientes, es decir:

$$\tau\phi = M_1 + M_2 \quad (84)$$

Si α , es el azimut que el fiel hace con el eje de las X (norte astronómico), siendo el extremo de referencia del mismo el que corresponde a la masa inferior (balanza II), se demuestra que el momento de gradientes es (Fig. 18):

$$M_1 = mh_1 (U_{yz} \cos \alpha - U_{xz} \sin \alpha) \quad (85)$$



y el de curvaturas

$$M_2 = ml^2 [(U_{yy} - U_{xx}) \sin 2\alpha + 2U_{xy} \cos 2\alpha] \quad (86)$$

m, es cada una de las masas de la balanza, 2l la longitud del fiel y h el desnivel entre las dos masas. Las segundas derivadas se han puesto con la notación convencional, como se explicó al principio de esta memoria. $2ml^2$ es el momento de inercia del sistema suspendido respecto al eje que pasa por el centro de gravedad del mismo y se acostumbra llamarle K. Como se recordará, a la diferencia $U_{yy} - U_{xx}$ se le llama convencionalmente $U \Delta$.

Expresando el ángulo (ϕ) de desvío en función de la lectura de la placa ($n - n_0$), siendo (n_0) la que correspondería a la posición neutra y llamando (f) a la distancia de reflexión, la ecuación de los momentos podemos escribirla, para 1 ó 2 reflexiones, como sigue:

$$\zeta \frac{n - n_0}{2f} = M_1 + M_2 \quad (87)$$

$$\zeta \frac{n - n_0}{4f} = M_1 + M_2 \quad (88)$$

Substituyendo los valores de M_1 y M_2 tendremos la ecuación general (balanza II).

$$n - n_0 = a(\sin 2\alpha U_\Delta + \cos 2\alpha \cdot 2U_{xy}) + b(\cos \alpha U_{yz} - \sin \alpha U_{xz}) \quad (89)$$

Para el fiel con la masa a 180° (balanza I), el factor b es negativo.

Las cantidades a y b son constantes para cada aparato y tienen por valor:

Para el modelo grande:

$$a = \frac{fK}{\zeta} \quad b = \frac{2fmh1}{\zeta} \quad (90)$$

Para el modelo Z y de fieles inclinados:

$$a = \frac{2fK}{\zeta} \quad b = \frac{4fmh1}{\zeta} \quad (91)$$

CASO DE CINCO POSICIONES

En la ecuación fundamental se conocen a , b , n y α , que se fija de antemano, se desconocen n_0 , U_Δ , $2U_{xy}$, U_{yz} , U_{xz} , así es que siendo 5 incógnitas, es necesario hacer en una misma estación otras tantas observaciones en cinco azimutes diferentes, múltiplos de 72° , a saber: 0° , 72° , 144° , 216° y 288° , procedimiento que se sigue cuando está fuera de servicio una de las balanzas, por rotura del hilo o por alguna otra causa.

Substituyendo los valores de las funciones trigonométricas de los anteriores azimutes y resolviendo el sistema de ecuaciones, se encuentran los siguientes valores para las cuatro funciones gravimétricas como sigue, que corresponden a la balanza I:

$$\begin{aligned} U_{xz} &= -\frac{0.38042}{b} (n_5 - n_2) - \frac{0.23511}{b} (n_4 - n_3) \\ U_{yz} &= -\frac{0.12361}{b} (n_5 + n_2 - 2n_1) + \frac{0.32361}{b} (n_4 + n_3 - 2n_1) \\ U_\Delta &= -\frac{0.23511}{a} (n_5 - n_2) + \frac{0.38042}{a} (n_4 - n_3) \\ 2U_{xy} &= -\frac{0.32361}{a} (n_5 + n_2 - 2n_1) + \frac{0.12361}{a} (n_4 + n_3 - 2n_1) \end{aligned} \quad (92)$$

Estas ecuaciones se refieren a la balanza I, para la número II se cambiarán los signos de U_{xz} y U_{yz} .

Se pueden transformar las anteriores ecuaciones substituyendo las lecturas por las diferencias:

Balanza I

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= n_1 - n_0 \\ \Delta_2 &= n_2 - n_0 \\ \Delta_3 &= n_3 - n_0 \\ \Delta_4 &= n_4 - n_0 \\ \Delta_5 &= n_5 - n_0 \end{aligned}$$

$$5n_0 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

Balanza II

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= n'_1 - n'_0 \\ \Delta'_2 &= n'_2 - n'_0 \\ \Delta'_3 &= n'_3 - n'_0 \\ \Delta'_4 &= n'_4 - n'_0 \\ \Delta'_5 &= n'_5 - n'_0 \end{aligned}$$

$$5n'_0 = n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4 + n'_5$$

(93)

Caso de cuatro posiciones, comenzando en 45°

Si una de las balanzas está fuera de servicio, pueden hacerse observaciones en 4 posiciones con la que se cuente, en estas circunstancias sólo podrán calcularse los gradientes U_{xz} , U_{yz} .

Las ecuaciones para una y otra balanza son:

Balanza I $U_{xz} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{1.414b} = -\frac{\Delta_3 + \Delta_4}{1.414b}$

$$U_{yz} = \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{1.414b} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_4}{1.414b}$$

Balanza II $U_{xz} = \frac{\Delta'_3 + \Delta'_4}{1.414b'} = -\frac{\Delta'_1 + \Delta'_2}{1.414b'}$

$$U_{yz} = \frac{\Delta'_1 + \Delta'_4}{1.414b'} = -\frac{\Delta'_2 + \Delta'_3}{1.414b'}$$

(94)

En las cuales

$$\Delta_1 = n_1 - n_0$$

$$\Delta_2 = n_2 - n_0$$

$$\Delta_3 = n_3 - n_0$$

$$\Delta_4 = n_4 - n_0$$

$$4n_0 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

$$\Delta'_1 = n'_1 - n'_0$$

$$\Delta'_2 = n'_2 - n'_0$$

$$\Delta'_3 = n'_3 - n'_0$$

$$\Delta'_4 = n'_4 - n'_0$$

$$4n'_0 = n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4$$

n_1 y n'_1 para 45°

n_2 y n'_2 para 135

n_3 y n'_3 para 225

n_4 y n'_4 para 315

(95)

Caso de cuatro posiciones, comenzando en 0°

Si se comienza con la primera posición en el norte astronómico 0°, entonces las ecuaciones anteriores para U_{xz} y U_{yz} se simplifican mucho:

Balanza I

$$U_{xz} = -\frac{n_4 - n_2}{2b}$$

$$U_{yz} = \frac{n_3 - n_1}{2b}$$

Balanza II

$$U_{xz} = \frac{n'_4 - n'_2}{2b'} \quad (96)$$

$$U_{yz} = -\frac{n'_3 - n'_1}{2b'}$$

Caso de tres posiciones, comenzando en 0°

Contando con las dos balanzas, es preferible hacer las observaciones en tres posiciones, que es como se hace generalmente, pues se ahorra tiempo, habiendo suficientes datos para calcular las 6 cantidades desconocidas, o sea: U_{xz} , U_{yz} , U_{Δ} , $2U_{xy}$, n_0 y n'_0 .

Para la balanza I los azimutes son 0°, 120° y 240°, para la II difieren 180°, es decir, 180°, 300° y 60°.

Las ecuaciones finales son:

$$U_{xz} = \frac{a'}{\sqrt{3}(a'b + ab')} \left[\Delta_2 - \Delta_3 - (\Delta'_2 - \Delta'_3) - \left(\frac{a}{a'} - 1 \right) (\Delta'_2 - \Delta'_3) \right] \quad (97)$$

$$U_{yz} = \frac{a'}{a'b + ab'} \left[\Delta_2 + \Delta_3 - (\Delta'_2 + \Delta'_3) - \left(\frac{a}{a'} - 1 \right) (\Delta'_2 + \Delta'_3) \right] \quad (98)$$

$$U_{\Delta} = \frac{-b'}{\sqrt{3}(a'b + ab')} \left[\Delta_2 - \Delta_3 + (\Delta'_2 - \Delta'_3) + \left(\frac{b}{b'} - 1 \right) (\Delta'_2 - \Delta'_3) \right] \quad (99)$$

$$2U_{xy} = \frac{-b'}{a'b + ab'} \left[\Delta_2 + \Delta_3 + (\Delta'_2 + \Delta'_3) + \left(\frac{b}{b'} - 1 \right) (\Delta'_2 + \Delta'_3) \right] \quad (100)$$

$$\Delta_1 = n_1 - n_0$$

$$\Delta_2 = n_2 - n_0$$

$$\Delta_3 = n_3 - n_0$$

$$3n_0 = n_1 + n_2 + n_3$$

$$\Delta'_1 = n'_1 - n'_0$$

$$\Delta'_2 = n'_2 - n'_0$$

$$\Delta'_3 = n'_3 - n'_0$$

$$3n'_0 = n'_1 + n'_2 + n'_3$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0$$

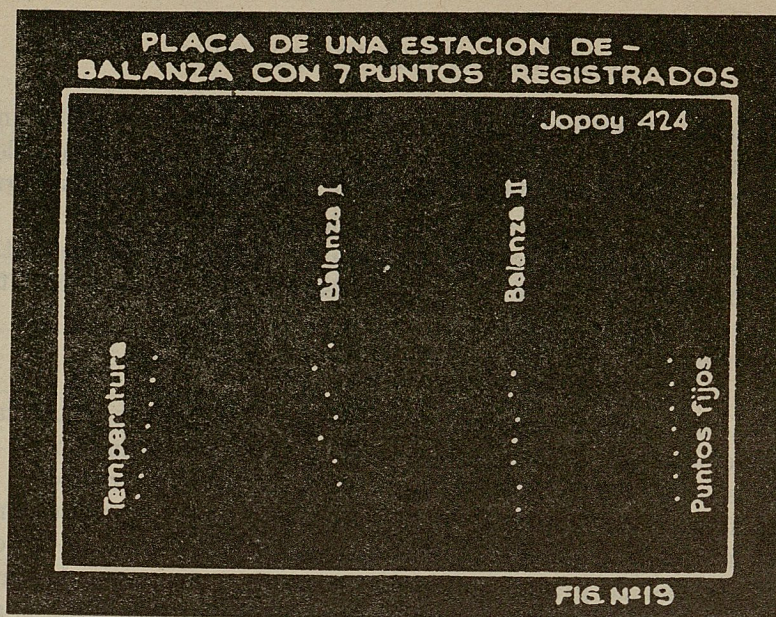
$$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = 0$$

(101)

Como generalmente a difiere poco de a' y b de b' , los últimos términos de los paréntesis se desprecian.

La figura 19 es la reproducción de una placa de una estación para tres azimutes. En este caso la serie se repitió 2 veces, más el registro de otro punto en la primera posición, o sea al norte astronómico, en total 7 puntos.

Por otra parte, se demuestra que las segundas derivadas del potencial gravífico (U) que se determina como se indicó brevemente, están ligadas por las siguientes relaciones con



los radios de curvaturas principales de las equipotenciales, el valor de la gravedad y el azimut (λ) que hace la sección de curvatura mínima X_1X_1 , con el eje de las X (Fig. 18):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (102)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos 2\lambda \quad (103)$$

es decir, con la notación abreviada:

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos 2\lambda = -\frac{1}{g} (U_{y_1 y_1} - U_{x_1 x_1}) \cos 2\lambda \quad (104)$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos 2\lambda = -\frac{1}{g} (U_{yy} - U_{xx}) = -\frac{U_{\Delta}}{g} \quad (105)$$

y también:

$$\tan 2\lambda = \frac{-2U_{xy}}{U_{\Delta}} \quad (106)$$

Estas ecuaciones se identifican con las números 81 y 82, que mencionamos al referirnos a la curvatura de las superficies, con lo que se ve que la balanza de torsión nos proporciona la manera de determinar la curvatura de la superficie del geode.

Por ello en los trabajos de gravimetría se llama a las magnitudes $2U_{xy}$ y U_{Δ} , simplemente curvaturas; a las cantidades U_{xz} , U_{yz} gradientes.

CORRECCIONES A LOS VALORES DETERMINADOS CON BALANZAS DE TORSION

Los valores de las funciones gravimétricas obtenidas con las balanzas son valores totales, es decir, corresponden a los efectos combinados y sumados, del globo terrestre; de las masas locales que en la superficie circundan la estación (efecto topográfico) así como de las lejanas (efecto cartográfico) y las masas locales subterráneas, de densidades anormales. En la exploración geofísica lo que interesa es el efecto de estas últimas, por lo cual al valor observado habrá que restar los otros efectos, es decir, aplicar tres correcciones que son:

1. Corrección normal o planetaria, en gradiente y curvatura.
2. Corrección topográfica o local.
3. Corrección cartográfica, o lejana, debida a relieves de importancia, regionales.

En determinaciones de valores relativos de g o de la desviación de la vertical, como se explica al final de esta memoria, no se aplicará la primera corrección.

Siendo la balanza de torsión tan sensible al efecto de las masas (entre 0.4 y 1.5×10^{-9} C. G. S.), como norma general siempre se procura que las regiones en las que se opere sean más bien llanas y alejadas de grandes relieves, o cuando menos, que las irregularidades del terreno no sean grandes, para evitar fuertes correcciones topográficas y aun la corrección cartográfica.

1-A. CORRECCION NORMAL EN GRADIENTE

Hemos visto que la variación de (g) con la latitud al nivel del elipsoide ideal puede representarse por una ecuación de la forma general.

$$g_{\varphi} = g_0 (1 + B \operatorname{sen}^2 \varphi - C \operatorname{sen}^2 2\varphi) \quad (107)$$

No habiendo variación en la dirección E. W., sino sólo hacia el norte o hacia el sur, o sea en el eje de las X (tomando como origen de coordenadas la estación), el gradiente en ese sentido será en valor absoluto y con suficiente aproximación partiendo de la ecuación 107:

$$\frac{\partial g_{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial g_{\varphi}}{\partial \varphi} \frac{1}{R} = \frac{g_0 A \operatorname{sen} 2\varphi}{R} \quad (108)$$

siendo R el radio medio de la tierra en el meridiano o bien:

$$U_{xz}(\text{normal}) = \frac{\partial g_{\varphi}}{\partial x} (\text{Normal}) = \pm 8.122 \operatorname{sen} 2\varphi \text{ Eötvös} \quad (109)$$

(+) en el hemisferio norte, (—) en el sur.

1-B. CORRECCION NORMAL EN CURVATURA

En el caso del elipsoide ideal, los planos de curvatura principales son la elipse meridiana y el primer vertical, entonces la curvatura normal será la siguiente de acuerdo con la ecuación número 103, puesto que el azimut $\lambda = 0$:

$$U_{\Delta} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -g \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (110)$$

VARIACION DEL GRADIENTE Y CURVATURA NORMALES
Y DE LA GRAVEDAD TEORICA CON LA LATITUD ~

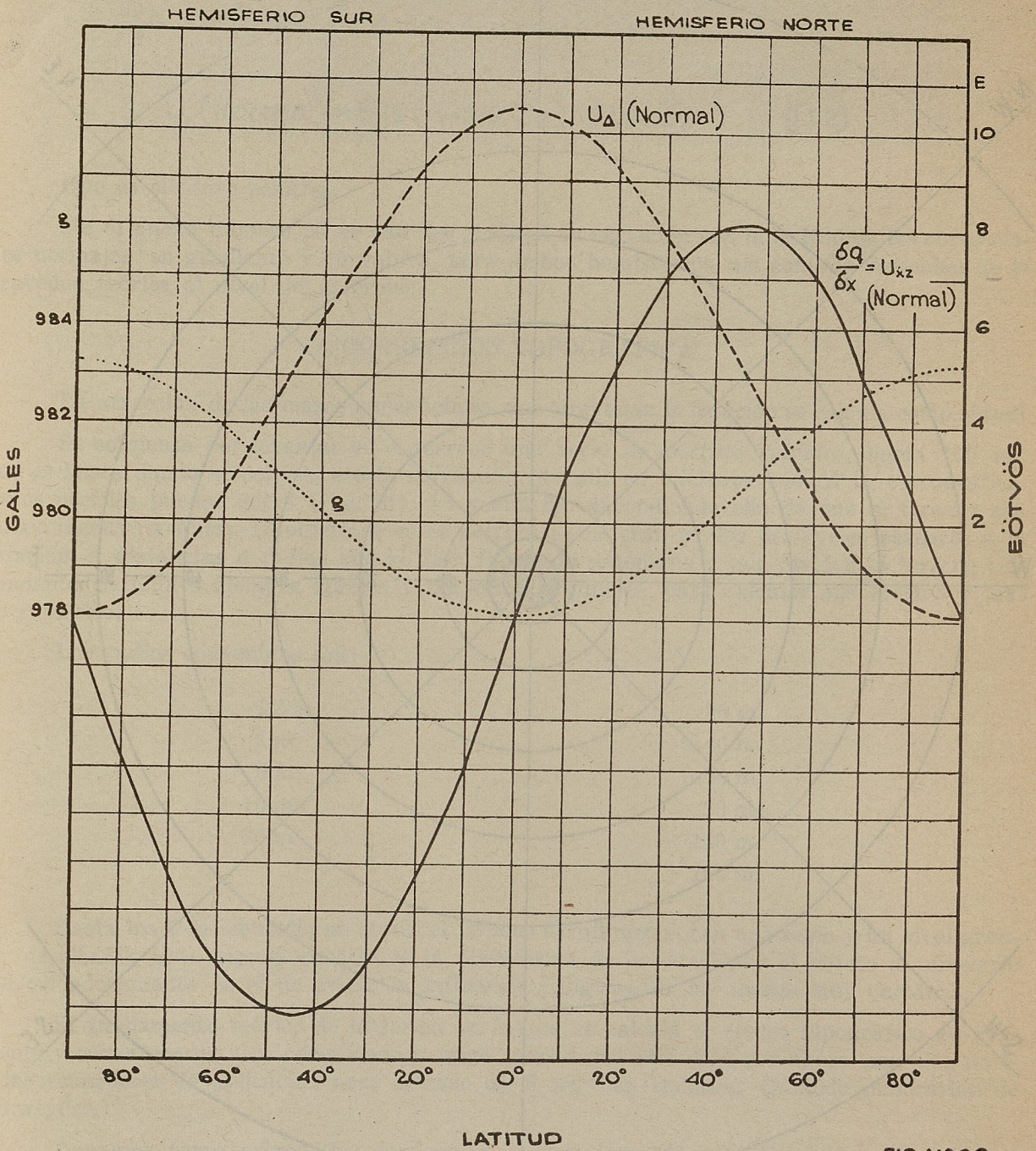


FIG. N° 20

DIVISION DEL TERRENO PARA APLICAR LA CORRECCION TUPOGRAFICA EN OBSERVACION CON BALANZAS DE TORSION

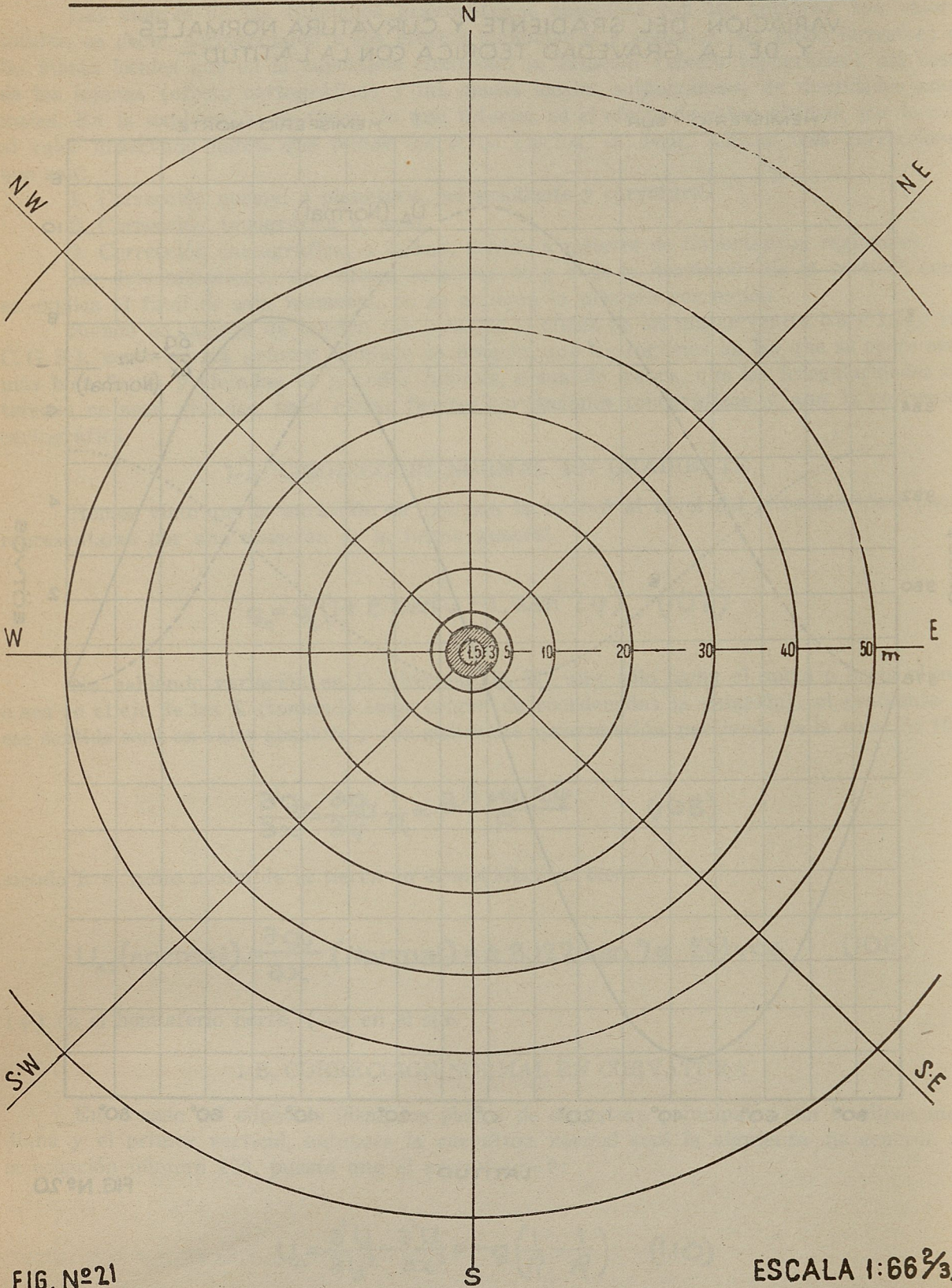


FIG. N°21

ESCALA 1:66²/₃

Poniendo en esta ecuación los valores de los radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 de la elipse meridiana y del primer vertical, en función de la latitud y de los elementos del elipsoide y después de varias simplificaciones se llega a la ecuación:

$$U_{\Delta} = \frac{g}{a} e (1 + \cos 2\varphi) \quad (111)$$

$e = \frac{a-c}{a}$ la elipticidad y a el radio ecuatorial, o bien:

$$U_{\Delta}(\text{Normal}) = 5.15 (1 + \cos 2\varphi), \text{ Eötvös} \quad (112)$$

Que es siempre positiva.

En el anexo número 20 se dan las gráficas de variación con la latitud de las correcciones normales en gradiente y curvatura, para ambos hemisferios, así como la variación de la gravedad teórica al nivel del esferoide.

2. CORRECCION TOPOGRAFICA

La atracción de las masas superficiales que circundan la estación se calcula como sigue:

Se comienza por levantar en el terreno una serie de perfiles radiales, hasta 150 m., que es hasta donde se considera esta corrección, de allí en adelante vendrá la cartográfica. Estos perfiles pueden ser 8 (Fig. 21), 16 y aun 32, dependiendo ello de que el terreno sea más o menos irregular. El objeto de estos perfiles es determinar los desniveles respecto a la estación, a distancias o radios que se han fijado de antemano y que dividen el terreno circundante en anillos siempre iguales y trapecios circulares para calcular sus efectos y luego sumarlos.

Los radios convenidos son:

1.5 m.	30 m.
3 m.	40 m.
5 m.	50 m.
10 m.	70 m.
20 m.	100 m.
	150 m.

Hasta los 3 m. de radio se nivela el terreno al milímetro, con una regla y un nivel grande de albañil. Este círculo constituye la plataforma de la estación y el objeto de nivelarlo tan cuidadosamente es el de evitar la influencia peligrosa de las masas muy cercanas.

El fundamento teórico de la forma en la que se calcula el efecto topográfico en gradiente y curvatura es algo complicado y largo, por lo que sólo daré por ahora una idea de él y las ecuaciones de aplicación para el caso de 8 perfiles radiales. (Método cuadrático de Schweydar.)

Tomemos como origen de coordenadas la estación (0') sobre la cual está el centro de gravedad de la balanza a una altura (h). (Fig. 22-A.) Si dm es una masa elemental de coordenadas (xyz) y a una distancia (r) de (0), la forma general de sus efectos respecto a (0) será tomando tanto coordenadas cartesianas como cilíndricas:

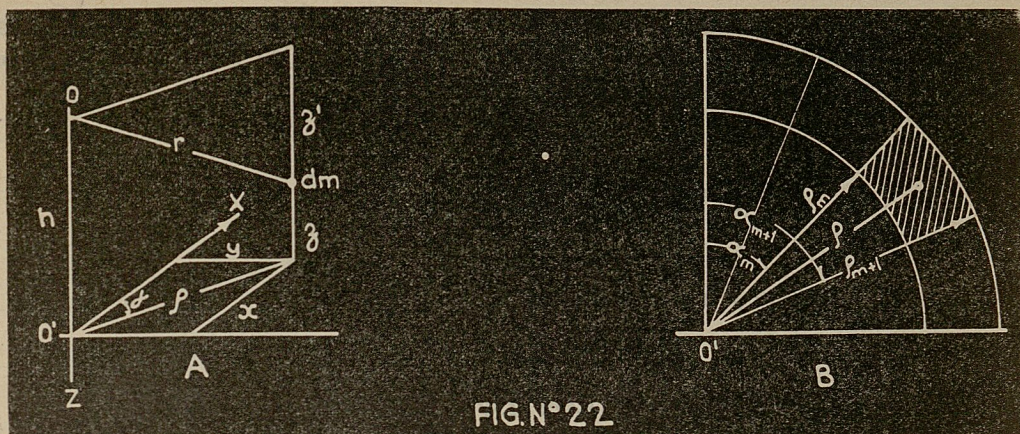


FIG. N° 22

$$U_{xz} = 3K \int \frac{x(h-z) dm}{r^5} = 3K \int \frac{\rho \cos \alpha (h-z) dm}{[\rho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \quad (113)$$

$$U_{yz} = 3K \int \frac{y(h-z) dm}{r^5} = 3K \int \frac{\rho \sin \alpha (h-z) dm}{[\rho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \quad (114)$$

$$U_{\Delta} = 3K \int \frac{(y^2 - x^2) dm}{r^5} = -3K \int \frac{\rho^2 \cos 2\alpha dm}{[\rho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \quad (115)$$

$$2U_{xy} = 6K \int \frac{xy dm}{[\rho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} = 3K \int \frac{\rho^2 \sin 2\alpha dm}{[\rho^2 + (h-z)^2]^{5/2}} \quad (116)$$

Para poder hacer estas integraciones es necesario dividir el terreno en masas elementales de planta en forma de trapecio circular, comprendidas entre dos radios ρ_m y ρ_{m+1} (Fig. 22-B) bajo un ángulo $(\alpha_{m+1} - \alpha_m)$ que dependerá del número de direcciones que se escojan, es decir, $\frac{360^\circ}{8}$, $\frac{360^\circ}{16}$ ó $\frac{360^\circ}{32}$, radios que como queda dicho, se fijan de antemano, pero además necesitaremos conocer la ley de variación de los desniveles (z) con respecto a los radios (ρ) y los azimutes (α). Como la configuración del terreno puede variar mucho, el problema es difícil de resolver para establecer normas generales que puedan aplicarse en cualquier caso. Para resolver el problema se considera a los desniveles (z) una función del azimut representado por la serie de Fourier.

$$z = F(\alpha, \rho, \text{constante}) = a + b \sin \alpha + C \cos \alpha + d \sin 2\alpha + e \cos 2\alpha + f \sin 3\alpha + g \cos 3\alpha + \dots \quad (117)$$

y además, que entre cada dos radios de rangos (m) y ($m+1$) y el radio medio ρ se tenga la proporción:

$$\frac{z_{m+1} - z_m}{\rho_{m+1} - \rho_m} = \frac{z_\rho - z_m}{\rho - \rho_m} \quad (118)$$

Haciendo las substituciones respectivas en las ecuaciones y los desarrollos matemáticos, se llega finalmente a expresiones que sólo dependen de los radios (ρ), que se fijan de antemano, de la altura (h) del centro de gravedad de la balanza y de los coeficientes de las series de Fourier, siendo suficiente tomar hasta las primeras armónicas y correspondiendo b y c para los gradientes U_{yz} y U_{xz} , respectivamente y los d y e para las curvaturas $2U_{xy}$ y U_{Δ} , coeficientes que se calculan en función de los desniveles de cada radio para los diversos azimutes.

Por ejemplo, para el caso de 8 azimutes las ecuaciones son:

$$C = 0.250 [H_1^2 - H_5^2 + 0.707 (H_2^2 - H_4^2 - H_6^2 + H_8^2)] \quad (119)$$

$$B = 0.250 [H_3^2 - H_7^2 + 0.707 (H_2^2 + H_4^2 - H_6^2 - H_8^2)] \quad (120)$$

$$e = 0.250 (H_1 - H_3 + H_5 - H_7) \quad (121)$$

$$d = 0.250 (H_2 - H_4 + H_6 - H_8) \quad (122)$$

Para 16 azimutes

$$\begin{aligned} C &= 0.125 [H_1^2 - H_9^2 + 0.924 (H_2^2 - H_8^2 - H_{10}^2 + H_{16}^2) + 0.707 (H_3^2 - H_7^2 - H_{11}^2 + H_{15}^2) + 0.383 (H_4^2 - H_6^2 - H_{12}^2 + H_{14}^2)] \\ B &= 0.125 [H_5^2 - H_{13}^2 + 0.924 (H_4^2 + H_6^2 - H_{12}^2 - H_{14}^2) + 0.707 (H_3^2 + H_7^2 - H_{11}^2 - H_{15}^2) + 0.383 (H_2^2 + H_8^2 - H_{10}^2 - H_{16}^2)] \\ e &= 0.125 [H_1 - H_5 + H_9 - H_{13} + 0.707 (H_2 - H_4 - H_6 + H_8 + H_{10} - H_{12} - H_{14} + H_{16})] \\ d &= 0.125 [H_3 - H_7 + H_{11} - H_{15} + 0.707 (H_2 + H_4 - H_6 - H_8 + H_{10} + H_{12} - H_{14} - H_{16})] \end{aligned} \quad (123)$$

$H^2 = z^2 - 2hz$, para C y B ; $H = z - h$, para e y d .

Habrá otro grupo más para 32 azimutes, con otros términos y un factor constante de 0.063.

Las ecuaciones de aplicación equivalentes a las números 113, 114, 115 y 116, cuando el centro de gravedad de la balanza es de 100 cm., son respectivamente, las siguientes:

$$U_{xz} = -\frac{g}{2} (138.28C_1 + 12.25C_2 + 17.64C_3 + 3.035C_4 + 1.450C_5 + 0.031C_6 + 0.1404C_7 + 0.0399C_8 + 0.0592C_9 + 0.0152C_{10} + 0.0167C_{11} + \dots) \text{ Eötvös} \quad (124)$$

$$U_{yz} = -\frac{g}{2} (138.28B_1 + 12.25B_2 + 17.64B_3 + 3.035B_4 + 1.450B_5 + \dots \text{etc.}) \quad (125)$$

$$U_{\Delta} = -\frac{g}{2} (1.970e_1 + 1.633e_2 + 1.267e_3 + 0.827e_4 + 0.354e_5 + 0.147e_6 + 0.0805e_7 + 0.0685e_8 + 0.0615e_9 + 0.0596e_{10} + \dots) \quad (126)$$

$$2U_{xy} + \frac{\sigma}{2} (1.970d_1 + 1.633d_2 + 1.267d_3 + 0.827d_4 + 0.354d_5 + \dots) \quad (127)$$

Si $h = 90$ cm:

$$U_{xz} = -\frac{\sigma}{2} (172.9C_1 + 11.64C_2 + 17.92C_3 + 3.020C_4 + 1.454C_5 + 0.031C_6 + 0.1404C_7 + 0.0399C_8 + 0.0592C_9 + 0.0152C_{10} + 0.01671C_{11} + \dots)$$

$$U_{yz} = -\frac{\sigma}{2} (172.9B_1 + 11.64B_2 + 17.92B_3 + 3.020B_4 + 1.454B_5 + \text{etc.}) \quad (128)$$

$$U_{\Delta} = -\frac{\sigma}{2} (3.302e_1 + 1.962e_2 + 1.343e_3 + 0.844e_4 + 0.357e_5 + 0.147e_6 + 0.0805e_7 + 0.0686e_8 + 0.0616e_9 + 0.0472e_{10} + 0.0375e_{11} + \dots)$$

$$2U_{xy} = +\frac{\sigma}{2} (3.302d_1 + 1.962d_2 + 1.343d_3 + 0.844d_4 + 0.357d_5 + \text{etc.} \dots)$$

Los coeficientes $(C_1 - C_2 - C_3)$, $(B_1 - B_2 - B_3)$, $(e_1 - e_2 - e_3)$, $(d_1 - d_2 - d_3)$, dan la influencia relativa de cada círculo. El análisis de este problema se debe a Schweydar.

Para cada altura (h) del centro de gravedad de la balanza según sea el modelo, los coeficientes numéricos de las ecuaciones anteriores serán diferentes. También cambiará el grupo de la 119 a la 123 y las correspondientes para 32 azimutes, supuesto que H depende de h .

Si se tuviese que hacer cada vez el cálculo separadamente de los coeficientes de las series de Fourier (ecuaciones 119 a la 123), y luego los productos por los factores de las ecuaciones que dan las correcciones (124 a 128), el trabajo sería dilatado y laborioso. Esto se evita como sigue. Por ejemplo, tomemos el caso de U_{xz} ecuación 124, deberíamos calcular círculo por círculo los coeficientes $C_1 C_2 \dots$ con la ecuación 119, y luego hacer los productos respectivos por los coeficientes numéricos 138.28, 12.25, etc. Pongamos simbólicamente:

$$U_{xz} = -\frac{\sigma}{2} (F_1 C_1 + F_2 C_2 + F_3 C_3 + \dots) \quad (129)$$

Tendríamos para los círculos sucesivos:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0.250 [H_{11}^2 - H_{15}^2 + 0.707(H_{12}^2 - H_{14}^2 - H_{16}^2 + H_{18}^2)] \\ C_2 &= 0.250 [H_{21}^2 - H_{25}^2 + 0.707(H_{22}^2 - H_{24}^2 - H_{26}^2 + H_{28}^2)] \\ C_3 &= 0.250 [H_{31}^2 - H_{35}^2 + 0.707(H_{32}^2 - H_{34}^2 - H_{36}^2 + H_{38}^2)] \\ &\dots \dots \dots \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

La primera cifra del subíndice de cada H representa el número del círculo a que corresponde y la segunda al azimut, es decir, 1 a 0° , 5 a 180° , y así sucesivamente.

Se ve que una columna vertical como la primera de H_{11} , H_{21} , H_{31} , etc., pertenece al azimut 0° , es decir, corresponden a un mismo perfil radial, como se toman los desniveles

(z) en el terreno, es decir, el valor de z en la ecuación $H^2 = z^2 - 2hz$, por lo tanto, es cómo hacer las sumas de los productos:

$$\left. \begin{array}{l} F_1 H_{11}^2, F_2 H_{21}^2, F_3 H_{31}^2 \\ F_1 H_{15}^2, F_2 H_{25}^2, F_3 H_{35}^2 \dots \dots \dots \text{etc} \end{array} \right\} (131)$$

Lo que se facilita construyendo una regla en la que se pongan sucesivamente los productos de los coeficientes numéricos $F_1 - F_2 - F_3 \dots \dots \dots$ por el binomio $(z^2 - 2hz)$. Para cada valor de h (90, 100 ó 120 cm., normalmente) se calculará una regla de gradientes y otra de curvaturas. La primera servirá para las dos componentes U_{xz} y U_{yz} , por ser los mismos factores numéricos y por igual razón la de curvaturas servirá para U_{Δ} y $2U_{xy}$. Con esta regla el cálculo del efecto local o topográfico casi se hace mecánicamente. Al final se tendrán las sumas sucesivas:

$$\left. \begin{array}{l} F_1 H_{11}^2 + F_2 H_{21}^2 + F_3 H_{31}^2 + \dots = \Sigma F H_1^2 \quad \text{Azimutes } 0^\circ \\ F_1 H_{15}^2 + F_2 H_{25}^2 + F_3 H_{35}^2 + \dots = \Sigma F H_5^2 \quad 180^\circ \\ \dots \dots \dots \\ F_1 H_{18}^2 + F_2 H_{28}^2 + F_3 H_{38}^2 + \dots = \Sigma F H_8^2 \quad 315^\circ \end{array} \right\} (132)$$

o finalmente, teniendo en cuenta que 0.250 es un factor común,

$$U_{xz} = -\frac{\sigma}{8} [\Sigma F H_1^2 - \Sigma F H_5^2 + 0.707 (\Sigma F H_2^2 - \Sigma F H_4^2 - \Sigma F H_6^2 + \Sigma F H_8^2)] \quad (133)$$

$$U_{yz} = -\frac{\sigma}{8} [\Sigma F H_3^2 - \Sigma F H_7^2 + 0.707 (\Sigma F H_2^2 + \Sigma F H_4^2 - \Sigma F H_6^2 - \Sigma F H_8^2)] \quad (134)$$

$$U_{\Delta} = -\frac{\sigma}{8} [\Sigma F' H_1 - \Sigma F' H_3 + \Sigma F' H_5 - \Sigma F' H_7] \quad (135)$$

Las que se calculan con ayuda de esqueletos especiales. Se llegará a fórmulas seme-

$$2U_{xy} = +\frac{\sigma}{8} [\Sigma F' H_2 - \Sigma F' H_4 + \Sigma F' H_6 - \Sigma F' H_8] \quad (136)$$

jantes para 16 y 32 azimutes.

3. CORRECCION CARTOGRAFICA

Esta corrección se aplica de los 100 a 150 m. en adelante, alrededor de la estación, y toma en cuenta las masas superficiales más lejanas comprendiendo montes aislados o serranías, si se ve que su influencia es de importancia.

Si se trata de relieves aislados como cerritos, lomas, conos volcánicos, etc., se hace la configuración de ellos y se aplican las siguientes ecuaciones con la notación, según se ve en la figura 22-A.

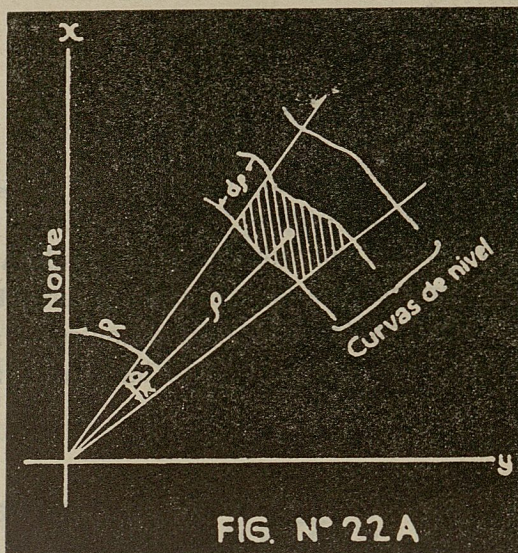


FIG. N° 22 A

$$U_{x^2} = -\frac{3}{2} K \epsilon h^2 \frac{d\rho \cos \alpha d\alpha}{\rho^3} \quad (137)$$

$$U_{y^2} = -\frac{3}{2} K \epsilon h^2 \frac{d\rho \operatorname{sen} \alpha d\alpha}{\rho^3} \quad (138)$$

$$2U_{xy} = +3K\epsilon h \frac{d\rho \operatorname{sen} 2\alpha d\alpha}{\rho^2} \quad (139)$$

$$-U_{\Delta} = +3K\epsilon h \frac{d\rho \cos 2\alpha d\alpha}{\rho^2} \quad (140)$$

Estas ecuaciones se refieren a un elemento de la masa que se considere, haciéndose la suma posteriormente. (h) es la diferencia de elevación media del elemento comprendido en el segmento considerado respecto al centro de la balanza, con un ancho de ($d\rho$), una distancia (ρ) al centro y un azimut (α). El ángulo elemental ($d\alpha$) se escoge de acuerdo con el grado de aproximación que se desee y según sea lo accidentado de la masa.

Si no se trata de un relieve aislado sino de una topografía irregular y extensa, se aplica un procedimiento semejante al de la corrección topográfica más allá de los 100 a 150 m., ya sea para 8, 16 ó 32 direcciones. Heiland calculó las ecuaciones semejantes a las del grupo 126 a 128, correspondientes a los círculos de radios siguientes:

1	100 metros.	6	750	11	5 800	16	45 000
2	150 "	7	1 150	12	8 600	17	67 000
3	225 "	8	1 700	13	13 000	18	100 000
4	340 "	9	2 500	14	20 000	19	150 000
5	500 "	10	3 800	15	30 000		

Por ejemplo, para una altura h de la balanza igual a 90 cm.:

$$U_{xz} = -\frac{G}{20000} [(79.030S_1 + 35.510S_2 + 15.670S_3 + 7.098S_4 + 2.860S_5 + 1.510S_6) 1m \\ + (62.740S_7 + 25.111S_8 + 12.472S_9 + 5.873S_{10} + 2.426S_{11} + 1.007S_{12}) 10m \\ + (50.513S_{13} + 20.935S_{14} + 8.531S_{15} + 4.020S_{16} + 1.692S_{17}) 100m \\ + (80.397S_{18} + 22.155S_{19}) 1000m] \quad (141)$$

$$U_{yz} = -\frac{G}{20000} [(79.030t_1 + 35.510t_2 + \dots) 1m + (\dots)] \quad (142)$$

$$U_{\Delta} = -\frac{G}{20} [(15.806u_1 + 10.653u_2 + 7.052u_3 + 4.827u_4 + 2.860u_5 + 2.265u_6) 1m \\ + (14.430u_7 + 8.538u_8 + 6.236u_9 + 4.464u_{10} + 2.814u_{11} + 1.732u_{12}) 10m \\ + (13.133u_{13} + 8.374u_{14} + 5.118u_{15} + 3.618u_{16} + 2.267u_{17}) 100m \\ + (16.097u_{18} + 6.647u_{19}) 1000m] \quad (143)$$

$$2U_{xy} = \frac{G}{20} [(15.806v_1 + 10.653v_2 + \dots) 1m + (\dots)] \quad (144)$$

Los coeficientes S , t , u , v se calculan por las mismas fórmulas que dan los coeficientes C , B , e y d de la corrección topográfica, tomando los siguientes factores:

0.785 en lugar de 0.250 para 8 azimutes.

0.393 en lugar de 0.125 para 16 azimutes.

0.196 en lugar de 0.063 para 32 azimutes.

INTERPRETACION DE LAS OBSERVACIONES HECHAS CON BALANZAS DE TORSION

Hechas las correcciones ya descritas, los valores de las magnitudes U_{xz} , U_{yz} , U_{Δ} y $2U_{xy}$, corresponderán a las influencias de las masas subterráneas. Con estos valores se construirán las cartas de la exploración gravimétrica, poniendo en cada estación a escala, (1 mm. por un Eötvös) un vector que represente el gradiente total en función de sus dos componentes U_{xz} y U_{yz} , teniendo en cuenta sus signos tal como se ve en la figura número 23. Casi siempre el vector resultante se encuentra gráficamente, pero si se desea puede calcularse su longitud por la ecuación:

$$\frac{dg}{ds} = \sqrt{(U_{xz})^2 + (U_{yz})^2} \quad (145)$$

y su rumbo por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_{yz}}{U_{xz}} \quad (146)$$

Del mismo modo que pueden calcularse las curvaturas con la ecuación:

$$R = \sqrt{(U_{\Delta})^2 + (2U_{xy})^2} \quad (147)$$

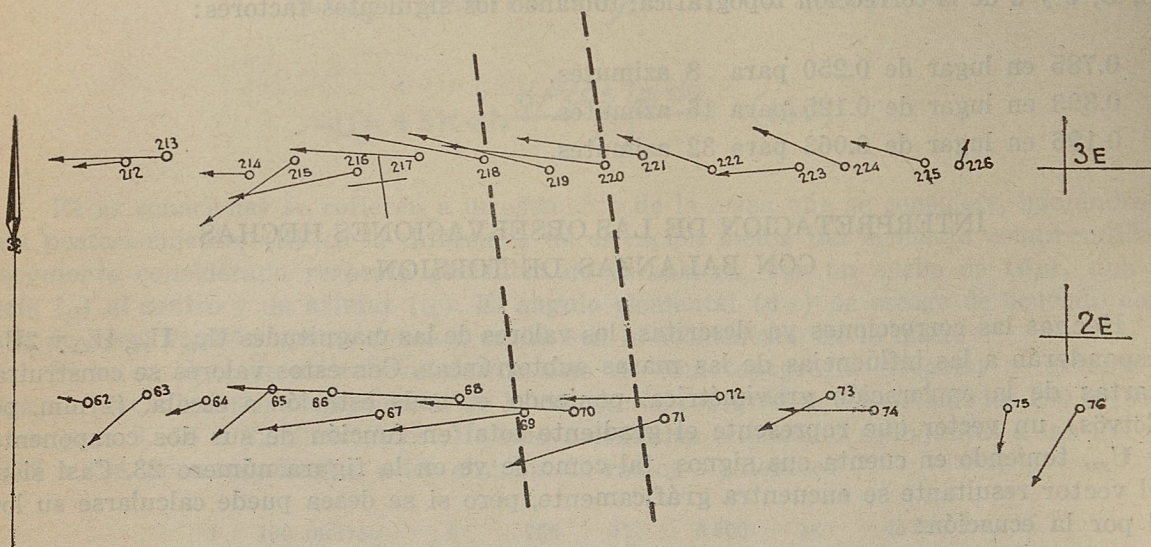
y la dirección del plano de curvatura mínima X_1X_1 por la ecuación ya conocida:

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2U_{xy}}{-U_{\Delta}} \quad (148)$$

Los valores de R se dibujarán en la dirección (λ) en cada estación, de modo que coincida el centro del vector con la estación, sin poner ninguna flecha.

Con ayuda de estos mapas finales se construirán perfiles de gradientes y curvaturas, los cuales servirán al interpretador. Generalmente se prefiere la interpretación a base del gradiente, pues los valores de las curvaturas a pesar de las correcciones locales, quedan influenciados por las irregularidades de la configuración.

De modo semejante a lo explicado al ocuparme de la interpretación de las observaciones que se hacen con péndulos y gravímetros, pueden establecerse las ecuaciones teóricas que



DOS LINEAS DE UN LEVANTAMIENTO GRAVIMETRICO (GRADIENTES) QUE ACUSAN LA PRESENCIA DE UNA FALLA EN EL FLANCO DE UN ANTICLINAL
FIG. N° 23

den la variación del gradiente y curvatura en las cercanías de masas de diferente forma y profundidad, para lo cual se partirá de las ecuaciones fundamentales de las cuatro funciones que interesa tomando como origen el centro de gravedad de la balanza. Para cuerpos con las tres dimensiones finitas, las ecuaciones 113 a 116, y para cuerpos con una dimensión infinita las ecuaciones basadas en la variación logarítmica del potencial. (Ecuación 73.)

Se construirán diagramas de familias de estas curvas independientes de las escalas concretas lineales, que servirán para cualquier caso que se quiera analizar. También se construyen graticulos para tal objeto.

Como ilustración se dan las ecuaciones de gradientes y curvaturas correspondientes a una falla vertical, una inclinada, un esquema de sinclinal y un dique vertical (Fig. 24):

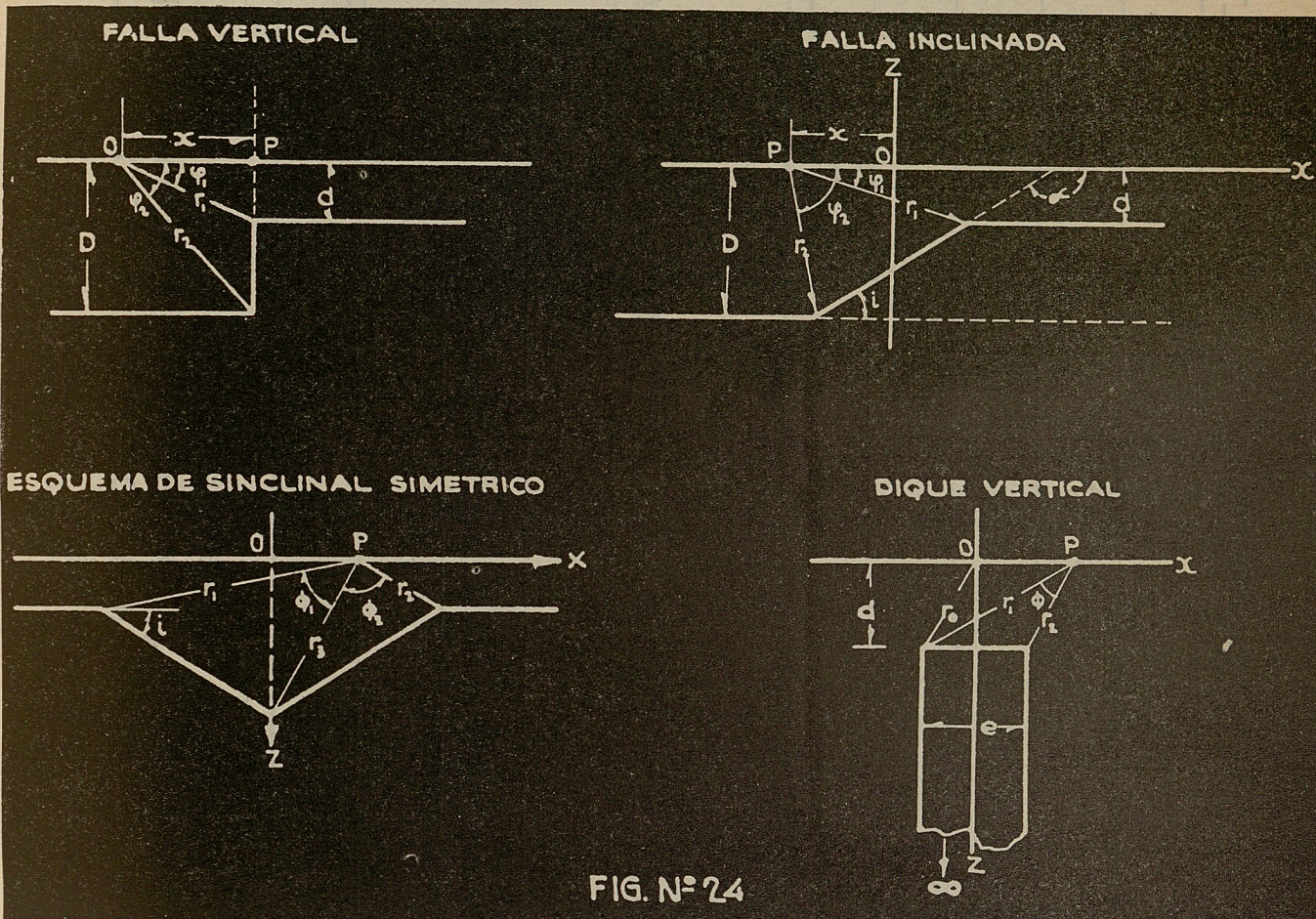


FIG. N° 24

Falla vertical:

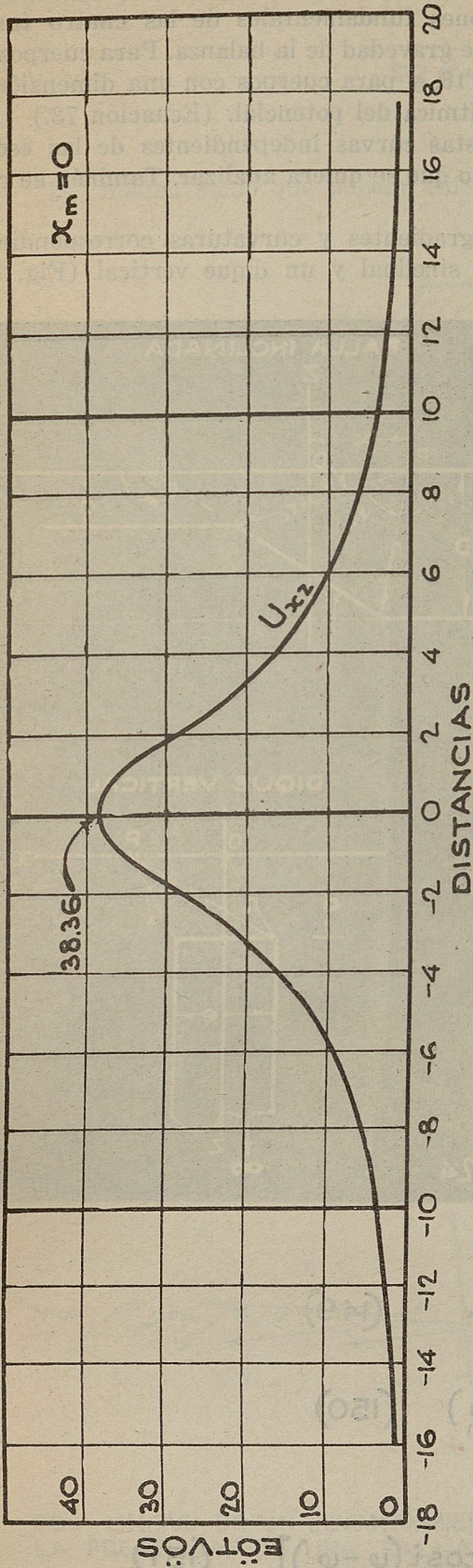
$$U_{xz} = 2K\sigma \text{Log} \frac{r_2}{r_1} \quad (149)$$

$$-U_{\Delta} = 2K\sigma (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (150)$$

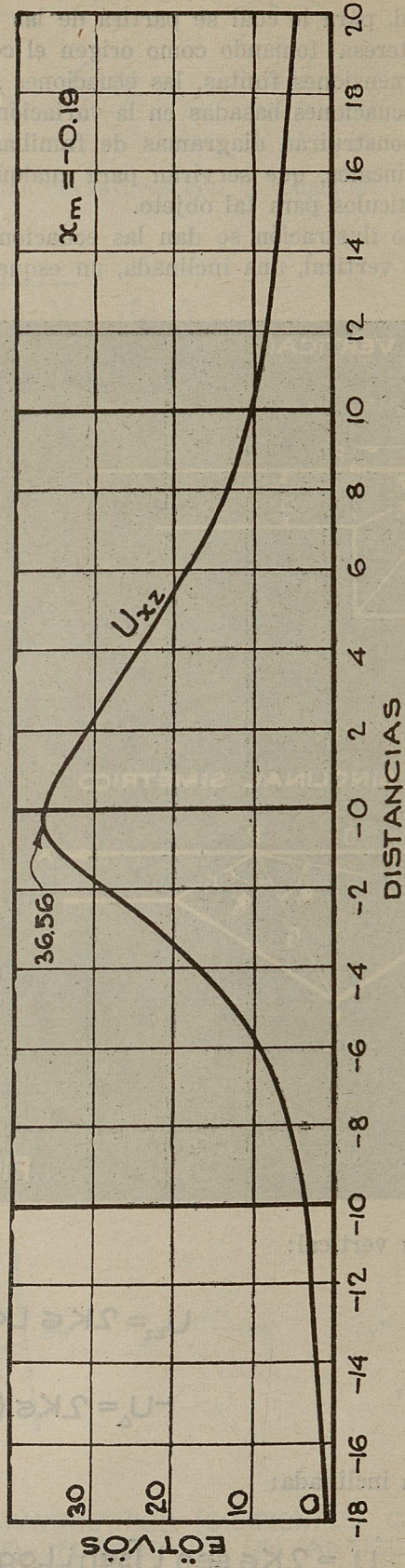
Falla inclinada:

$$U_{xz} = 2K\sigma \text{sen } i \left[\text{sen } i \text{Log} \frac{r_2}{r_1} + \text{cos } i (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \quad (151)$$

FALLA VERTICAL. PROFUNDIDAD TRES VECES EL SALTO



FALLA INCLINADA 20° CON EL HORIZONTE. PROFUNDIDAD 3 VECES EL SALTO



PERFILES GRAVIMETRICOS U_{xz} SOBRE FALLAS. UNIDAD O MODULO PARA LAS DISTANCIAS Y PROFUNDIDADES EL SALTO DE LA FALLA ~
FIG. N° 25

$$-U_{\Delta} = 2K\epsilon \operatorname{sen} i \left[\operatorname{sen} (\varphi_2 - \varphi_1) - \cos i \operatorname{Log} \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (152)$$

Sinclinal simétrico:

$$U_{x_2} = 2K\epsilon \operatorname{sen} i \left[\operatorname{sen} i \operatorname{Log} \frac{r_1}{r_2} - \cos i (\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (153)$$

$$-U_{\Delta} = 2K\epsilon \operatorname{sen} i \left[\operatorname{sen} i (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos i \operatorname{Log} \frac{r_1 r_2}{r_3^2} \right] \quad (154)$$

Dique vertical infinito a profundidad:

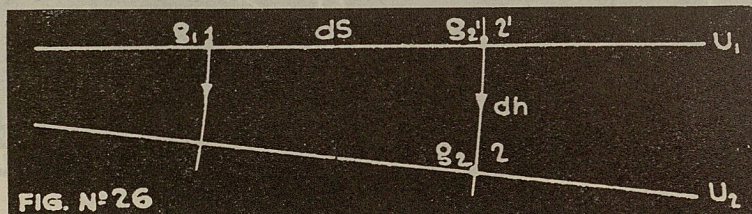
$$U_{x_2} = 2K\epsilon \operatorname{Log} \frac{r_2}{r_1} \quad (155)$$

$$-U_{\Delta} = -2K\epsilon \phi \quad (156)$$

En la figura 25 se dan los perfiles gravimétricos teóricos del desarrollo del gradiente sobre una falla vertical y otra inclinada, ecuaciones 149 y 151.

Por último, como auxilio en la interpretación, pueden calcularse las diferencias de la gravedad, entre las diversas estaciones, reduciéndolas a una de ellas, para la construcción de mapas de isogamas, de manera semejante a como se hace en operaciones geodésicas, según se explica luego, aunque en ese caso sólo se aplica la corrección topográfica y la de altura libre, relativa entre estación y estación.

DETERMINACION DE LA GRAVEDAD RELATIVA CON LA BALANZA DE TORSION



Supongamos que tenemos dos puntos (1) y (2), en el primero de los cuales conocemos el valor de la gravedad (g_1) y deseamos conocer el valor de la misma en (2), es decir, g_2 , con ayuda de las observaciones hechas con balanza de torsión. El problema consistirá en calcular la diferencia o incremento.

$$\Delta g = g_2 - g_1 \quad (157)$$

Por (1) pasará la equipotencial U_1 y por (2), la U_2 , para que nuestro razonamiento sea riguroso, supondremos que la distancia (ds) que media entre ambas estaciones es infinita-

mente pequeña. El punto (2') está en la vertical de (2). Si conocemos el gradiente $\frac{dg_z}{ds}$ en la dirección 1—2', corregido por topografía y cartografía, es evidente que el valor de la gravedad en 2' será:

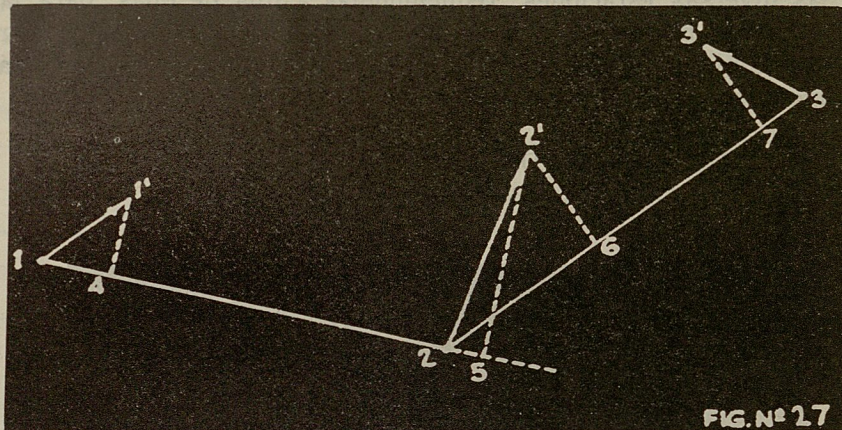
$$g'_2 = g_1 + \frac{dg_z}{ds} \times ds \quad (158)$$

si a este valor le aplicamos la corrección por la altura dh igual $3086 \times 10^{-9} dh$, siempre que se expresen los valores de la gravedad en gales, o sean $\frac{cm}{seg^2}$, puesto que U_{sz} está dado en Eötvös, o sean $10^{-9} \frac{gales}{cm}$, por esto tanto las distancias como desniveles se expresarán en centímetros.

Si la distancia es grande, rigurosamente el valor de g'_2 será:

$$g'_2 = g_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{dg_z}{ds} ds \quad (159)$$

Como en la práctica se necesitaría conocer muchos valores del gradiente entre ambas estaciones para hacer la integración, lo cual no es posible, lo que se hace si se quiere obtener por este procedimiento valores del incremento de la gravedad con cierta exactitud, es no espaciar mucho las estaciones y tomar la mitad de la suma vectorial de los gradientes según la línea que las une, considerando la variación lineal entre ambas. Por ejemplo, si



los gradientes para las estaciones 1-2-3, son 1—1', 2—2' y 3—3', se tendrá para el promedio de gradientes entre (Fig. 27):

$$1 \text{ y } 2: \frac{\vec{14} + \vec{25}}{2}$$

$$2 \text{ y } 3: \frac{\vec{26} + \vec{73}}{2}, \text{ etc.}$$

CALCULO DE LAS DESVIACIONES DE LA VERTICAL PARTIENDO DE LAS OBSERVACIONES CON BALANZA DE TORSION

Sabemos que en general en cualquier punto de la superficie de la tierra, la normal al esferoide no coincide con la vertical del geoide, de ahí la diferencia de las posiciones geodésicas o referidas al esferoide, respecto a las astronómicas o referidas al geoide. El ángulo

que forma la vertical con la normal es la desviación, que es posible determinar también con ayuda de la balanza de torsión, de acuerdo con el procedimiento ideado por Eötvös. Seguiremos a Sans y Huelin, en la exposición que hace de este procedimiento.

La desviación se da por sus componentes (ϵ) en el meridiano y (η) en el primer vertical. Para que la determinación sea posible en cada estación que interese en la región en que se opere, es necesario conocer en dos estaciones cuando menos una de las componentes, por observaciones astronómico-geodésicas.

Si g_x y g_y son las componentes de (g) en el meridiano y primer vertical, se tendrá que:

$$\text{sen } \epsilon = \pm \frac{g_x}{g} \quad \text{sen } \eta = \pm \frac{g_y}{g} \quad (160)$$

como

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{y} \quad g_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (161)$$

y teniendo en cuenta que los ángulos son muy pequeños:

$$\epsilon = \pm \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (162)$$

$$\eta = \pm \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (163)$$

De acuerdo con las anteriores, para dos estaciones muy cercanas, 1 y 2:

$$\pm (\epsilon_2 - \epsilon_1) g = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_1 = A_{1,2} \quad (164)$$

$$\pm (\eta_2 - \eta_1) g = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_1 = B_{1,2} \quad (165)$$

Las observaciones con la balanza nos dan los valores:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_2 \quad (166)$$

Si ahora hacemos un cambio de ejes coordenados de modo que el nuevo eje de las XX , o sea el $X'X'$, coincida con la recta que une ambas estaciones, los nuevos valores de estas segundas derivadas podemos escribirlos como sigue;

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'}\right)_1 \text{ y } \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'}\right)_2 \quad (167)$$

Siendo la distancia entre ambos puntos ($d_{1,2}$) muy pequeña podemos considerar la variación de estas funciones linealmente y escribir:

$$\int_{x'_1}^{x'_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'} dx' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'}\right)_1 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'}\right)_2 \right] d_{1,2} = T_{1,2} \quad (168)$$

Por otra parte,

$$\int_{x'_1}^{x'_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'} dx' = \left(\frac{\partial U}{\partial y'}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y'}\right)_1 = T_{1,2} \quad (169)$$

$T_{1,2}$ se conoce; ligando estas derivadas con las del primitivo sistema, o fundamental, si (α) es el azimut del lado 1.2:

$$\frac{\partial U}{\partial y'} = -\frac{\partial U}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha_{1,2} + \frac{\partial U}{\partial y} \operatorname{cos} \alpha_{1,2} \quad (170)$$

es decir:

$$T_{1,2} = - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 \right] \operatorname{sen} \alpha_{1,2} + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_1 \right] \operatorname{cos} \alpha_{1,2} \quad (171)$$

Y substituyendo éstos en el valor de $A_{1,2}$ $B_{1,2}$:

$$T_{1,2} = -A_{1,2} \operatorname{sen} \alpha_{1,2} + B_{1,2} \operatorname{cos} \alpha_{1,2} \quad (172)$$

En la que se conocen $T_{1,2}$ y $\alpha_{1,2}$

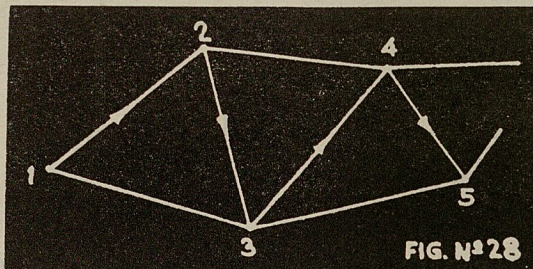


FIG. N.º 28

De la misma manera para las estaciones 3, referida a 1 y 2:

$$T_{2,3} = -A_{2,3} \operatorname{sen} \alpha_{2,3} + B_{2,3} \operatorname{cos} \alpha_{2,3} \quad (173)$$

$$T_{3,1} = -A_{3,1} \operatorname{sen} \alpha_{3,1} + B_{3,1} \operatorname{cos} \alpha_{3,1} \quad (174)$$

Además, en un circuito cerrado, como 1.2.3 se tendrá (Fig. 28):

$$A_{1,2} + A_{2,3} + A_{3,1} = 0 \quad (175)$$

$$B_{1,2} + B_{2,3} + B_{3,1} = 0 \quad (176)$$

Tenemos así 5 ecuaciones y 6 incógnitas: $A_{1,2}$, $A_{2,3}$, $A_{3,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,3}$, $B_{3,1}$, que pueden resolverse si en función de una de ellas se expresan las otras, entonces:

$$A_{1,2} = \pm (\epsilon_2 - \epsilon_1) g = a \quad (177)$$

$$B_{1,2} = \frac{T_{1,2}}{\operatorname{cos} \alpha_{1,2}} + a \operatorname{tg} \alpha_{1,2} \quad (178)$$

$$A_{2,3} = \frac{T_{2,3} \operatorname{cos} \alpha_{3,1} + (T_{3,1} - a \operatorname{sen} \alpha_{3,1} + B_{1,2} \operatorname{cos} \alpha_{3,1}) \operatorname{cos} \alpha_{2,3}}{\operatorname{sen} (\alpha_{3,1} - \alpha_{2,3})} \quad (179)$$

$$B_{2,3} = \frac{T_{2,3} \operatorname{sen} \alpha_{3,1} + (T_{3,1} - a \operatorname{sen} \alpha_{3,1} + B_{1,2} \operatorname{cos} \alpha_{3,1}) \operatorname{sen} \alpha_{2,3}}{\operatorname{sen} (\alpha_{3,1} - \alpha_{2,3})} \quad (180)$$

Continuando con el circuito 2, 3, 4, calcularíamos $A_{3,4}$ y $B_{3,4}$ en la misma forma que $A_{2,3}$ y $B_{2,3}$ cambiando los índices y así todos los demás siempre en función de (a), para lo cual es necesario conocer las componentes ϵ_1 y ϵ_2 , cuya diferencia está dada en radianes y que podemos expresar así en segundos de arco:

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = \pm \frac{206265}{g} \quad (181)$$

Si conociéramos el par de desviaciones en el primer vertical, utilizaríamos la diferencia ($\eta_2 - \eta_1$), expresando las ecuaciones en función de:

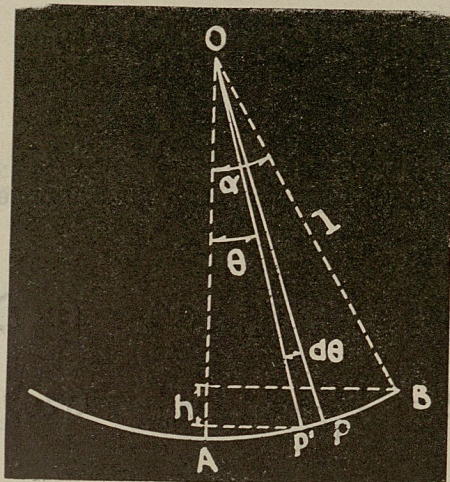
$$B_{1,2} = \pm (\eta_2 - \eta_1) g = b \quad (182)$$

APENDICE

DEMOSTRACION DE LA FORMULA FUNDAMENTAL DEL PENDULO SIMPLE

POR EL PROF. CARLOS MARTINEZ BECERRIL DE LA DIRECCION DE ESTUDIOS GEOGRAFICOS

Consideremos un hilo inextensible del cual podamos desprejir su peso y fijo en O. De este hilo pende un cuerpo cuyas dimensiones son infinitamente pequeñas, esto es, un punto material cuya posición de equilibrio es A.



Si apartamos al cuerpo de su posición de equilibrio empieza a oscilar, veamos cual es la ecuación de este movimiento en el vacío.

Sea l la longitud del péndulo o sea el hilo.

Sea α el ángulo fijo, o amplitud máxima que alcanza el péndulo.

θ es el ángulo variable, cuyo valor inicial es α y el valor final 0 , si el movimiento es de B hacia A.

Por el teorema de las fuerzas vivas, en cada instante:

$$V = \sqrt{2gh}$$

pero esta velocidad v , también puede expresarse como la derivada del arco con relación al tiempo y con signo menos pues θ es una función decreciente del tiempo:

$$v = -l \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{luego, } -l \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$

$$\text{pero, } h = l(\cos\theta - \cos\alpha)$$

$$-l \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

$$\text{despejando, } dt = \frac{-1d\theta}{\sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

cambiando los límites y doblando para tener el tiempo de la media oscilación será:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

sustituyendo y reduciendo tendremos para la oscilación completa:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

Si hacemos:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \sin\varphi$$

se deduce:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\varphi}}$$

queda así expresada la duración de oscilación del péndulo simple, por medio de una integral elíptica de primera especie, cuya amplitud es ϕ y cuyo módulo es $\frac{\sin\alpha}{2}$

Si se desarrolla en serie el integrando y se efectúa la integración término a término se encuentra fácilmente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \dots \right]$$

siendo una serie muy convergente la que aparece en el paréntesis rectangular, se podrá obtener el tiempo con la aproximación que se desee.

BIBLIOGRAFIA SELECTA RELACIONADA CON LA GRAVIMETRIA

1. Barton, Donald.—Calculations in the Interpretation of Observations with Eötvös Torsion Balance.—**Geophysical Prospecting** (1929). American Institute of Mining and Metallurgical Engineers. (A. I. M. E.)
2. Barton, Donald.—The Eötvös Torsion Balance Method of Mapping Geologic Structure.—**Geophysical Prospecting** (1929). (A. I. M. E.)
3. Barton, Donald.—Gravity Measurements with the Eötvös Torsion Balance.—**The Figure of the Earth** (1931).—National Research Council. (U. S. A.)
4. Bowie, William.—Isostasy (1927).
5. Grandall, Chas. L.—Text Book on Geodesy and Least Squares (1914).
6. De la O. Carreño, Alfonso.—Curso de Geofísica Aplicada, Tomo I, Gravimetría (inédito).
7. Eve, A. S. and Keys, D. A.—Gravitational Methods.—**Applied Geophysics** (1938).
8. Fowle, E. Frederick.—Smithsonian Physical Tables.—Smithsonian Miscellaneous Collections. Volume 88 (1934).
9. Gama, Valentín.—Introducción al Estudio de la Gravimetría (1931).
10. García Siñeriz, José.—La Interpretación de las Mediciones Geofísicas Aplicadas a la Prospección.—Mem. del Instituto Geológico y Minero de España (1933).
11. Graf, A.—Ein neuer statischer Schweremesser zur Messung und Registrierung lokaler und Zeitlicher Schwereänderungen (1938).
12. Hammer, Sigmund—Terrain Corrections for Gravimeter Stations—**Geophysics**, Vol. IV-3 (1939).
13. Hedstrom, Helmer.—A New Gravimeter for Ore Prospecting.—**Geophysics** (1940). (A. I. M. E.)
14. Heiland, C. A.—Cartographic Correction for the Eötvös Torsion Balance.—**Geophysical Prospecting** (1929). (A. I. M. E.)
15. Heiland, C. A.—Directions for the Use of the Askania Torsion Balance (1933).
16. Heiland, C. A.—Gravimeters: Their Relation to Seismometers, Astatization and Calibration.—**Geophysics** (1940). (A. I. M. E.)
17. Heiland, C. A.—Gravitational Methods.—**Geophysical Exploration** (1940).
18. Hippisley R. L., Col. — Tables of Elliptic Functions.—Smithsonian Miscellaneous Collections, Vol. 74, Number 1 (1939).
19. Hoskinson S., Albert.—Gravity at Sea by Pendulum Observations.—**Geophysics** (1940). (A. I. M. E.)
20. Houston V., William.—Principles of Mathematical Physics (1934).
21. Ising, Gustaf.—Use of Astatized Pendulums for Gravity Measurements.—**Geophysics** (1940). (A. I. M. E.)
22. Jakosky, J. J.—Gravitational Methods.—**Exploration Geophysics** (1940).
23. Jäger, Gustav.—Física Teórica.—T-1 (1926).
24. Jung, Karl.—Gravimetrische Methoden der Angewandten Geophysik.—**Handbuch der Experimentalphysik**.—3 Teil (1930).

25. Keys, D. A. and Eve A. S.—Gravitational Methods.—**Applied Geophysics** (1938).
26. Lambert, W. D.—The Shape and Size of the Earth (1931).—National Research Council (U. S. A.).
27. Lancaster Jones, E.—Computation of Eötvös Gravity Effects.—**Geophysical Prospecting** (1929). (A. I. M. E.)
28. Medina, Manuel.—La Gravimetría en México (1944).
29. Mott-Smith, L. M.—Gravitational Surveying with the Gravity-Meter.—**Geophysics**, Vol. II-1 (1937).
30. Nettleton, L. L.—Determination of Density for Reduction of Gravimeter Observations.—**Geophysics**, Vol. IV.3 (1939).
31. Nettleton, L. L.—Gravitational Methods.—**Geophysical Prospecting for Oil** (1940).
32. Phillips, H. B.—Vector Analysis (1933).
33. Reich, H.—Geologische Unterlagen der angewandten Geophysik.—**Handbuch der Experimentalphysik**. 3 Teil (1930).
34. Sánchez C., Pedro.—Medida del Meridiano de Longitud 98 W. de Greenwich.—Comisión Geodésica Mexicana (1913).
35. Sans Huelin, Guillermo.—La Balanza de Torsión Eötvös-Schweydar y sus Aplicaciones.—Instituto Geográfico de España (1924).
36. Sans Huelin, Guillermo.—Las Anomalías de la Gravedad en España y la Profundidad de Compensación Isostática más Probable.—Instituto Geológico de España (1926).
37. Sans Huelin, Guillermo.—Invariabilidad de los Péndulos Gravimétricos.—Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1932).
38. Shaw, H.—Interpretation of Gravitational Anomalies.—**Geophysical Prospecting** (1932). (A. I. M. E.)
39. Swick, C. H.—Determination of "g" by means of the Free Swinging Pendulum.—**The Figure of the Earth** (1931).—National Research Council. (U. S. A.)
40. Tisserand, F.—Traité de Mécanique Céleste.
41. Toscano, Ricardo.—Tablas que dan a conocer las correcciones por Topografía e Isostasia para Masas Cercanas y Lejanas (1944).
42. Toscano, Ricardo.—Determinación de la Gravedad por Medio del Péndulo.—Instituto Geográfico de México (1935).
43. Vening Meinesz E.—Theory and Practice of Pendulum Observations at Sea.—Technische Boekhandel en Drukkerij J. Waltman, Jr. Delft.

I N D I C E

	Págs.
El Potencial del Campo Gravífico Terrestre	5
Significado de las Funciones Derivadas. Unidades	9
Variación de la Gravedad con la Latitud	11
Cálculo de las Anomalías de la Gravedad	12
Mediciones de la Gravedad	20
Observaciones por medio de Péndulos	21
Péndulos de Período Mínimo	22
Péndulos Reversibles	23
Invariabilidad de los Péndulos Gravimétricos	23
Observaciones Pendulares Submarinas	23
Determinación de los Incrementos de g	23
Tipos de Péndulos Usados	25
Observaciones por medio de Gravímetros	26
Modo de Ligar las Observaciones	29
Correcciones Instrumentales a las Observaciones	30
Calibración de los Gravímetros	31
Breve Descripción de tres Gravímetros	31
Gravímetro Graf-Askania	31
Gravímetro C. H. Frost.	33
Gravímetro Mott-Smith Corporation Tipo C	34
Interpretación de las Anomalías de la Gravedad desde el punto de vista de la Exploración Geofísica	37
Observaciones Gravimétricas con Balanzas de Torsión	40
La Balanza de Torsión	41
Ecuaciones Fundamentales de la Balanza de Torsión	47
Correcciones a los Valores Determinados con Balanzas de Torsión..	52
Corrección Normal en Gradiente	52
Corrección Normal en Curvatura	52
Corrección Topográfica	55
Corrección Cartográfica	59
Interpretación de las Observaciones hechas con Balanzas de Torsión..	61
Determinación de la Gravedad Relativa con la Balanza de Torsión...	65
Cálculo de las Desviaciones de la Vertical, partiendo de las Observa- ciones con Balanza de Torsión	66
Apéndice. Demostración de la Fórmula Fundamental del Péndulo Simple, por el Prof. Carlos Martínez Becerril	70
Bibliografía	72