MULTIPOLOS MAGNETICOS EXCENTRICOS
MODELOS PARA 1955.0

MANUELA G. DE ALVAREZ*

PRÓLOGO

Para la medición de cualquier fenómeno terrestre lo más cómodo es considerar a la Tierra como una esfera y tomar un sistema de coordenadas esféricas con centro y dirección de los ejes de manera que coincidan con los geográficos. Por esta razón los coeficientes del potencial geomagnético están calculados en este sistema. Pero esta selección arbitraria del marco de referencia hace difícil la interpretación de ciertos fenómenos mediante modelos matemáticos que mucho van a depender del sistema de referencia, en cuyo caso conviene seleccionar un sistema apropiado.

En el fenómeno geomagnético, Thompson, Schmidt y otros han definido el centro geomagnético C, como el punto donde el valor medio cuadrático del potencial del cuadripolo,** se hace mínimo.

Chargoy [3] define este punto de una manera más general como el centro de una distribución.

Se ha demostrado que al medirse el potencial con este punto C como centro del sistema de referencia, se obtiene un cuadripolo cuyos ejes son perpendiculares entre sí y perpendiculares al eje del dipolo; la selección de este centro y direcciones de los ejes del dipolo y cuadripolo en C nos dan el sistema de referencia apropiado.

El estudio del campo magnético tomando únicamente hasta los términos de 2º orden, ha dado la información del movimiento de la fuente del campo [1].

Estos multipolos dan un campo simétrico con respecto al eje del dipolo y al plano del cuadripolo. La fuente del campo que contribuye a

* Departamento de Geomagnetismo, Sección de Estudios Teóricos Instituto de Geofísica, UNAM.

** Véase apéndice.

la parte no simétrica sobre la superficie de la Tierra (que es la causa de la deformación de las isoclinas incluyendo la irregularidad del Ecuador dada por la carta) es de esperar que aparezca a partir del término de 3er. orden, V_3.

En este trabajo se encuentra la expresión para el potencial con términos hasta de 3er. orden en el sistema de referencia propio.

TEORÍA

Si se toma la ecuación del potencial dada por Gauss [4], los términos V_1 y V_2 correspondiente al dipolo y al cuadripolo,** es decir, de 1º y 2º orden, para puntos sobre la superficie de la tierra, donde $r = a$, son:

$$V_1 + V_2 = a \left\{ \left(\frac{a}{r}\right)^2 [g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos\lambda + h_1^1 \operatorname{sen}\lambda) P_1^1] + \right.$$

$$(1) \qquad \left. \left(\frac{a}{r}\right)^3 [g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos\lambda + h_2^1 \operatorname{sen}\lambda) P_2^1 + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2] \right\}$$

P_j^i indica, P_j^i $(\cos\theta)$ que son los polinomios de Legendre y el sistema de referencia tiene por origen el centro 0 de la Tierra, esférica, siendo el plano XOZ el que contiene al meridiano de Greenwich y el XOY el ecuador geográfico. Las coordenadas esféricas del punto P, sobre la superficie de la Tierra, son $P(a, \lambda, \theta)$.

La dirección del dipolo $\bar{O}\bar{D}$ está dada por

$$\bar{O}\bar{D} = (g_1^1, h_1^1, h_1^0)$$

Sea $a = 1$

Al considerar como origen del sistema de referencia al punto C, la ecuación (1) queda expresada por:

$$(V_1 + V_2)_c = \frac{1}{\bar{r}^2} g_1^0 \bar{P}_1^0 + \frac{1}{\bar{r}^2} (g_1^1 \cos\bar{\lambda} + h_1^1 \operatorname{sen}\bar{\lambda}) \bar{P}_1^1 +$$

$$(2) \qquad + \frac{1}{\bar{r}^3} \bar{g}_2^0 \bar{P}_2^0 + \frac{1}{\bar{r}^3} (\bar{g}_2^1 \cos\bar{\lambda} + \bar{h}_2^1 \operatorname{sen}\bar{\lambda}) \bar{P}_2^1 +$$

$$+ \frac{1}{\bar{r}^3} (\bar{g}_2^2 \cos 2\bar{\lambda} + \bar{h}_2^2 \operatorname{sen} 2\bar{\lambda}) \bar{P}_2^2.$$

donde las coordenadas $(\bar{r}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$ de un punto P, debe tomarse con el nuevo sistema de referencia que tiene la misma orientación del sistema original pero su centro en C (x′, y′, z′), $\bar{r} \neq a$, con las expresiones bien conocidas

$$x' = (L_1 - g_1^1 E)/3m_1^2$$

$$y' = (L_2 - h_1^1 E)/3m_1^2$$

$$z' = (L_0 - g_1^0 E)/3m_1^2$$

$$L_0 = 2g_2^0 g_1^0 + (g_1^1 g_2^1 + h_1^1 h_2^1)\sqrt{3}$$

$$L_1 = -g_1^1 g_2^0 + (g_1^0 g_2^1 + g_1^1 g_2^2 + h_1^1 h_2^2)\sqrt{3}$$

$$L_2 = -h_1^1 g_2^0 + (g_1^0 h_2^1 - h_1^1 g_2^2 + g_1^1 h_2^2)\sqrt{3}$$

$$E = (L_0 g_1^0 + L_1 g_1^1 + L_2 h_1^1)/4m_1^2$$

y los nuevos coeficientes son:

$$\bar{g}_2^i = g_2^i - a_2^i \; ; \; \bar{h}_2^i = h_2^i - b_2^i$$

donde

$$a_2^0 = 2g_1^0 z' - g_1^1 x' - h_1^1 y'$$

$$a_2^1 = (g_1^1 z' + g_1^0 x')\sqrt{3}$$

$$b_2^1 = (h_1^1 z' + g_1^0 y')\sqrt{3}$$

$$a_2^2 = (g_1^1 x' - h_1^1 y')\sqrt{3}$$

$$b_2^2 = (h_1^1 x' - g_1^1 y')\sqrt{3}$$

Si se llama ahora $\bar{C}\bar{H}_1$ $\bar{C}\bar{H}_2$ a los ejes del nuevo cuadripolo y tomamos la dirección del dipolo en sentido negativo, $-\bar{C}\bar{D}$, se obtienen tres ejes que forman un sistema ortogonal derecho. Se hace coincidir el eje $\bar{x}$ con $\bar{C}\bar{H}_1$, el eje $\bar{y}$ con $\bar{C}\bar{H}_2$ y el eje $\bar{z}$ con $-\bar{C}\bar{D}$ para obtener un nuevo sistema de referencia que es el indicado por el propio fenómeno. La matriz de transformación de un sistema a otro es:

$$R = \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{H}_1 \\ \bar{C}\bar{H}_2 \\ -\bar{C}\bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 \end{bmatrix}$$

donde x_i, y_i, z_i son cosenos directores. Para aplicar esta rotación a la expresión (2), es necesario cambiar ésta a coordenadas cartesianas, y usar la notación de matrices [5] que simplifica las operaciones.

(3)

$$(V_1 + V_2)_c = \frac{1}{\bar{r}^3} (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}) \begin{bmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{r}^3} \bar{g}_2^0 + \frac{1}{\bar{r}^5} (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z})\, A \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \bar{g}_2^2 & \bar{h}_2^2 & \bar{g}_2^1 \\ \bar{h}_2^2 & -\bar{g}_2^2 & \bar{h}_2^1 \\ g_2^1 & h_2^1 & \sqrt{3}\ g_2^0 \end{bmatrix}$$

Al hacer la rotación el valor de $\bar{r}$ no cambia, y se tiene:

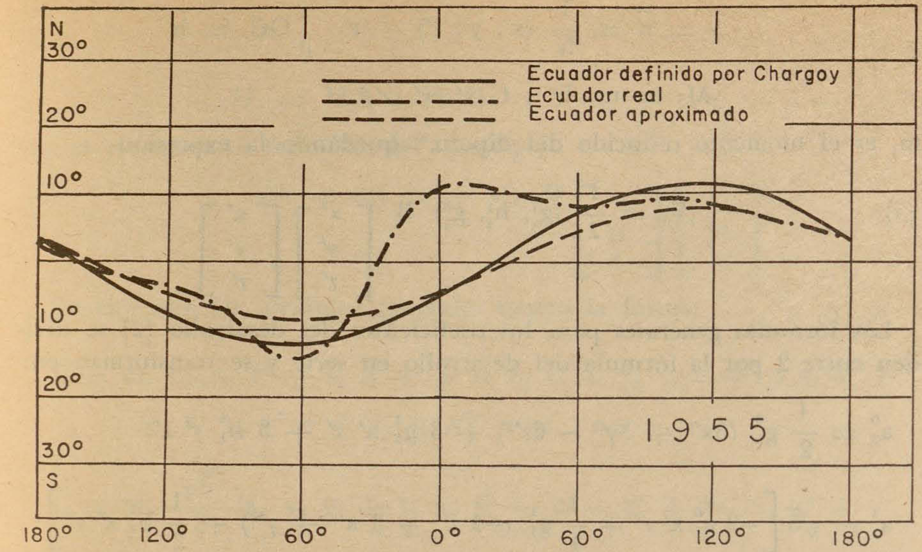
(4)

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \frac{1}{\bar{r}^3} \bar{\bar{X}}\, R \begin{bmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2\bar{r}^3} \bar{g}_2^0 + \frac{1}{\bar{r}^5} \bar{\bar{X}}\, R\, A\, R'\, \bar{\bar{X}}'$$

donde $\bar{\bar{X}} = (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}})$ son las coordenadas de P en este último sistema, R' y $\bar{\bar{X}}'$, son las matrices transpuestas de R y $\bar{\bar{X}}$.

El ecuador correspondiente a esta última transformación, o sea el plano con la dirección $\bar{C}\bar{D}$, que pasa por C y por lo tanto contiene a los ejes $\bar{C}\bar{H}_1$ y $\bar{C}\bar{H}_2$, es el ecuador geomagnético definido por Chargoy [6].

Al hacer el cambio de coordenadas del centro de la Tierra 0, al centro geomagnético C, se obtienen diferentes octipolos.



Gráfica 1. Posición de los ecuadores, definido por Chargoy, real y aproximado para el año 1955. El ecuador real fue tomado de la carta de inclinación magnética, publicada por U. S. Coast and Geodetic Survey para 1955.

a) El octipolo generado por la sustitución del dipolo que reside en 0, y cuyos coeficientes se designarán por a_3^i y b_3^i.

b) El octipolo generado por la sustitución del cuadripolo que reside en 0, y cuyos coeficientes se designarán por $\bar{a}^i_3$ y $\bar{b}^i_3$.

c) El octipolo generado por la sustitución del octipolo que reside en 0, el cual permanece invariante.

La expresión del potencial [2] será:

$$V_3 = M_3 \; \bar{u} \; B \; \bar{v}' \; \bar{w}'$$

B es una matriz de orden $3 \times 3 \times 3$ o sean 3 matrices de orden 3×3. $\bar{V}'$, $\bar{W}'$ son los vectores transpuestos de $\bar{u}$ y $\bar{w}$.

En el caso a) esta expresión tiene los valores:

$${}_1V_3 = \frac{1}{2}\, {}_1M_3 \; \bar{u} \; (B \; \bar{v}) \; \bar{w}$$

donde $\bar{u} = \dfrac{1}{m_1} \, (g_1^1, \; h_1^1, \; g_1^0)$

$$\bar{v} = \bar{w} = \frac{1}{h} (x', y', z') \quad ; \quad OC = h$$

$${}_1M_3 = m_1 h^2 \ ; \ C(x', y', z')$$

m_1 es el momento reducido del dipolo,* quedando la expresión

$$(5) \qquad {}_1V_3 = \frac{1}{2} (g_1^1, h_1^1, g_1^0) \cdot B \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Las fórmulas generales para los coeficientes del desarrollo [2] se dividen entre 2 por la fórmula del desarrollo en serie y se transforman en:

$$a_3^0 = \frac{1}{2} g_1^0 (3x'^2 + 3y'^2 - 6z'^2) + 3 g_1^1 x' z' + 3 h_1^1 y' z'$$

$$a_3^1 = \sqrt{6} \left[-2 g_1^0 x' z' + \frac{1}{4} g_1^1 (-4 z'^2 + 3 x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} h_1^1 x' y' \right]$$

$$b_3^1 = \sqrt{6} \left[-2 g_1^0 y' z' + \frac{1}{2} g_1^1 x' y' + \frac{1}{4} h_1^1 (x'^2 + 3 y'^2 -4 z'^2) \right]$$

$$a_3^2 = \sqrt{15} \left[\frac{1}{2} g_1^0 (y'^2 - x'^2) - g_1^1 x' z' + h_1^1 y' z' \right]$$

$$b_3^2 = -\sqrt{15} \left[g_1^0 x' y' + g_1^1 y' z' + h_1^1 x' z' \right]$$

$$a_3^3 = 3 \sqrt{10} \left[\frac{1}{4} g_1^1 (y'^2 - x'^2) + \frac{1}{2} h_1^1 x' y' \right]$$

$$b_3^3 = 3 \sqrt{10} \left[-\frac{1}{2} g_1^1 x' y' + \frac{1}{4} h_1^1 (y'^2 - x'^2) \right]$$

Estos valores deben sumarse a los correspondientes g_3^j y h_3^j.
Para el caso b) se tiene:

$$\bar{w} = \overline{OH_1} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\bar{v} = \overline{OH_2} = (x_2, y_2, z_2)$$

* Véase apéndice.

$$\bar{u} = \frac{1}{h} (x', y', z') \qquad h = OC$$

$${}_2M_3 = M_2 h = m_2 h$$

m_2 es el momento reducido del cuadripolo en 0.

$$(6) \qquad {}_2V_3 = m_2 \; (x' \; y' \; z') \; B \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

En este caso las fórmulas generales tienen la forma:

$$\bar{a}_3^0 = m_2 \; [x_1 \; x_2 \; z' + x_1 \; z_2 \; x' + z_1 \; x_2 \; x' + y_1 \; y_2 \; z' + y_1 \; z_2 \; y' + + z_1 \; y_2 \; y' - 2 \; z_1 \; z_2 \; z']$$

$$\bar{a}_3^1 = m_2 \frac{\sqrt{6}}{2} \; [x_1 \; y_2 \; y' + y_1 \; x_2 \; y' + y_1 \; y_2 \; x' + 3x_1 \; x_2 \; x' + -4 \; (x_1 \; z_2 \; z' + z_1 \; x_2 \; z' + z_1 \; z_2 \; x')]$$

$$\bar{b}_3^1 = m_2 \frac{\sqrt{6}}{2} \; [x_1 \; x_2 \; y' + x_1 \; y_2 \; x' + y_1 \; x_2 \; x' + 3y_1 \; y_2 \; y' + -4 \; (y_1 \; z_2 \; z' + z_1 \; y_2 \; z' + z_1 \; z_2 \; y')]$$

$$\bar{a}_3^2 = m_2 \sqrt{15} \; [y_1 \; y_2 \; z' + y_1 \; z_2 \; y' + z_1 \; y_2 \; y' - x_1 \; x_2 \; z' + -x_1 \; z_2 \; x' - z_1 \; x_2 \; x']$$

$$\bar{b}_3^2 = -m_2 \sqrt{15} \; [x_1 \; y_2 \; z' + x_1 \; z_2 \; y' + y_1 \; x_2 \; z' + y_1 \; z_2 \; x' + + z_1 \; x_2 \; y' + z_1 \; y_2 \; x']$$

$$\bar{a}_3^3 = m_2 \frac{3\sqrt{10}}{2} \; [x_1 \; y_2 \; y' + y_1 \; x_2 \; y' + y_1 \; y_2 \; x' - x_1 \; x_2 \; x']$$

$$\bar{b}_3^3 = m_2 \frac{3\sqrt{10}}{2} \; [y_1 \; y_2 \; y' - x_1 \; x_2 \; y' - x_1 \; y_2 \; x' - y_1 \; x_2 \; x']$$

Estos deben restarse a los valores correspondientes g_3^j y h_3^j.

De esta manera se obtienen los coeficientes $\bar{g}_3^j$ y $\bar{h}_3^j$ correspondientes al octipolo residiendo en C.

En coordenadas cartesianas V_3 puede escribirse usando matrices en la forma:

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^5} (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z})\ J + \frac{1}{\bar{r}^7} (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z})\ K \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^5} \bar{X}\ J + \frac{1}{\bar{r}^7} \bar{X}\ K\ \bar{X}'\ \bar{X}' \tag{7}$$

Donde $\bar{X}'$ indica la matriz transpuesta de $\bar{X}$ y K es una matriz de orden de $3 \times 3 \times 3$, o sea una "matriz espacial".

La expresión de los términos de 3er. orden en la ecuación de Gauss es:

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^4} [g_3^0 P_3^0 + (g_3^1 \cos \lambda + h_3^1 \operatorname{sen} \lambda) P_3^1 + (g_3^2 \cos 2\lambda + h_3^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_3^2 +$$
$$+ (g_3^3 \cos 3\lambda + h_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3]$$

O sea, en coordenadas cartesianas

$$V_3 = \frac{1}{\bar{r}^5} \left[-\frac{3}{2} g_3^0 z - \frac{\sqrt{6}}{4} g_3^1 x - \frac{\sqrt{6}}{4} h_3^1 y \right] + \frac{1}{\bar{r}^7} \left[\frac{5}{2} g_3^0 z^3 + \right.$$
$$+ \frac{5}{4} \sqrt{6} g_3^1 x z^2 + \frac{5}{4} \sqrt{6} h_3^1 y z^2 + \frac{\sqrt{15}}{2} g_3^2 x^2 z - \frac{\sqrt{15}}{2} g_3^2 y^2 z +$$
$$+ \sqrt{15}\, h_3^2 x y z + \frac{\sqrt{10}}{4} g_3^3 x^3 - \frac{3}{4} \sqrt{10}\, g_3^3 x y^2 +$$
$$\left. + \frac{3}{4} \sqrt{10}\, h_3^3 x^2 v - \frac{\sqrt{10}}{4} h_3^3 y^3 \right]$$

De donde se obtiene que:

$$J = -\frac{\sqrt{6}}{4} \begin{bmatrix} g_3^1 \\ h_3^1 \\ \sqrt{6}\ g_3 \end{bmatrix} \qquad k = \begin{bmatrix} [k_x] & & \\ & [k_y] & \\ & & [k_z] \end{bmatrix}$$

$$K_x = \begin{bmatrix} {}_1k_1^1 & {}_1k_1^2 & {}_1k_1^3 \\ {}_1k_2^1 & {}_1k_2^2 & {}_1k_2^3 \\ {}_1k_3^1 & {}_1k_3^2 & {}_1k_3^3 \end{bmatrix} ; \quad K_y = \begin{bmatrix} {}_2k_1^1 & {}_2k_1^2 & {}_2k_1^3 \\ {}_2k_2^1 & {}_2k_2^2 & {}_2k_2^3 \\ {}_2k_3^1 & {}_2k_3^2 & {}_2k_3^3 \end{bmatrix} \quad K_z = \begin{bmatrix} {}_3k_1^1 & {}_3k_1^2 & {}_3k_1^3 \\ {}_3k_2^1 & {}_3k_2^2 & {}_3k_2^3 \\ {}_3k_3^1 & {}_3k_3^2 & {}_3k_3^3 \end{bmatrix}$$

Cuyos elementos tienen los siguientes valores:

$${}_1k_1^1 = \frac{\sqrt{10}}{4}\, g_3^3 \qquad {}_1k_1^2 = \frac{1}{4}\sqrt{10}\, h_3^3 \qquad {}_1k_1^3 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, g_3^2$$

$${}_1k_2^1 = \frac{1}{4}\sqrt{10}\, h_3^3 \qquad {}_1k_2^2 = \frac{-1}{4}\sqrt{10}\, g_3^3 \qquad {}_1k_2^3 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, h_3^2$$

$${}_1k_3^1 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, g_3^2 \qquad {}_1k_3^2 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, h_3^2 \qquad {}_1k_3^3 = \frac{5}{12}\sqrt{6}\, g_3^1$$

$${}_2k_1^1 = \frac{1}{4}\sqrt{10}\, h_3^3 \qquad {}_2k_1^2 = \frac{-1}{4}\sqrt{10}\, g_3^3 \qquad {}_2k_1^3 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, h_3^2$$

$${}_2k_2^1 = \frac{-1}{4}\sqrt{10}\, g_3^3 \qquad {}_2k_2^2 = -\frac{\sqrt{10}}{4}\, h_3^3 \qquad {}_2k_2^3 = -\frac{\sqrt{15}}{6}\, g_3^2$$

$${}_2k_3^1 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, h_3^2 \qquad {}_2k_3^2 = -\frac{\sqrt{15}}{6}\, g_3^2 \qquad {}_2k_3^3 = \frac{5}{12}\sqrt{6}\, h_3^1$$

$${}_3k_1^1 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, g_3^2 \qquad {}_3k_1^2 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, h_3^2 \qquad {}_3k_1^3 = \frac{5}{12}\sqrt{6}\, g_3^1$$

$${}_3k_2^1 = \frac{\sqrt{15}}{6}\, h_3 \qquad {}_3k_2^2 = -\frac{\sqrt{15}}{6}\, g_3^2 \qquad {}_3k_2^3 = \frac{5}{12}\sqrt{6}\, h_3^1$$

$${}_3k_3^1 = \frac{5}{12}\sqrt{6}\, g_3^1 \qquad {}_3k_3^2 = \frac{5}{12}\sqrt{6}\, h_3^1 \qquad {}_3k_3^3 = \frac{5}{2}\, g_3^0$$

Se toma ahora V_3 en C y se gira el sistema de referencia aplicando la transformación:

$$\bar{x} = \bar{\bar{X}}\ R$$

RESULTADOS PARA 1955.0

En el presente trabajo se tomarán los valores de los coeficientes g_j^i y h_j^i calculados por H. F. Finch y B. R. Leaton [7] para 1955, y el radio de la Tierra igual a uno,

TABLA I

Año	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	g_2^2	h_2^1	h_2^2
1955	–3055	–227	590	–152	303	158	–190	24

Año	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
1955	118	–191	–45	126	29	91	–9

1 unidad $= 10^{-4}$ oersteds
se obtiene entonces un punto dipolo de momento reducido $m_1 = 3120$ en la dirección

$$\theta_0 = 11° \ 42'$$
$$\lambda_0 = 68° \ 57' \text{ oeste}$$

El punto cuadripolo tiene sus ejes OH_1 y OH_2 en las direcciones:

$$OH_1 : \theta_1 = 75° \ 59'; \qquad \lambda_1 = 153° \ 48'$$
$$OH_2 : \theta_2 = 156° \ 55'; \qquad \lambda_2 = -144° \ 54'$$

y con momento reducido:

$$m_2 = 485$$

El ángulo formado por estos ejes es:

$$V = 92° \ 23'$$

El centro geomagnético C que se va a considerar como centro de coordenadas estará en el punto C (x′, y′, z′) con valores:

$$x' = -367$$
$$y' = 205 \qquad OC = 436$$
$$z' = 118$$

cuyas coordenadas están expresadas en Km.

Los nuevos coeficientes $\bar{g}_2^i$ y $\bar{h}_2^i$ del potencial magnético, con esta traslación del sistema de referencia, toman ahora los siguientes valores:

$$\bar{g}_2^i = g_2^i - a_2^i \ ; \ \bar{h}_2^i = h_2^i - b_2^i$$

TABLA II

Año	a_2^0	a_2^1	a_2^2	b_2^1	b_2^2
1955	−145.30	297.67	−10.24	−151.41	−71.55

O sea los coeficientes de (2) serán:

TABLA III

Año	g_1^0	g_1^1	h_1^1	$\bar{g}_2^0$	$\bar{g}_2^1$	$\bar{g}_2^2$	$\bar{h}_2^1$	$\bar{h}_2^2$
1955	−3055	−227	590	−6.7	5.3	168.2	−38.6	95.5

En esta forma el nuevo cuadripolo tiene momento

$$m_2^1 = 228^*$$

y sus ejes CH_1 y CH_2 tienen las direcciones

$$CH_1 \ : \ \bar{\theta}_1 = 80^\circ\, 54' \ ; \ \bar{\lambda}_1 = 150^\circ\, 23'$$
$$CH_2 \ : \ \bar{\theta}_2 = 97^\circ\, 17' \ ; \ \bar{\lambda}_2 = 239^\circ\, 12'$$

* En la página 154 de la referencia [1], Tabla VII dice para 1955, $m^1_2 = 218$ debiendo decir 228.

siendo perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección del dipolo.
Sus cosenos directores son:

$$\begin{aligned} CH_1 &= (-0.8584\ ,\ \ 0.4881\ ,\ \ 0.1581) \\ CH_2 &= (-0.5079\ ,\ -0.8520\ ,\ -0.1268) \\ -CD &= (\ \ 0.0728\ ,\ -0.1891\ ,\ \ 0.9793) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{V}_1$ de (4) tomará el valor

$$\bar{V}_1 = -\frac{1}{\bar{r}^3}\, 3120\, \bar{\bar{z}}$$

Para $\bar{V}_2$ en la ecuación (3) se tiene

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} 168.2 & 95.5 & 5.3 \\ 95.5 & -168.2 & -38.6 \\ 5.3 & -38.6 & -\sqrt{3}\times 6.7 \end{bmatrix}$$

$$R\ A\ R' = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} -3.9 & 197.4 & 0.4 \\ 197.4 & -3.9 & 0 \\ 0.4 & 0 & -3.8 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\bar{V}_2 = \frac{3}{\bar{r}^3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\bar{r}^5}\,[-3.9\,\bar{\bar{x}}^2 - 3.9\,\bar{\bar{y}}^2 - 3.8\,\bar{\bar{z}}^2 + 2\ (197.4\,\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}} + 0.4\,\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{z}})]$$

O sea

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{\bar{r}^3}\, 197.4 \text{ sen } 2\bar{\bar{\lambda}}\bar{\bar{P}}_2^2$$

$$\bar{\bar{h}}_2 = 197$$

En este último sistema se tiene:
a) Un dipolo en la dirección "$\bar{Z}$" con momento: $m_1 = -3120$
b) Un cuadripolo con ejes: $\bar{C}\bar{H}_1 =$ "$\bar{x}$" y
$\bar{C}\bar{H}_2 =$ "$\bar{y}$" con momento:

$$m_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\bar{\bar{h}}_2^2 = 228$$

Lo que reduce la expresión del potencial a

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = -3120 \frac{1}{\bar{r}^2} \bar{\bar{P}}_1^0 + 197 \frac{1}{\bar{r}^3} \text{ sen } 2\lambda \bar{\bar{P}}_2$$

Para el octipolo se obtienen los siguientes resultados:

$$a_3^0 = -15.04 \qquad b_3^1 = 11.27$$

$$a_3^1 = -18.66 \qquad b_3^2 = -18.99$$

$$a_3^2 = 13.94 \qquad b_3^3 = -5.20$$

$$a_3^3 = -3.96$$

$$\bar{a}_3^0 = -27.88 \qquad \bar{b}_3^1 = -4.31$$

$$\bar{a}_3^1 = -25.58 \qquad \bar{b}_3^2 = -82.53$$

$$\bar{a}_3^2 = 44.68 \qquad \bar{b}_3^3 = -20.03$$

$$\bar{a}_3^3 = 54.19$$

Los que agregados al octipolo c), dan:

$$\bar{g}_3^0 = 130.84 \qquad \bar{h}_3^1 = -29.42$$

$$\bar{g}_3^1 = -184.08 \qquad \bar{h}_3^2 = 95.26$$

$$\bar{g}_3^2 = 92.45 \qquad \bar{h}_3^3 = 5.83$$

$$\bar{g}_3^3 = 32.85$$

Al hacer la rotación en (7) se cambia la notación como se hizo en (3) y se usan matrices espaciales con lo que se tiene:

$$\bar{V}_3 = \frac{1}{\bar{r}^5} \bar{\bar{X}} \text{ R J} + (\bar{\bar{X}} \text{ R K R}' \bar{\bar{X}}' \text{ R}' \bar{\bar{X}}')$$

Resulta:

$$\bar{\bar{\bar{X}}} \text{ R J} = -119 \bar{\bar{x}} - 47.72 \bar{\bar{y}} - 187.40 \bar{\bar{z}}$$

$$\bar{\bar{X}}\ R\ K\ R'\ \bar{\bar{X}}'\ R'\ \bar{\bar{X}}' = 7.03\ \bar{\bar{x}}^3 - 2.54\ \bar{\bar{x}}^2\ y + 103.94\ \bar{\bar{x}}^2\ z +$$

$$-70.99\ \bar{\bar{x}}\ \bar{\bar{y}}^2 + 443.41\ \bar{\bar{x}}\ \bar{\bar{y}}\ \bar{\bar{z}} + 644.94\ \bar{\bar{x}}\ \bar{\bar{z}}^2 +$$

$$+ 21.58\ \bar{\bar{y}}^3 + 12.14\ \bar{\bar{y}}^2\ \bar{\bar{z}} + 176.41\ \bar{\bar{y}}\ \bar{\bar{z}}^2 + 273.67 \bar{\bar{z}}^3$$

Al transformar de nuevo la expresión a coordenadas esféricas con polinomios de Legendre estos 13 coeficientes deben reducirse a los 7 coeficientes g_3^i y h_3^i

Se observa que en la identidad: $a\ P_3 = \frac{1}{2}\ (5a\ z^3 - 3a\ z)$, los coeficientes de z y z^3 están en la razón de -3 a 5, por lo tanto en la ecuación anterior estos términos pueden transformarse en:

$$273.67\ \bar{\bar{z}}^3 - 187.40\ \bar{\bar{z}} = 273.67\ \cos^3 \bar{\bar{\theta}} - 187.40\ \cos \bar{\bar{\theta}} = 215.65\ \cos^3 \bar{\bar{\theta}} -$$

$- 129.30\ \cos \bar{\bar{\theta}} - 58.01\ \cos \bar{\bar{\theta}}\ \mathrm{sen}^2\ \bar{\bar{\theta}}\ (\mathrm{sen}^2\ \bar{\bar{\lambda}} + \cos^2\ \bar{\bar{\lambda}})$ los dos primeros términos se reducen a:

$$\boxed{86.26\ \bar{\bar{P}}_3}$$

Los dos últimos deben agregarse a los términos correspondientes y queda:

$$(103.94 - 58.01)\ \bar{\bar{x}}^2\ \bar{\bar{z}} + (12.14 - 58.01)\ \bar{\bar{y}}^2\ \bar{\bar{z}}$$

$$\boxed{= 23.7\ \cos\ 2\bar{\bar{\lambda}} \bar{\bar{P}}_3^2}$$

Por otra parte:

$$443.41\ \bar{\bar{x}}\ \bar{\bar{y}}\ \bar{\bar{z}} = \boxed{114.5\ \mathrm{sen}\ 2\bar{\bar{\lambda}} \bar{\bar{P}}_3^2}$$

Los 8 términos restantes deben reducirse a 4,

$$- 119\ \bar{\bar{x}} - 47.72\ \bar{\bar{y}} + 7.03\ \bar{\bar{x}}^3 - 2.54\ \bar{\bar{x}}^2\ \bar{\bar{y}} - 70.99\ \bar{\bar{x}}\ \bar{\bar{y}}^2 +$$

$$+ 644.94\ \bar{\bar{x}}\ \bar{\bar{z}}^2 + 21.58\ \bar{\bar{y}}^3 + 176.41\ \bar{\bar{y}}\ \bar{\bar{z}}^2 =$$

$$\boxed{= (214.71\ \cos\ \bar{\bar{\lambda}} + 52.54\ \mathrm{sen}\ \bar{\bar{\lambda}})\ \bar{\bar{P}}_3^1 + (24.67\ \cos\ 3\bar{\bar{\lambda}} - 7.63\ \mathrm{sen}\ 3\bar{\bar{\lambda}})\ \bar{\bar{P}}_3^3}$$

De esta forma se obtiene:

$$\bar{V}_3 = \frac{86.3}{\bar{r}^4} \bar{\bar{P}}_3^0 + \frac{1}{\bar{r}^4} \Big[(214.7 \cos \bar{\bar{\lambda}} + 52.5 \operatorname{sen} \bar{\bar{\lambda}}) \bar{\bar{P}}_3^1 +$$

$$+ (23.7 \cos 2\bar{\bar{\lambda}} + 114.5 \operatorname{sen} 2\bar{\bar{\lambda}}) \bar{\bar{P}}_3^2 + (24.7 \cos 3\bar{\bar{\lambda}} - 7.6 \operatorname{sen} 3\bar{\bar{\lambda}}) \bar{\bar{P}}_3^3 \Big]$$

Es interesante observar el cambio que se produce en los coeficientes del potencial al tomar diferentes sistemas de referencia. Tabla IV. En

TABLA IV

Coeficiente del desarrollo del potencial de Gauss en los diferentes sistemas de referencia.

Coeficiente	Sistema I	Sistema II	Sistema III
g_1^0	–3055	–3055	–3120
g_1^1	–227	–227	0
h_1^1	590	590	0
g_2^0	–152	–7	0
g_2	303	5	0
g_2	158	168	0
h_2^1	–190	–39	0
h_2^2	24	95	197
g_3^0	118	131	86
g_3^1	–191	–184	215
g_3^2	126	95	24
g_3^3	91	33	25
h_3^1	–45	–29	52
h_3	29	93	114
h_3^3	–9	6	–8

el sistema I, se toma como origen de coordenadas el centro de la Tierra 0, considerada esférica y con el eje "oz" en la dirección del Polo Norte geográfico y el plano "xoz" el que determina el meridiano de Greenwich; un sistema arbitrario de acuerdo con el fenómeno que se estudia. Al trasladar el origen del sistema de referencia al centro geomagnético C, sistema II, se obtiene una simplificación considerable y por último, al orientar los ejes de acuerdo con las direcciones del dipolo y cuadripolo, sistema III, se llega a la expresión más sencilla de estos coeficientes lo que justifica plenamente que se use este último sistema de referencia.

Si se analizan los valores medios V_n, tomados sobre toda la superficie de la Tierra y definidos como:

$$|V_n|^2 = \sum_{m=0}^{n} [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] \frac{1}{2n+1}$$

se obtiene para los distintos sistemas de referencia.

	Sistema I	Sistema II	Sistema III
V_1	1801	1801	1801
V_2	188	88	88
V_3	105	100	100

Agradezco a Anselmo Chargoy su colaboración en la revisión del trabajo, así como sus valiosas observaciones.

APENDICE

1. PUNTOS SINGULARES (Multipolos)

Si A_0 es la carga eléctrica en un punto R, la energía potencial en un punto P tal que P R $= r_1$ será:

$$V_0 = A_0 \frac{1}{r_1}$$

Si R es el origen de coordenadas, r_1 será la correspondiente coordenada esférica de P.

Si R no es el origen, $r_1 = [r^2 + h^2 - 2\ rh \cos\theta]^{½}$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2 - 2\frac{h}{r}\cos\theta\right]^{-½}$$

$$V_0 = \frac{A_0}{r}\left\{1 + \frac{h}{r}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{3}{8}\left[4\left(\frac{h}{r}\right)^2 \cos^2\theta - 4\left(\frac{h}{r}\right)^3 \cos\theta + \right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{h}{r}\right)^4 + \ldots\ldots\right]\right\}$$

si $h \doteq 0$, $r \gg h$, se pueden despreciar los términos $\frac{h}{r}$ de mayor grado y dejar

$$V_0 = \frac{A_0}{r} \qquad \text{si} \quad A_0 = a^2\ m_0 \qquad (1)$$

$$\boxed{V_0 = a\left(\frac{a}{r}\right) m_0}$$

Lo que se llama el potencial de un "punto singular" de "orden cero" [8].

Si se toman dos cargas eléctricas $(-A_0)$ en el origen y $(+A_0)$ en un punto R el potencial para un punto P será

$$V_1 = \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r}$$

$$V_1 = A_0 \left\{ \frac{h}{r^2} \cos\theta + \frac{h^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) + \cdots \right\}$$

Si se considera $h \doteq 0$ y $A_0 h = \text{const} = M_1$, en el límite se tendrá:

$$\boxed{V_1 = M_1 \frac{1}{r^2} \cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{h} \cdot \bar{r}}{hr} = \frac{h_x \cdot x + h_y \cdot y + h_z \cdot z}{hr}$$

si $h = (0, 0, h)$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{z}{r}$

y $\qquad V_1 = M_1 \dfrac{z}{r^3} \qquad$ si $\qquad M_1 = a^3 m_1 \qquad$ (2)

$$\boxed{V_1 = a m_1 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos\theta}$$

Lo que se llama potencial de un "punto singular" de "orden uno".

El proceso se puede continuar y así obtener los términos correspondientes al potencial de "puntos singulares" de cualquier orden. Sin embargo se observa que una situación física cualquiera: un polo, dipolo, cuadripolo, etc. siempre da un potencial que contiene expresiones correspondientes a puntos singulares de todos los órdenes a partir de él.

En el caso del magnetismo terrestre se considera un conjunto de cargas distribuidas en forma no conocida pero de manera que

$$\Sigma\, (-m_j) + \Sigma\, (m_i) = 0$$

las cuales dan el campo magnético. La función que da la propiedad del campo es $\dfrac{1}{r_i}$, siendo r_i la distancia del punto P de observación al punto donde reside m_i.

Como se ve en los casos anteriores las expresiones del potencial de cada carga o distribuciones de cargas pueden ser expresadas como funciones de r o sea de la distancia del origen al punto de observación.

Como además estas funciones son lineales es decir, se cumple:

$$V\ (\Sigma\ m_i) = \Sigma\ V\ (m_i)$$

$$V\ (c\ m) = c\ V\ (m)$$

entonces el potencial producido por las distribuciones de cargas que forman distintos multipolos, aparecen en la función potencial del conjunto total como sumas de potenciales de "puntos singulares" de todos los órdenes.

En este caso se considera $f(P) = \frac{1}{r}$ y un desarrollo en serie de Taylor da:

$$V\ (m) = m\ f\ (r_1) = m\ f\ (r) + m \frac{h}{1!} f'\ (r) + m \frac{h^2}{2!} f''\ (r) + \ldots\ldots$$

$$V\ (\Sigma\ m_i) = (\Sigma\ m_i)\ f(r) + (\Sigma\ m_i x_i) \frac{\partial f}{\partial x} + (m_i y_i) \frac{\partial f}{\partial y} +$$

$$(m_1 z_i) \frac{\partial f}{\partial z} + (m_i x_i^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots\ldots$$

Como $\Sigma\ m_i = 0$

$$V\ (\Sigma\ m_i) = \Sigma\ m_i x_i \frac{\partial f}{\partial x} + \ldots\ldots$$

$$= a_1\ f_x + b_1\ f_y + c_1\ f_z + a_{11}\ f_{xx} + a_{12}\ f_{xy} + \ldots\ldots$$

$$+ a_{33}\ f_{zz} + \ldots\ldots$$

$$= (a_1\ b_1\ c_1) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \bar{u} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{zz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \bar{v} + \ldots\ldots$$

Esta expresión en coordenadas cartesianas corresponde a las expresiones de puntos singulares a partir del orden uno, en coordenadas esféricas, de manera que los términos correspondientes a las derivadas de 1º, 2º y 3er. orden son los términos correspondientes a los polinomios de Legendre de orden 1, 2, 3, etc.

Es por lo tanto importante señalar que lo que generalmente se llama expresión de "dipolo", "cuadripolo", etc., son en realidad expresiones de "puntos singulares" de 1er. orden, 2º orden, etc.

2. MOMENTOS REDUCIDOS

En las expresiones de potenciales se observa la conveniencia de introducir el radio *a* de la esfera sobre la cual se están tomando las observaciones como se hizo en (1) y (2) para lo cual se cambia el *momento* por el producto de una potencia de *a* por otro factor al cual se le llama "momento reducido".

Así $M_i = a^{i+2} m_i$ $\quad m_i$ = momento reducido.

De esta manera la función potencial queda expresada como

$$V = a \sum_{n=1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdot m_n \cdot f^{(n)}(r)$$

que en coordenadas esféricas tiene la forma conocida

$$V = a \sum_{n=1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda)\, P_n^m\, (\theta)$$

BIBLIOGRAFIA

1 A. Chargoy y M. G. de Alvarez. Anales del Instituto de Geofísica, U.N.A.M., Vol. 3, pp. 137-156 (1957).
2. M. G. de Alvarez. Anales del Instituto de Geofísica, U.N.A.M., Vol. IX, pp. 1-10 (1963).
3. A. Chargoy. Anales del Instituto de Geofísica, U.N.A.M., Vol. 6, pp. 1-54 (1960).
4. S. Chapman y J. Bartels. Geomagnetism II, 639, Clarendm Press, Oxford (1940).
5. G. Birkhoff. A Brief survey of modern algebra. MacMillan, p. 226.
6. M. G. de Alvarez. Geofísica Internacional, U.G.M. 3 (2): pp. 43-48 (1963).
7. H. F. Finch y B. R. Leaton. Monthly Not. of the Royal Astronomical Society. Geophysical Supplement, Vol. 7, No. 6, pp. 314-317 (1957)
8. J. C. Maxwell. Traité d'électricité et de magnétisme. Gauthier - Villars, p. 223 (1885).