

# PUNTUALIZACIÓN ACERCA DE LAS AMPLITUDES OBSERVADAS ORIGINADAS POR ONDAS DE TIPO COMPRESIONAL

JOSÉ-ANTONIO CANAS\*

## RESUMEN

Una fuente de errores que a menudo se comete en el análisis de ondas compresionales es analizada. Dicha fuente proviene de asignar la amplitud registrada en el sismógrafo, tan solo a la onda compresional incidente sin tener en cuenta los efectos de superficie libre que tienen lugar en el punto de incidencia de la onda.

Se presenta el análisis matemático efectuado y la comparación entre la amplitud real de la onda compresional incidente y la asignada.

## INTRODUCCIÓN

Normalmente en el análisis de observaciones de ondas de tipo P o compresionales no se tiene en cuenta el efecto de superficie libre a la llegada de estas ondas. Esto puede ser particularmente grave en aquellos estudios en los que se utiliza básicamente la amplitud de estas ondas. Estos errores afectan no sólo a las amplitudes de las ondas tratadas por sí solas sino también cuando se comparan amplitudes de distinto carácter de tipo compresional.

En este trabajo se obtendrá una relación entre la amplitud total incidente en el sismógrafo vertical y la amplitud de la onda compresional incidente.

## DESARROLLO A PARTIR DE LAS ECUACIONES BÁSICAS

Sean unos ejes cartesianos centrados en un punto de observación sobre la superficie de la Tierra. El problema se desarrollará en dos dimensiones.

\* Department of Earth and Atmospheric Sciences, Saint Louis University, USA.

Las ecuaciones de onda son:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

donde  $\varphi$  and  $\psi$  son los potenciales asociados con las ondas de carácter compresivo y de cizalla respectivamente y  $\alpha$  y  $\beta$  son las velocidades asociadas con dichas ondas.

Las soluciones son del tipo:

$$\varphi = A e^{ik(x+az-ct)} + A_1 e^{ik(x-az-ct)}$$

$$\psi = B_1 e^{ik(x-bz-ct)}$$

siendo:

A la amplitud de la onda P incidente.

$A_1$  la amplitud de la onda P reflejada.

$B_1$  la amplitud de la onda SV convertida.

$K=2\pi/\lambda$  el número de onda,  $\lambda$  es la longitud de onda.

$a=\tan e$  donde  $e$  es el ángulo de emergencia de la onda P.

$b=\tan f$  donde  $f$  es el ángulo de emergencia de la onda SV.

$c$  la velocidad de fase de la onda en la dirección  $x$ .

Las condiciones de contorno para este problema son:

$$\text{i) } p_{zx} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

$$\text{ii) } p_{zz} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

que pueden ser expresadas como:

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

$$\lambda \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\} + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right\} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (1)$$

La sustitución de las soluciones dentro del sistema (1) conduce a:

$$2aA - 2aA_1 + (b^2 - 1)B_1 = 0$$

$$\{\lambda(1 + a^2) + 2\mu a^2\} A + \{\lambda(1 + a^2) + 2\mu a^2\} A_1 + 2\mu b B_1 = 0 \quad (2)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé.

El sistema (2) nos da la relación entre las amplitudes potenciales y los ángulos de emergencia de las ondas en el punto de observación.

La amplitud y fase registradas por el sismógrafo vertical a la llegada de la onda compresional incidente se debe al movimiento vertical del suelo dado por:

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

La sustitución de las soluciones en la expresión (3) conduce a:

$$u_z = ik(Aa - A_1a - B_1)e^{ik(x-ct)} \quad (4)$$

donde (4) nos da la amplitud compleja y la fase del movimiento.

La amplitud real viene dada por:

$$\tilde{u}_z = k(Aa - A_1a - B_1) \quad (5)$$

Haciendo uso del sistema (2) podemos calcular las expresiones para  $A_1$  y  $B_1$ . Éstas vienen dadas por:

$$A_1 = - \frac{\{\lambda(1+a^2) + 2\mu a^2\}(b^2-1) - 4ab\mu}{\{\lambda(1+a^2) + 2\mu a^2\}(b^2-1) + 4ab\mu} A$$

$$B_1 = - \frac{4a\{\lambda(1+a^2) + 2\mu a^2\}(b^2-1)}{\{\lambda(1+a^2) + 2\mu a^2\}(b^2-1) + 4ab\mu}(b^2-1) A \quad (6)$$

El sistema (6) puede ser expresado como una función de  $a$  y de las velocidades  $\alpha$  y  $\beta$  al hacer uso de las relaciones:

$$\alpha = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}; \beta = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{donde } \rho \text{ es la densidad}$$

y de  $1 + a^2 = c^2/\alpha^2$ ;  $1 + b^2 = c^2/\beta^2$ ; obtenidas estas últimas al sustituir las soluciones en las ecuaciones de ondas.

Así pues:

$$\begin{aligned}
 A_1 = & - \frac{\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 2 \right\} -}{\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 2 \right\} +} \\
 & - \frac{4a\beta^2 \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 1 \right)^{1/2}}{+ 4a\beta^2 \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 1 \right)^{1/2}} \\
 & + \frac{4a\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\}}{\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 2 \right\} +} \\
 & - \frac{2\beta^2}{+ 4a\beta^2 \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 1 \right)^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{7}$$

La sustitución del sistema (7) en relación (5) nos proporciona la expresión final de la amplitud  $\tilde{u}_z$ , ésta es:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_z = kA \ a + & \frac{\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 2 \right\} -}{\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 2 \right\} +} \\
 & - \frac{4a\beta^2 \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 1 \right)^{1/2}}{+ 4a\beta^2 \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 1 \right)^{1/2}} + \\
 & + \frac{4a\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\}}{\{\alpha^2(1+a^2) - 2\beta^2\} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 2 \right\} +} \\
 & + \frac{2\beta^2}{+ 4a \left( \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1+a^2) - 1 \right\}^{1/2} \beta^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

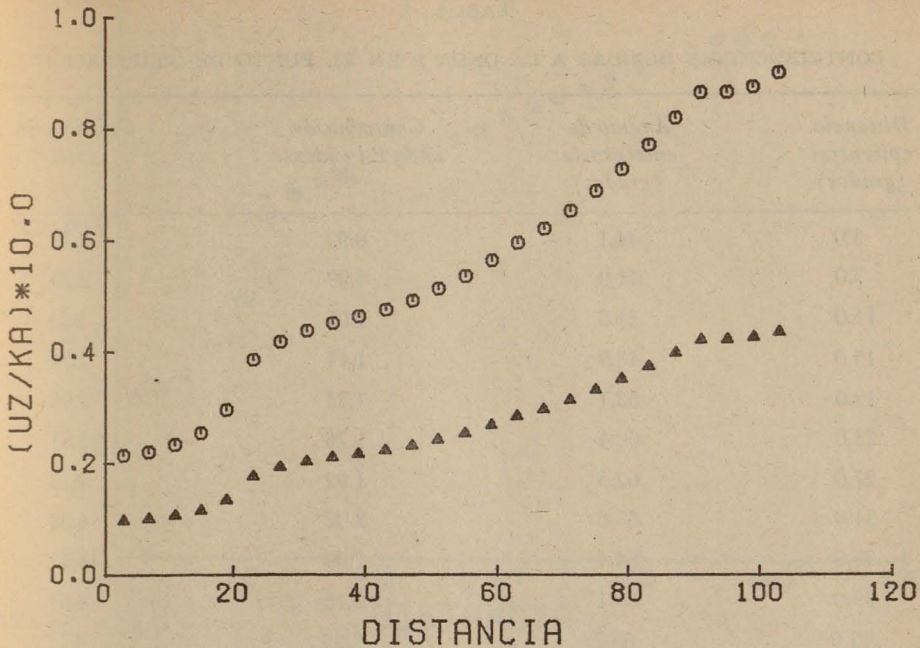


Fig. 1. Contribuciones obtenidas al considerar el primer y los tres sumandos de la expresión (8).

- ▲ Contribución debida al primer sumando.
- Contribución debida a los tres sumandos.

donde el primer sumando nos da la contribución debida a la onda P incidente, el segundo la contribución debida a la onda P reflejada y el tercero la contribución debida a la onda SV convertida.

En la figura 1 y tabla 1 se comparan los resultados obtenidos al considerar el primero y los tres sumandos respectivamente. El modelo utilizado para la obtención de los valores comparados es  $\alpha = 5.6$  km/seg y  $\beta = 3.3$  km/seg.

La relación entre la distancia epicentral y el ángulo de emergencia en el punto de observación se obtiene haciendo uso de la relación  $dT/d\Delta = \frac{r \cos e}{\alpha}$  donde  $r$  es el radio terrestre e igual a 6 371 km y los valores de  $dt/d\Delta$  para cada distancia epicentral se obtiene de las Seismological Tables de Jeffreys-Bullen (1967). En la figura 2 se muestra la relación existente entre estas dos variables.

TABLA 1

CONTRIBUCIONES DEBIDAS A LA ONDA P EN EL PUNTO DE OBSERVACIÓN

<i>Distancia epicentral (grados)</i>	<i>Ángulo de emergencia (grados)</i>	<i>Contribución onda P incidente</i>	<i>Contribución total</i>
3.0	44.1	0.97	2.13
7.0	44.9	0.99	2.20
11.0	46.5	1.05	2.33
15.0	48.9	1.14	2.54
19.0	53.1	1.33	2.96
23.0	60.4	1.76	3.85
27.0	62.5	1.92	4.18
31.0	63.6	2.02	4.38
35.0	64.4	2.09	4.52
39.0	65.1	2.15	4.64
43.0	65.7	2.22	4.77
47.0	66.5	2.30	4.94
51.0	67.4	2.41	5.15
55.0	68.4	2.52	5.38
59.0	69.5	2.67	5.67
63.0	70.5	2.83	5.98
67.0	71.3	2.96	6.23
71.0	72.2	3.12	6.54
75.0	73.1	3.30	6.89
79.0	74.0	3.50	7.28
83.0	74.9	3.72	7.71
87.0	75.8	3.97	8.20
91.0	76.6	4.19	8.64
95.0	76.7	4.21	8.70
99.0	76.8	4.25	8.74
103.0	77.1	4.34	8.87

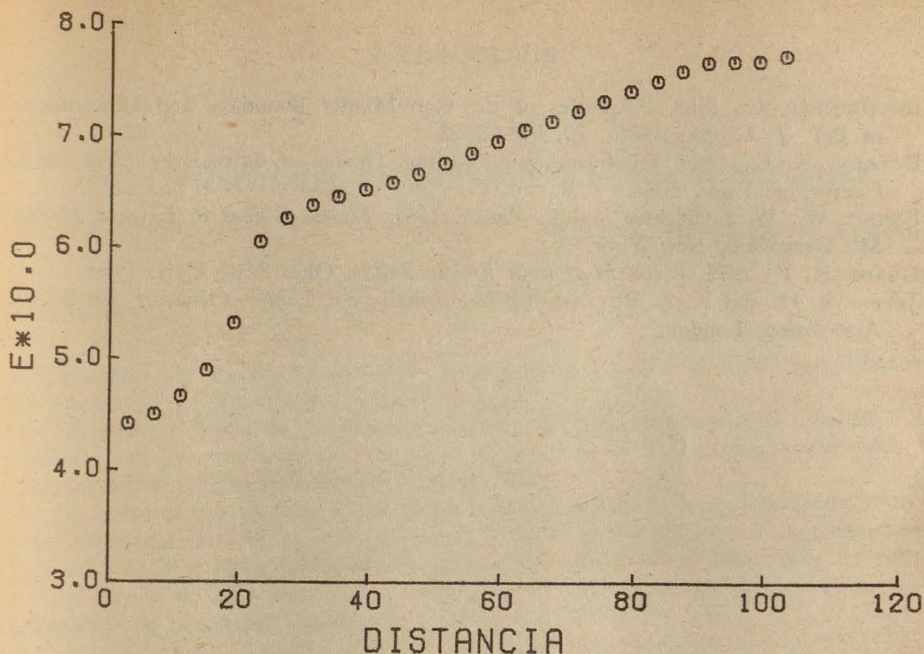


Fig. 2. Relación existente entre las distancias epicentrales y los ángulos de emergencia correspondientes para la onda P.

#### CONCLUSIONES

Es necesario que en todos los casos en que las amplitudes de las ondas compresionales son básicas para cualquier tipo de estudio, se tenga en cuenta el efecto de superficie libre que tiene lugar en el punto de observación, ya que la omisión de este efecto asigna a la amplitud de la onda P incidente aproximadamente el doble de su amplitud real. El resultado de la omisión es la asignación de erróneas conclusiones en trabajos de investigación en que estas ondas entran en juego.

#### AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento al Dr. Bruce A. Bolt, director de las Estaciones Sismográficas de la Universidad de Berkeley, California, por las discusiones con él mantenidas sobre este tema.

## BIBLIOGRAFÍA

- BUCHBINDER, G., 1968. Properties of the Core-Mantle Boundary and Observations of PcP. *J. Geophys. Res.*, 73, 5901-5923.
- BULLEN, K. E., 1963. *An Introduction to the Theory of Seismology* (3rd. ed.), Cambridge Univ. Press.
- EWING, W., W. JARDETZKY and F. PRESS, 1957, *Elastic Waves in Layered Media*. Mc Graw-Hill, New York.
- GRAFF, K. F., 1975. *Wave Motion in Elastic Solids*. Ohio State Univ. Press.
- JEFFREYS, H. and K. E. BULLEN, 1967. *Seismological Tables*. Office of the British Association, London,