

# UNA NUEVA EXPRESION TEORICA DE LA RESISTIVIDAD APARENTE EN EL PROBLEMA GEOFISICO DE LAS DOS CAPAS

POR EL ING. ALFONSO DE LA O. CARREÑO

PROFESOR DE "METODOS GEOFISICOS DE EXPLORACION", EN LA ESCUELA NACIONAL DE INGENIEROS DE LA U. N. A., JEFE DE LA OFICINA DE GEOLOGIA DE LA COMISION NACIONAL DE IRRIGACION.

(Trabajo presentado ante el Primer Congreso N. de Matemáticas. Saltillo, Coah., novbre. de 1942)

En numerosos casos de la Geología aplicada a la Ingeniería, así como en la Hidrología Subterránea y en la Geología Estructural, se presenta el llamado problema de las dos capas, o formaciones superpuestas de propiedades físicas diferentes, siendo el espesor de la capa superior finito, mientras que el de la inferior es considerable a profundidad, como acontece, por ejemplo, cuando sobre un lecho rocoso descansa un relleno de materiales aluviales. En realidad existe una tercera capa sobre las consideradas, que es la atmósfera.

El problema es averiguar indirectamente, es decir, sin excavaciones ni perforaciones, la profundidad a que se encuentra la capa inferior, y esto lo resuelve la Geofísica Aplicada, valiéndose de los contrastes o diferencias entre las propiedades físicas de ellas, como las elásticas y las eléctricas. Partiendo del potencial de un campo eléctrico estable, generado por una corriente continua y cuya teoría puede también aplicarse a campos generados por corriente alterna, en los que el "skin effect" y la polarización elíptica pueden desprejarse (campos cuasi estables), es posible resolver el problema enunciado, si se determina la función que da la variación a profundidad de la llamada resistividad aparente, función que debe interpretarse, como se dice en Geofísica, en

cada caso particular, para encontrar la profundidad buscada. La forma de esta función depende, a su vez, de la que da la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, dentro del campo eléctrico, que es provocado artificialmente, cuya posición en cada sistema de investigación se controla.

Precisamente, escogiéndose varios de estos sistemas o dispositivos de operación se han propuesto varias soluciones, como las de Wenner-Neumann (1) (2), Wenner-Neumann-Lee (3), etc.; la que ahora propongo en el presente estudio no he visto que haya sido dada a conocer anteriormente.

Supongamos que la capa de espesor finito ( $h$ ) (Fig. 1), está limitada por los planos AB y CD. Sobre la superficie de separación AB se extiende la atmósfera y bajo la CD, la capa inferior que consideraremos de espesor infinito. Además dichas capas se consideran infinitas en cualquier dirección horizontal. Para nuestro estudio las consideraremos homogéneas e isotrópicas en sí, pero de propiedades eléctricas diferentes, caracterizadas por sus resistividades  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  o sus recíprocas, las conductibilidades  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Supongamos ahora que en dos puntos,  $E_1$  y  $E_2$ , de la superficie AB, muy distantes entre sí, colocamos dos contactos

o electrodos y los unimos por medio de un conductor en cuyo trayecto hemos intercalado una fuente de energía eléctrica capaz de darnos una corriente estable de intensidad (I), a una cierta tensión entre los punto-electrodos E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub>; en estas condiciones se establecerá entre ambos un campo a través de las capas, y cuyas equipotenciales y líneas de flujo se distribuirán de acuerdo con las características de dichas capas y de la profundidad (h). Si no existiera la capa inferior, es decir, que (h) fuera infinita y la resistividad del medio superior también fuera infinita, como se considera para la atmósfera en esta clase de problemas, tendríamos el caso de un campo normal en un semimedio infinito.

Midamos ahora la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie AB, como P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> que para fijar las ideas supondremos en línea recta con E<sub>1</sub> (Fig. 2), y de tal modo que dicha línea forme un

ángulo de 90° con la que une los punto-electrodos E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub>, semejante al sistema que se usa en las medidas de relaciones de caídas de potencial (4) (5), en cuyo caso se utilizan tres electrodos en vez de dos. Se demuestra que si ρ<sub>a</sub> es la resistividad del medio formado por las dos capas, el valor del potencial en cada uno de los puntos P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> tendrá la forma general siguiente, siendo (a) la distancia entre P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>, r la distancia media a E<sub>1</sub> y l la que existe entre E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub>.

$$V_{P_1} = \frac{\rho_a I}{2\pi} \left( \frac{1}{r - \frac{a}{2}} - \frac{1}{\sqrt{(r - \frac{a}{2})^2 + l^2}} \right)$$

$$V_{P_2} = \frac{\rho_a I}{2\pi} \left( \frac{1}{r + \frac{a}{2}} - \frac{1}{\sqrt{(r + \frac{a}{2})^2 + l^2}} \right)$$

Y su diferencia:

$$\Delta V = V_{P_1} - V_{P_2} = \frac{\rho_a I}{2\pi} \left( \frac{a}{r - (\frac{a}{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{(r + \frac{a}{2})^2 + l^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r - \frac{a}{2})^2 + l^2}} \right) \quad (\alpha)$$

Esta expresión es un caso particular de la ecuación general siguiente, que depende de las relaciones de la separación entre P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>, con las distancias a los puntos E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> (Fig. 3):

$$\rho_a = 2\pi a \left( \left( \frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\Delta V}{I} \quad (\gamma)$$

$$\Delta V = \frac{\rho_a I}{2\pi a} \left[ \frac{a}{r_{11}} - \frac{a}{r_{12}} - \left( \frac{a}{r_{21}} - \frac{a}{r_{22}} \right) \right]$$

Siempre se procura que el punto-electrodo (E<sub>2</sub>) se encuentre a una distancia muy grande, de tal modo que su influencia, en la anterior diferencia, sea muy pequeña, de modo que si en la anterior ecuación hacemos l = ∞, obtendremos:

$$\Delta V = \frac{\rho_a I}{2\pi} \frac{a}{r^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\rho_a I}{2\pi a} \frac{1}{\left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]} \quad (\beta)$$

Y de aquí el valor de la resistividad aparente:

Hasta aquí sólo hemos obtenido la forma general de ρ<sub>a</sub> en función de ΔV; procederemos ahora a calcular esta diferencia de potencial en función de las propiedades de las capas consideradas, siguiendo a Hummel (12) (6) y Lancaster-Jones (7), en su aplicación de la teoría de las imágenes eléctricas de Maxwell y Lord Kelvin, en otros casos semejantes; para lo cual consideraremos los planos de separación AB y CD como espejos que pueden sucesivamente reflejar, totalmente o en parte, o no reflejar, el punto-fuente E<sub>1</sub>, que ministra la intensidad (I).

Las reflexiones sucesivas de (I) dan un número infinito de imágenes cada vez más débiles, cuya fuerza depende de los coeficientes de reflexión eléctricos de la capa intermedia, respecto a los planos AB y

CD, y que tienen por valor, respectivamente:

$$\text{Para AB, } K_0 = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0}$$

$$\text{Para CD, } K_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

que para todas las combinaciones de los valores de las resistividades varían entre (+1) aislador perfecto y (-1) conductor perfecto.

Entonces el potencial en un punto cualquiera del medio considerado, será igual

$$V = \frac{\rho}{2\pi} \left[ \frac{I}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{I K_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2h)^2}} + \frac{I K_2 K_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2h)^2}} + \frac{I K_2^2 K_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 4h)^2}} + \frac{I K_2^2 K_0^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 4h)^2}} + \dots + \frac{I K_2^n K_0^{n-1}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2nh)^2}} + \frac{I K_2^n K_0^n}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2nh)^2}} \right]$$

$$V = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n K_0^{n-1}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2nh)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n K_0^n}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2nh)^2}} \right] \quad (\delta)$$

n, número de reflexiones.

En general, el potencial es una función continua, por lo que toca al elemento distancia, una vez establecidas ciertas condiciones particulares del medio y el valor de la intensidad (I), debiendo satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0 \quad (\epsilon)$$

(Ver apéndice)

a la suma infinita de los que corresponden a (I) y a todas sus imágenes, esto es:

$$V = \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{r_n}$$

siendo  $I_n$  cualquiera de las imágenes de (I), o ella misma, y  $r_n$  la distancia de cada imagen al punto considerado. Apliquemos estos conceptos a un punto cualquiera, como P, de la capa intermedia, tomando como origen de coordenadas el punto-fuente real  $E_1$ , el plano de las (XY), el mismo AB y el eje (Z) normal a él; si las coordenadas de P son (x, y, z), tendremos:

Aplicando la ecuación (δ) a los dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , que nos interesan, teniendo en cuenta, según ya dijimos, que para la atmósfera se considera ( $\rho_0$ ) infinita y, por lo mismo,  $K_0 = 1$ , tendremos:

$$V_{P_1} = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r - \frac{a}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n}{\sqrt{(r - \frac{a}{2})^2 + (2nh)^2}} \right]$$

$$V_{P_2} = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r + \frac{a}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n}{\sqrt{(r + \frac{a}{2})^2 + (2nh)^2}} \right]$$

La diferencia buscada será:

$$\Delta V = V_{P_1} - V_{P_2} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{a}{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n}{\sqrt{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2 + (2nh)^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n}{\sqrt{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 + (2nh)^2}} \right]$$

$$\Delta V = \frac{\rho_1 I}{2\pi a} \left[ \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n}{\sqrt{\left(\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n}{\sqrt{\left(\frac{r}{a} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} \right] (\theta)$$

Substituyendo este valor en la ecuación ( $\gamma$ ), que da la resistividad aparente, obtenemos, finalmente:

$$\rho_a = 2\pi a \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \frac{\Delta V}{I} = \rho_1 \left\{ 1 + 2 \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{K_2^n}{\sqrt{\left(\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2n\frac{h}{a}\right)^2}} - \frac{K_2^n}{\sqrt{\left(\frac{r}{a} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2n\frac{h}{a}\right)^2}} \right] \right\} (i)$$

Esta ecuación resuelve nuestro problema; se ve que si  $h \Rightarrow \infty$ , la resistividad aparente  $\rho_a$ , se reduce a  $\rho_1$  de la primera capa, como era de esperarse.

Nuestra ecuación está dada en función de las propiedades eléctricas de las dos capas, o sea de sus resistividades  $\rho_1$  y  $\rho_2$  y de las relaciones  $r/a$  y  $h/a$ . Las magnitudes  $r$  y  $a$  se conocen, pues se miden en el terreno; es posible, en la interpretación, prescindir de los valores reales o directos de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . La profundidad desconocida ( $h$ ), que tiene un valor determinado en cada caso, se determinará, indirectamente, por medio de varios artificios matemáticos, partiendo de la curva de resistividad aparente.

Como en la determinación de  $\rho_a$  a profundidad, lo que controla esta profundidad es precisamente la distancia ( $r$ ), en general, se aumenta ésta paulatinamente, a partir del punto medio ( $M$ ), entre  $P_1$  y  $P_2$ , que queda fijo en el terreno, para lo cual se mueve el electrodo  $E_1$  en una línea recta. La distancia ( $a$ ) puede permanecer constante, pero la relación ( $r/a$ ) variará y la interpretación será más complicada; es preferible hacer constante la relación ( $r/a$ ), de tal modo que permaneciendo fijo el punto medio ( $M$ ), no sólo se mueva el punto electrodo  $E_1$ , sino también  $P_1$  y  $P_2$ , simétricamente a  $M$  y en línea con  $E_1$ , de modo que la distancia ( $a$ ) guarde siempre una relación constan-

te con ( $r$ ), pueden escogerse los valores  $r/a = 5$  y  $r/a = 2.5$ . Para estos valores particulares nuestra ecuación (i), toma las expresiones siguientes:

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 1 + 49.5 \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n \left[ \frac{1}{\sqrt{20.25 + (10n\frac{h}{r})^2}} - \frac{1}{\sqrt{30.25 + (10n\frac{h}{r})^2}} \right]$$

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n \left[ \frac{1}{\sqrt{4 + (5n\frac{h}{r})^2}} - \frac{1}{\sqrt{9 + (5n\frac{h}{r})^2}} \right]$$

Dando diversos valores a la relación  $h/r$ , por ejemplo, de 0 a 2, cada dos décimos, haciendo variar a  $K_2$  de modo semejante entre (+1) y (-1), pueden prepararse tablas y gráficas que den los valores de  $\frac{\rho_a}{\rho_1}$ , que servirán para encontrar ( $h$ ), partiendo cada vez de la curva de resistividad aparente observada, como en el procedimiento de Tagg (8), o bien tratando la solución por otros procedimientos, como el segundo de Tagg (9), o los de Rosenzweig (11), o de Longacre (11).

Se da una gráfica de la variación de  $\frac{\rho_a}{\rho_1}$  en función de la penetración relativa  $\frac{P}{h}$  cuando  $\frac{r}{a} = 5$

Si en la ecuación (i) damos a la relación  $r/a$  el valor particular  $3/2$ , caso en el cual el punto  $P_1$  está a la misma distancia ( $a$ ) de  $E_1$  y  $P_2$ , obtenemos:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n \left[ \sqrt{\frac{1}{1+(2n\frac{h}{a})^2}} - \sqrt{\frac{1}{4+(2n\frac{h}{a})^2}} \right]$$

Que es la ecuación de Hummel (12) y Lancaster-Jones (6), en el problema de

las dos capas para el sistema de electrodos mencionado y para el de los cuatro punto-electrodos en línea recta y equidistantes entre sí, de Wenner-Neumann, anteriormente citado.

VERIFICACION DE QUE LA EXPRESION (6) DEL POTENCIAL (V), SATISFACE LA ECUACION DE LAPLACE

Tenemos:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{X^2 + Y^2 + Z^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n K_0^{n-1}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + (Z-2nh)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n K_0^n}{\sqrt{X^2 + Y^2 + (Z+2nh)^2}} \right]$$

Las coordenadas son las únicas variables en esta ecuación, por lo tanto, las primeras derivadas parciales serán:

$$\frac{\delta V}{\delta X} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{-X}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X K_2^n K_0^{n-1}}{[X^2 + Y^2 + (Z-2nh)^2]^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X K_2^n K_0^n}{[X^2 + Y^2 + (Z+2nh)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\frac{\delta V}{\delta Y} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{-Y}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y K_2^n K_0^{n-1}}{[X^2 + Y^2 + (Z-2nh)^2]^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y K_2^n K_0^n}{[X^2 + Y^2 + (Z+2nh)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\frac{\delta V}{\delta Z} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{-Z}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Z-2nh) K_2^n K_0^{n-1}}{[X^2 + Y^2 + (Z-2nh)^2]^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Z+2nh) K_2^n K_0^n}{[X^2 + Y^2 + (Z+2nh)^2]^{3/2}} \right\}$$

Y las segundas derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} = & \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{3X^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n K_0^{n-1} \left[ \frac{3X^2}{[X^2 + Y^2 + (Z-2nh)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[X^2 + Y^2 + (Z-2nh)^2]^{3/2}} \right] + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n K_0^n \left[ \frac{3X^2}{[X^2 + Y^2 + (Z+2nh)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[X^2 + Y^2 + (Z+2nh)^2]^{3/2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} &= \frac{\rho I}{2\pi} \left\{ \frac{3y^2}{(X^2+y^2+Z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(X^2+y^2+Z^2)^{3/2}} + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n K_0^{n-1} \left[ \frac{3y^2}{[X^2+y^2+(Z-2nh)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[X^2+y^2+(Z-2nh)^2]^{3/2}} \right] + \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n K_0^n \left[ \frac{3y^2}{[X^2+y^2+(Z+2nh)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[X^2+y^2+(Z+2nh)^2]^{3/2}} \right] \right\} \\ \frac{\delta^2 V}{\delta Z^2} &= \frac{\rho I}{2\pi} \left\{ \frac{3Z^2}{(X^2+y^2+Z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(X^2+y^2+Z^2)^{3/2}} + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n K_0^{n-1} \left[ \frac{3(Z-2nh)^2}{[X^2+y^2+(Z-2nh)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[X^2+y^2+(Z-2nh)^2]^{3/2}} \right] + \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} K_2^n K_0^n \left[ \frac{3(Z+2nh)^2}{[X^2+y^2+(Z+2nh)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[X^2+y^2+(Z+2nh)^2]^{3/2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente estas tres últimas ecuaciones, fácilmente se ve que el resultado es igual a cero, esto es:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta Z^2} = 0$$

**SOBRE LA CONVERGENCIA DE LAS SERIES QUE INTERVIENEN EN LA EXPRESION (i) DE LA RESISTIVIDAD APARENTE.**

Puesto que la única variable, fijadas las condiciones en cada caso, es (n), podemos

expresar cualesquiera de las series como sigue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^n}{\sqrt{A+Bn^2}}$$

$K_2$ , como sabemos, varía entre (+1) y (-1), y, por lo tanto, habrá una serie de términos todos positivos, y otra de términos alternados, positivos y negativos

Primer caso.

Criterio de d'Alambert:

Para dos términos de rangos (n) y (n + 1), la relación de d'Alambert será:

$$\text{Log}(n)^{\frac{1}{n}} = \frac{\text{Log } n}{n}$$

$$R = K_2 \frac{\sqrt{A+Bn^2}}{\sqrt{A+B(n+1)^2}} = K_2 \frac{\sqrt{\frac{A}{n^2} + B}}{\sqrt{\frac{A}{n^2} + B(1+\frac{1}{n})^2}}$$

Y también:

$$\text{Log } n = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \dots$$

Si  $n \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow K_2$ . El límite máximo de  $K_2$  es (+ 1).

Entonces:

$$\text{Log}(n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n^4}\right)^3 + \dots$$

Criterio de Cauchy:

El radical de Cauchy, para un término de rango (n) será:

$$\sqrt[n]{C} = \frac{K_2}{(A+Bn^2)^{\frac{1}{2n}}} = \frac{K_2}{n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{A}{n^2} + B\right)^{\frac{1}{2n}}}$$

El segundo factor del denominador  $\rightarrow 1$  si  $n \rightarrow \infty$ . También esto sucede con el otro factor  $n^{\frac{1}{n}}$ , y, por lo tanto, el límite del radical es  $K_2$ .

Claramente se ve que al desarrollar las potencias queda una serie de términos con numerador constante y en el denominador (n) a potencias sucesivas, si  $n \rightarrow \infty$  la serie tenderá a cero, es decir, que el límite de  $\text{Log}(n)^{\frac{1}{n}}$  si  $n \rightarrow \infty$  es cero, y por lo tanto, el límite de  $(n)^{\frac{1}{n}}$  será la unidad.

Refiriéndome al término  $n^{\frac{1}{n}}$  podemos poner:

Criterio de Duhamel:

El producto que fija el criterio será:

$$n \left[ \frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{A+B(n+1)^2}{A+Bn^2}} - 1 \right] = n \left[ \frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{\frac{A}{n^2} + B(1+\frac{1}{n})^2}{\frac{A}{n^2} + B}} - 1 \right]$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , este producto tiende a  $n^{\frac{1-K_2}{K_2}}$  siempre mayor que la unidad.

se ve que el numerador del radical tiende al infinito y el denominador tiende a cero porque  $K_2$  es una fracción cuyo valor máximo es ( $\pm 1$ ).

De las anteriores consideraciones se deduce la convergencia de la serie.

A mayor abundamiento, si la serie con términos positivos es convergente, la misma serie con términos alternados también lo será.

Segundo caso:

Se trata de una serie de términos alternados, de signo (+) y (-), que dependen de que la potencia de  $K_2$  sea par o impar; como se sabe, puede afirmarse la convergencia de la serie, si el término general tiende a cero, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Tenemos el término general:

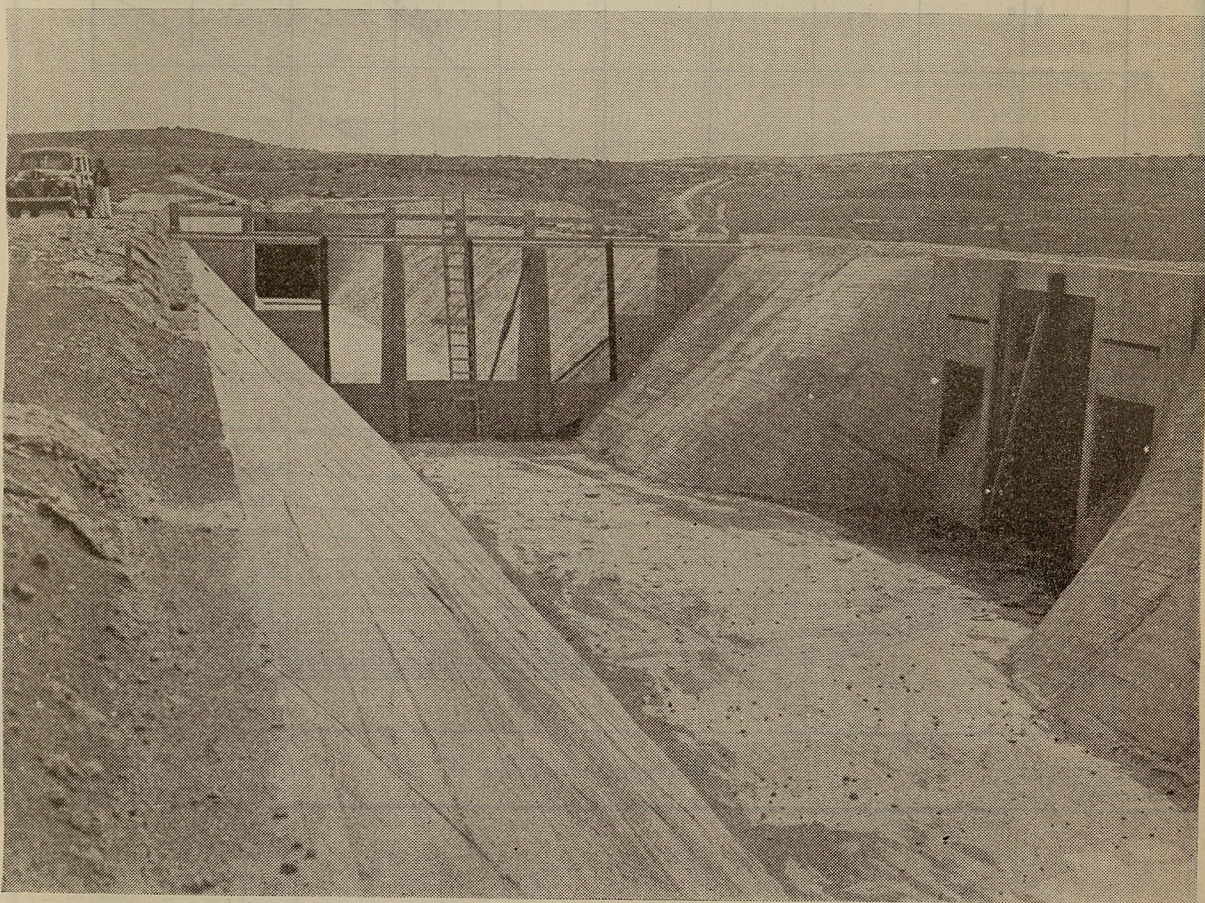
$$\frac{K_2^n}{\sqrt{A+Bn^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{A+Bn^2}{K_2^{2n}}}}$$

Por doble razón el denominador tiende al infinito, si  $n \rightarrow \infty$  y, por lo mismo, el término general tiende a cero. En efecto,

### BIBLIOGRAFIA QUE SE CITA EN EL TEXTO CON NUMEROS ENTRE PARENTESIS.

1. F. Wenner: A Method of Measuring Earth Resistivity. U. S. Bureau of Standards, Scientific Paper 258 (1915).
2. J. Koenigsberger: Aufsuchung von Wasser mit geophysicalischen Methoden. Ergänzungs-Hefte für angewandte Geophysik, Bd. 3, Heft 4 (1933). Leipzig.
3. F. W. Lee: Measuring the Variation of Ground Resistivity with a Meg-

- ger. U. S. Bureau of Mines, Technical Paper 440 (1928).
4. Hans Lundberg and Theodor Zuschlag: A New Development in Electrical Prospecting. Geophysical Prospecting, A. I. M. E. (1932).
  5. Z. Mitera: A Theoretical and Experimental Examination of the Potential Drop Ratio Method. Quarterly of the Colorado School of Mines, Vol. XXXII, N° 1 (1932-1936).
  6. J. N. Hummel: Die elektrischen Methoden der angewandten Geophysik. Handbuch der experimentalphysik. Geophysik, 3 Teil, Leipzig (1930).
  7. E. Lancaster-Jones: The Earth Resistivity Method of Geophysical Prospecting. Mining Magazine 1930.
  8. G. F. Tagg: Interpretation of Resistivity Measurements. Geophysical Prospecting, A. I. M. E. (1934).
  9. G. F. Tagg: Interpretation of Earth-resistivity Curves. Geophysics, A. I. M. E. (1940).
  10. I. E. Rosenzweig: A New Method of Determination in Earth-resistivity Measurements. Geophysics, A. I. M. E. (1940).
  11. W. A. Longacre: Study of the Problem of Depth Determination by Means of Earth-resistivity Measurements. Technical Publication N° 1932, A. I. M. E. (1941).
  12. J. N. Hummel. A Theoretical Study of Apparent Resistivity in Surface Potential Method. Geophysical Prospecting, A. I. M. E. (1932).
- A. I. M. E.: American Institute of Mining and Metallurgical Engineers. (New York)



#### NUESTRA PORTADA

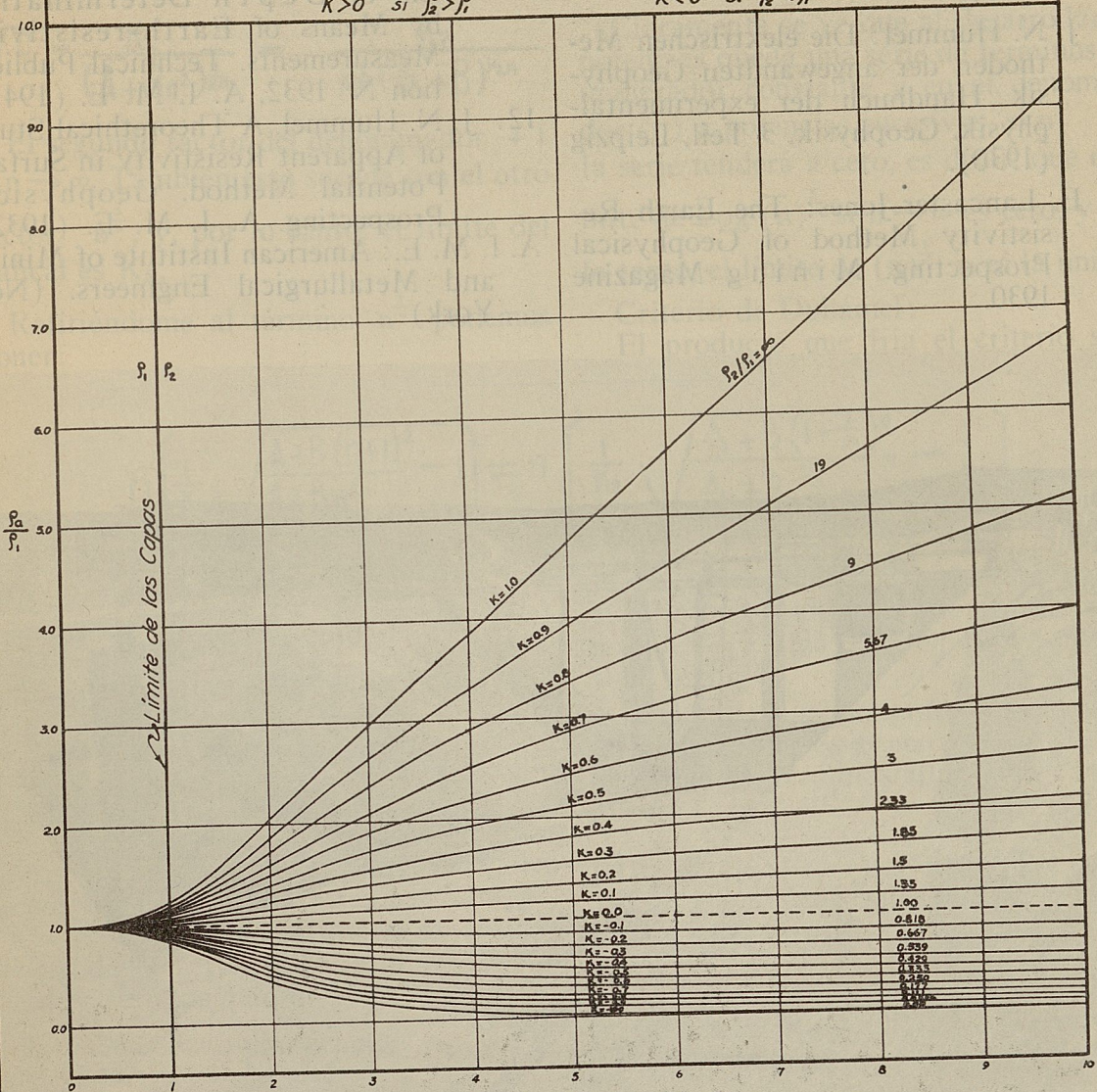
Canal Principal: Tramo del Canal, anterior al Sifón de La Trasquila, viéndose en primer término a la derecha, el Desfogue Km. 5+424 y en el centro La Represa Km. 5+444, ya terminados; al fondo la entrada al Sifón de La Trasquila.

VARIACION DE LA RELACION  $\frac{P_2}{P_1}$  EN FUNCION DE LA PENETRACION RELATIVA  $\frac{r}{h}$ , CUANDO EN LA ECUACION DEL ING. DE LA O,  $\frac{r}{a} = 5$ ;

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + 49.5 \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left[ \frac{1}{\sqrt{20.25 + (10n \frac{r}{h})^2}} - \frac{1}{\sqrt{30.25 + (10n \frac{r}{h})^2}} \right]$$

$K > 0$  si  $P_2 > P_1$

$K < 0$  si  $P_2 < P_1$



Calcularon:  
ING. RAUL OLIVEROS G.  
ING. ALFREDO FRANCO U.

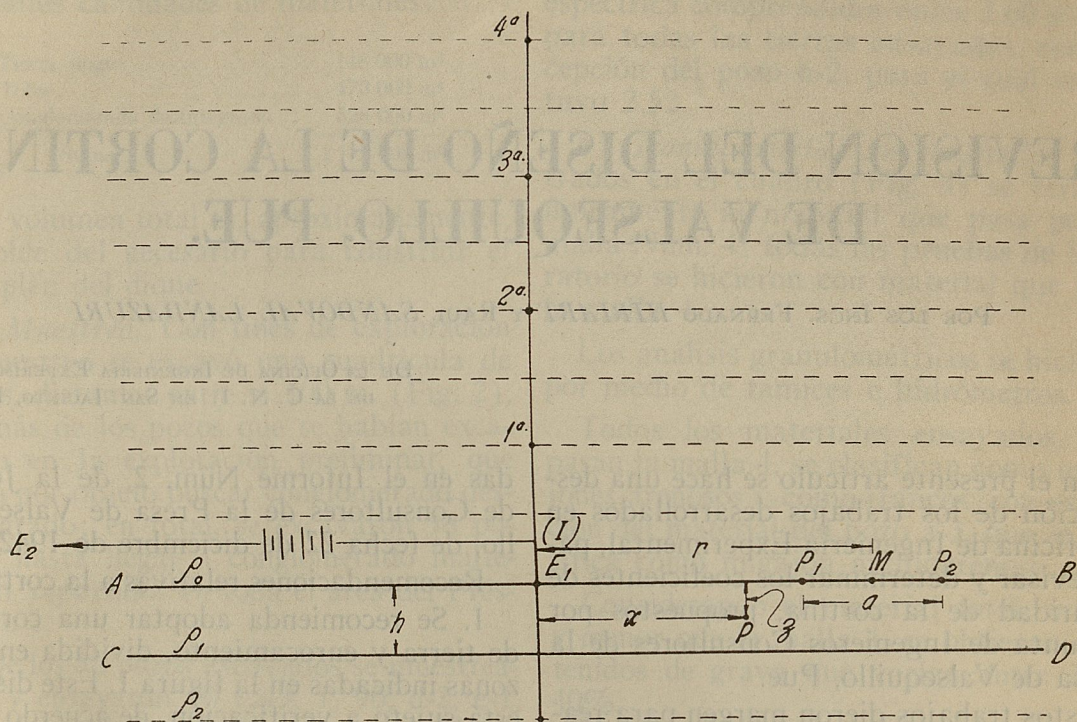


Fig. 1

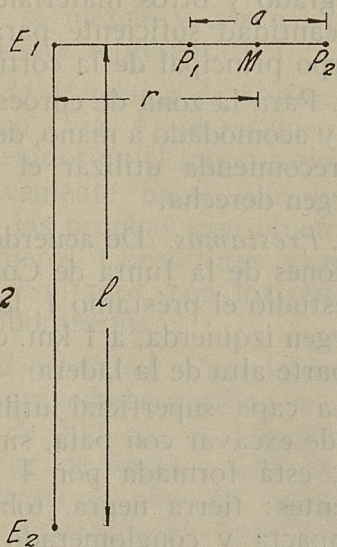


Fig. 2

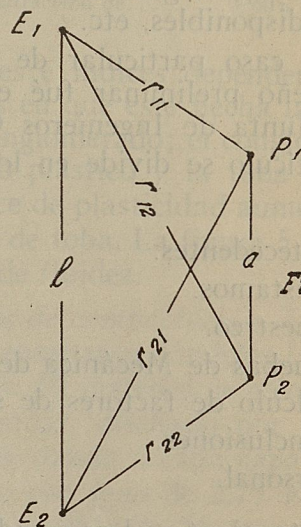


Fig. 3

Ing. Alfonso de la O