Flujo en los Materiales de Tierra Anisótropos

Por LEONARDO ZEEVAERT S. M. I. C.

Ingeniero Consultor de la Oficina de Ingeniería Experimental de la C. N. I.

GENERALMENTE el material en una estructura de tierra no queda homogéneo, debido a que es depositado en capas horizontales y compactado únicamente en el sentido vertical. Esto ocasiona la estratificación del material, resultando diferentes coeficientes de permeabilidad en el sentido vertical que en el horizontal. Si el flujo dentro de la estructura de tierra se conserva laminar y, por lo tanto, sigue siendo válida la Ley de Darcy en ambos sentidos, entonces el problema para el trazado de la red de flujo, se puede resolver como sigue:

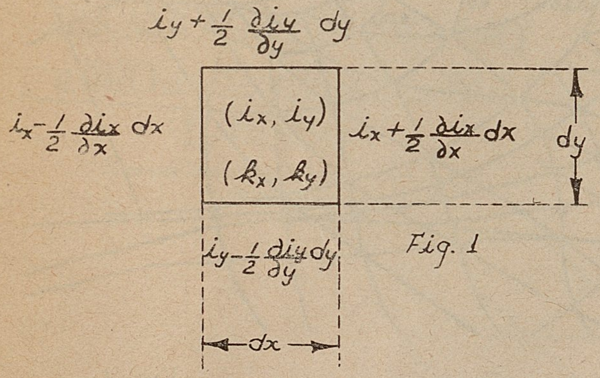


Fig. 1

Sea Fig. Núm. 1, un elemento tan pequeño como se quiera, tomado del material en cuestión. Llamaré i_x, k_x, y i_y, k_y, los gradientes y permeabilidades en el sentido x e y respectivamente, entonces, el incremento de gasto que pasa por el elemento infinitesimal será:

$k_x \frac{\partial i_x}{\partial x} dxdy + k_y \frac{\partial i_y}{\partial y} dx.dy = \triangle q$ y puesto que la misma cantidad de agua que entra debe de salir si el flujo es continuo, resulta que $\triangle q = 0$, luego la condición de continuidad del flujo es:

$$\frac{k_x}{k_y} \cdot \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = 0$$

Si $h = f_1 (x, y)$ es la función potencial, se tiene que $i_x = \frac{\partial h}{\partial x}$, $i_y = \frac{\partial h}{\partial y}$ serán las componentes del gradiente hidráulico, por consiguiente:

$$\frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \text{..............} \quad (1)$$

cuando $k_x = k_y$ el material es isótropo, el problema se reduce a resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2 h = 0$ que en combinación de $\nabla^2 \varphi = 0$ (en donde $\varphi = f_2$ (x, y) es la función de flujo), nos da un sistema de curvas ortogonales entre sí, es decir, la familia de curvas equipotenciales "h" es ortogonal al sistema de curvas de flujo.

La solución de este sistema de curvas se puede llevar a cabo por varios procedimientos ya conocidos. *

Para resolver el problema de material anisótropo, habrá que transformar la ecuación (1) en una ecuación de solución práctica conocida, en este caso será suficiente hacer $\frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_0^2}$ en donde x_0 es una nueva variable independiente sobre el eje de las X's, por consiguiente, se tendrá la siguiente ecuación de Laplace que se puede resolver por los procedimientos usuales. La función de flujo $\nabla^2 \varphi = 0$ en el sistema transformado también satisface la ecuación de Laplace.

Escala de transformación

De la expresión

$$\frac{kx}{ky} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_0^2}$$

se tiene $x_0 = x \sqrt{\frac{ky}{kx}}$ ya que

* Véase la Revista de Ingeniería, Vol. XII núm. 2, Feb. 1º de 1941, artículo por el autor, y el del Ing. Miguel Urquijo M. que aparece en este número de la Revista, página 104 y siguientes.

$$\frac{\delta h}{\delta x_0} = \frac{\delta h}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta x_0}, \quad \text{como} \quad \frac{\delta x}{\delta x_0} = \text{const},$$

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x_0^2} = \frac{\delta^2 h}{\delta x^2} \cdot \left[\frac{\delta x}{\delta x_0}\right]^2$$

por consiguiente:

$$\therefore \left[\frac{\delta x}{\delta x_0}\right]^2 = \frac{k_x}{k_y} \therefore x_0 = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}\, x \text{ ....(2)}$$

En la red real del sistema X, Y, los equipotenciales y líneas de flujo no se cortarán necesariamente en ángulo recto. Sin embargo, los demás teoremas del sistema homogéneo para la resolución de la ecuación de Laplace sí serán válidos.—La primera proposición puede demostrarse fácilmente de la siguiente forma:

$$dh = 0 = \frac{\delta h}{\delta x} dx + \frac{\delta h}{\delta y} dy \quad \therefore$$

la pendiente de una equipotencial será

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta h}{\delta x}}{\frac{\delta h}{\delta y}} = m_p \text{ .... (3)}$$

la pendiente en el mismo punto de la línea de flujo será la dirección del vector de velocidad, esto es:

$$V_x = k_x \cdot i_x = k_x \frac{\delta h}{\delta x}$$

$$V_y = k_y \cdot i_y = k_y \frac{\delta h}{\delta y}$$

$$V_y = \frac{\frac{\delta h}{\delta y}}{\frac{\delta h}{\delta x}} \frac{k_y}{k_x} = m_f \text{ .... (4)}$$

De la que (3) y (4), se ve que en el único caso que las líneas equipotenciales son normales a las líneas de flujo es cuando el material es homogéneo, es decir, si $k_x = k_y$.

Si la red tranformada fué hecha de cuadros para solucionar las ecuaciones

$$\nabla^2 h = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

en el sistema de ejes X_0, Y; entonces los teoremas que son comunes a los dos sistemas serán:

a). La caída de potencial entre las líneas equipotenciales es constante.

b). Todos los tubos de flujo tienen el mismo gasto.

Permeabilidad equivalente del sistema transformado

Sea x_0 la permeabilidad del sistema transformado y el cual se trata como homogéneo; k_x y k_y las permeabilidades en el sentido de los ejes coordenados, respectivamente. Si se considera el gasto de un elemento diferencial del sistema real, se tendrá lo siguiente:

$$\triangle q = k_x \frac{\triangle h}{\triangle x} \triangle y + k_y \frac{\triangle h}{\triangle y} \cdot \triangle x$$

en el sistema transformado este gasto se conserva el mismo para el mismo elemento diferencial, luego usando la escala de transformación $x_0 = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}\, x$ se tiene:

$$\triangle q = k_x \cdot \frac{\triangle h}{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \triangle x_0} . \triangle y + y \frac{\triangle h}{\triangle y} \cdot \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \cdot \triangle x_0 \text{ .... (a)}$$

$$\triangle q = \sqrt{k_x k_y} \cdot \frac{\triangle h}{\triangle x_0} . \triangle y + \sqrt{k_x k_y} \cdot \frac{\triangle h}{\triangle y} \triangle x_0 \text{ .... (b)}$$

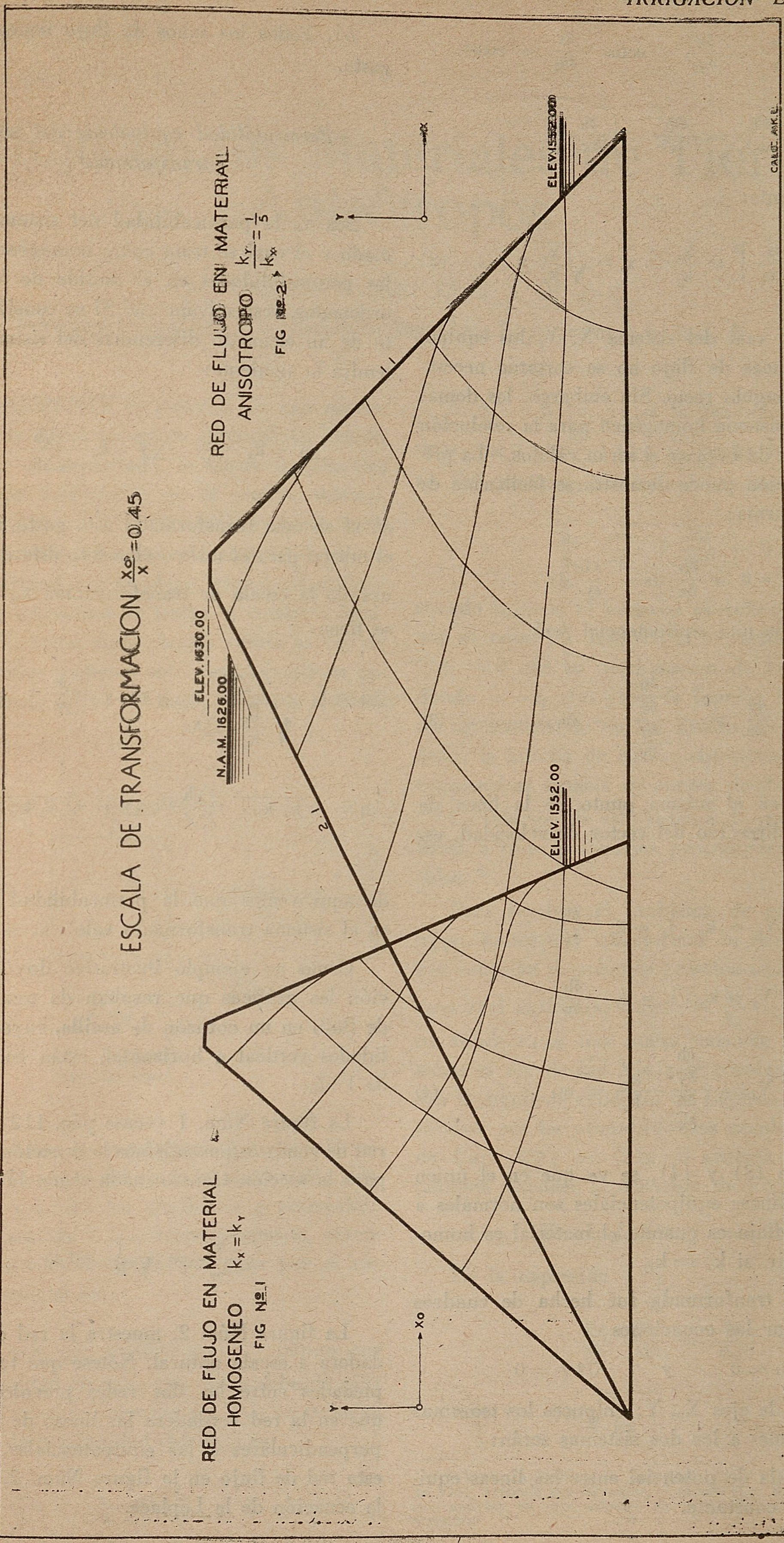
de aquí vemos que la permeabilidad equivalente en el sistema transformado vale $k_0 = \sqrt{kx \cdot ky}$.

Como un ejemplo ilustrativo doy a continuación las gráficas que resultan de resolver la red de flujo en un corazón de arcilla, cuyas permeabilidades vertical a horizontal, están en la relación de 1 : 5.

La figura Núm. 1 (véase pág. 112) muestra la red de cuadros que satisface la ecuación de Laplace, para la sección transformada según la escala

$$\frac{k_y}{k_x} = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.45$$

La figura Núm 2, muestra la red de flujo verdadera a escala natural. Nótese que todas las propiedades entre las dos redes prevalecen, excepto que en la red verdadera las líneas de flujo no son perpendiculares a las equipotenciales, por lo que esta red de flujo en la figura Núm. 2, no satisface la ecuación de la Laplace.


ESCALA DE TRANSFORMACION $\frac{X_o}{X} = 0.45$
RED DE FLUJO EN MATERIAL HOMOGENEO $k_x = k_y$
FIG No 1
RED DE FLUJO EN MATERIAL ANISOTROPO $\frac{k_y}{k_x} = \frac{1}{5}$
FIG No 2
ELEV. 1630.00
N.A.M. 1626.00
ELEV. 1552.00
2:1
1:1
Y
X
Xo