

EL ARTIFICIO DE TAYLOR APLICADO AL POTENCIAL GRAVIMETRICO, AL MAGNETICO Y A MOMENTOS EN GENERAL

ANSELMO CHARGOY*

RESUMEN

En el primer capítulo se introduce como artificio para tratar problemas de potencial Newtoniano, un desarrollo de Taylor con lo cual se elude el tratamiento a través de la ecuación de Laplace, se introducen definiciones que generalizan criterios geométricos usados en la física elemental, como son: centro de masa, centro de momentos, centro geomagnético, ejes propios en una distribución de carga, masa, o algún elemento que se da en el espacio. Esto podrá ser útil para gravimetristas y magnetistas en escala planetaria.

En el segundo capítulo se ve la aplicación del desarrollo al caso gravimétrico obteniéndose la ecuación convencional y algunas variantes.

En el tercer capítulo, en que se quiso exponer el movimiento del campo magnético dado por un dipolo y un cuadripolo para épocas hasta 1965, se amplió para aplicar el artificio del primer capítulo.

Desde luego que con la técnica que actualmente se usa en computadoras para obtener la Serie de Gauss, se pueden obtener términos hasta el orden que se quiera; sin embargo en este trabajo se trata de obtener información que sobre el campo geomagnético nos proporcionen los términos hasta de segundas derivadas, cuando menos.

En el apéndice se justifican definiciones que no se dieron en los capítulos anteriores y se amplió también el uso del artificio introducido en el primer capítulo a otros temas.

El autor agradece la ayuda que le prestó el señor Profesor Eduardo Salzano para el cálculo de los coeficientes en la ecuación del potencial de Gauss de órdenes uno y dos en el año de 1960.

Agradece también la ayuda que recibió de las señoritas Ana María Her-

* Departamento de Geomagnetismo, Instituto de Geofísica, U.N.A.M.

nández Terán y Rosa María García Espinoza, por la revisión y corrección de este trabajo; y también al Ing. J. Lauro Ramírez Betanzos por la colaboración gráfica que aportó al presente trabajo.

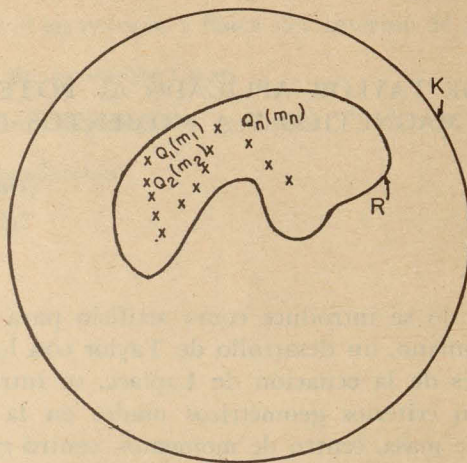


Figura 1

I.—Sustituciones

(1.0). Sea una colección $S_0: \{m_i\}$ de puntos singulares de orden cero, es decir de puntos $Q_i (x_i, y_i, z_i)$ tales que al punto Q_i se asigna un número real m_i . La colección S_0 está contenida en una región R , está a su vez está contenida en una esfera de superficie K .

Cada punto Q_i proporciona la propiedad V al espacio, en tal forma, que para cualquier punto P , esta propiedad está dada por la ecuación:

$$(1.1). V_i = m_i f(\rho_i), \quad \rho_i = |PQ_i|, \text{ en donde } f \text{ tiene todas sus derivadas.}$$

Para la colección $\{m_i\}$, el valor V está dado por la ecuación:

$$(1.2). S_0: V = \sum_i m_i f(\rho_i).$$

Para facilitar la idea del artificio de sustitución, se considera primero el caso en que se tuviera un solo punto singular [1], m residiendo en $Q(x_0, y_0, z_0)$.

Si se supone que m , antes de residir en Q residió en el origen $0(0, 0, 0)$ en que

$$V = m f(r),$$

después de una translación a lo largo del eje $0X$ hasta el punto $(x_0, 0, 0)$,

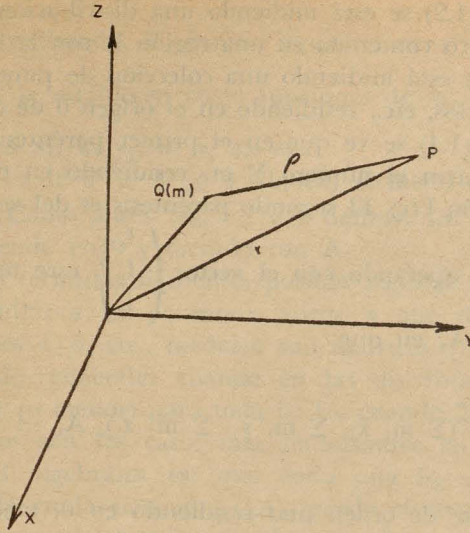


Figura 2

posteriormente un traslado paralelo al eje 0Y hasta $(x_0, y_0, 0)$ y finalmente, un traslado paralelo al eje 0Z hasta $Q(x_0, y_0, z_0)$, se tendrá:

$$(1.3) \quad V = m f(r) - mx_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - my_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ - mz_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2!} mx_0^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots$$

Para la colección $\{m_i\}$ se tendrá:

$$(1.4) \quad S_1 : V = [(\sum m_i) f(r)] \\ - [(\sum m_i x_i) f_x + (\sum m_i y_i) f_y + (\sum m_i z_i) f_z] \\ + \frac{1}{2!} [(\sum m_i x_i^2) f_{xx} + \dots + (\sum m_i z_i^2) f_{zz}] - \dots$$

en que los índices x como en f_x significan derivación, como ya es bien sabido.

Si el desarrollo de Taylor dado en la ecuación (1.4) converge en alguna forma hacia la V dada por la ecuación (1.2), entonces se dice que S_1 es una sustitución de S_0 .

En la ecuación (1.2) se está midiendo una distribución de puntos singulares de orden cero contenida en una región R con la función $f(\rho)$. En la ecuación (1.4) se está midiendo una colección de puntos singulares de órdenes cero, uno, dos, etc., residiendo en el origen 0 de coordenadas.

En la ecuación (1.4) se ve que en el primer paréntesis recto se tiene un punto singular con el número $\sum m_i$ residiendo en el origen 0 , operando con la función $f(r)$. El segundo paréntesis es del vector $-(\sum m_i x_i, \sum m_i y_i, \sum m_i z_i)$ operando con el vector $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$, este término puede escribirse como $-\bar{u}_1 A_1$ en que

$$\bar{u}_1 = (\sum m_i x_i, \sum m_i y_i, \sum m_i z_i), A_1 = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

\bar{u}_1 punto singular de orden uno residiendo en 0 , medido con A_1 . En forma similar, el tercer paréntesis puede escribirse como

$$\frac{1}{2!} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}'_2], \text{ en que}$$

$$(1.5). \quad \bar{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}), \bar{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}),$$

$$y u_{2x} v_{2x} = \sum m_i x_i^2,$$

$$u_{2x} v_{2y} + u_{2y} v_{2x} = 2\sum m_i x_i y_i,$$

$$u_{2y} v_{2y} = \sum m_i y_i^2,$$

$$u_{2y} v_{2z} + u_{2z} v_{2y} = 2\sum m_i y_i z_i$$

$$u_{2z} v_{2z} + \sum m_i z_i^2$$

$$u_{2z} v_{2x} + u_{2x} v_{2z} = 2\sum m_i x_i z_i,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

$\{\bar{u}_2, \bar{v}_2\}$ definen un punto singular de orden dos en 0 , como en los casos anteriores, como puede comprobarse fácilmente.

Se ve que generalizando, el término siguiente es $-\frac{1}{3!} \bar{u}_3 [(A_3 \bar{v}'_3) \bar{w}'_3]$ en que $\bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{w}_3$ se establecen como funciones de m_i y productos de sus coordenadas como $x_1^3, x_1^2 y_1, x_1 y_1 z_1, \text{ etc.}$

La matriz A_3 es de $3 \times 3 \times 3$ (block) elementos con las derivadas terceras de $f(r)$. Como antes $\{\bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{w}_3\}$ definen un punto singular de orden tres residiendo en 0 y medido con A_3 .

Se ve cómo los términos siguientes pueden seguirse escribiendo en forma compacta similar a los paréntesis vistos, y que definen puntos singulares de órdenes 4, 5, etc., medidos con matrices (blocks) $A_4, A_5, \text{ etc.}$

1.1. Propiedades generales cuando en las distribuciones se tiene a), en $\{m_i\}$, $m_i > 0$ (o menor) para toda i ; b), cuando $\sum m_i = 0$, $m_i \neq 0$ desde luego. Estos son los casos más importantes en Geofísica.

Una propiedad algebraica es: que dada una $S_0 = \{m_i\}$ y una S_1 como fue definida en la ecuación (1.4), puede efectuarse un nuevo desarrollo de Taylor en el segundo miembro de (1.4) que puede expresarse como $S_2 (S_1 S_0)$. Es obvio que existe una S tal que $S S_0 = S_2 S_1 S_0$.

Estableciendo un isomorfismo con el grupo de traslaciones T_1, T_2, \dots, T_n se ve que el conjunto S_1, S_2, \dots, S_n es grupo. Obsérvese que en este conjunto no figura S_0 , a menos que conste de un solo elemento $Q(m)$. En general S_0, S_1, \dots, S_n es semi-grupo.

Es también inmediato que las rotaciones en S_1 (o en cualquier S_i), dejan el mismo orden de singularidad en los paréntesis rectos de la ecuación (1.4).

En el caso a) se tienen algunas propiedades geométricas con definiciones apropiadas que enseguida se dan: una distribución dada $S_0: \{m_i\}$ determina por sí misma los siguientes elementos: centro C , eje principal CN , y plano principal E ; optativamente puede decirse que determina sus ejes propios.

Desde luego el plano principal E es normal al eje CN y pasa por C , este plano está dado frecuentemente por dos ejes.

Def.: Sustitución propia es una S que aplicada a $S_0: \{m_i\}$ la lleva a través de la ecuación (1.4) a un punto que reside en el mínimo convexo que contiene a S_0 .

Def.: Centro C de la distribución $\{m_i\}$ es un punto que tomado como origen para la sustitución S_c , ésta es propia y el segundo término (segundo paréntesis recto) de la ecuación (1.4) es mínimo en valor absoluto.

En el caso a) en que $m_i > 0$ para toda i , la sustitución S_c hace que el segundo término sea cero. En efecto: sea:

$$S_1 : V = [(\sum m_i) f(r)] - [(\sum m_i x_i) f_x + (\sum m_i y_i) f_y + (\sum m_i z_i) f_z] + \\ \frac{1}{2!} [\sum (m_i x_i^2) f_{xx} + \dots] - \dots$$

Sea S aplicada a S_1 y tal que se le pide que $S S_1 S_0 = S_c S_0$ se tiene entonces la ecuación

$$(1.5) \quad S_c : V = \\ = [(\sum m_i) f(r)] - [(\sum m_i x_i) f_x + (\sum m_i y_i) f_y \\ + (m_i z_i) f_z] + \dots \\ + [(\sum m_i) \bar{x} f_x + (\sum m_i) \bar{y} f_y + (\sum m_i) \bar{z} f_z] - \dots$$

en que $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ está referido al sistema 0 de S_1 . Se ve que el punto singular de orden uno, medido por el segundo y el tercer paréntesis rectos puede hacerse cero (mínimo) simplemente con

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Se observa que C es el centro de masa o de gravedad o de momentos. C es un punto determinado por la colección $\{m_i\}$, puede decirse que la función f sólo sirvió de vehículo para la localización de C dentro del mínimo convexo que contiene a $\{m_i\}$.

La ecuación (1.5) puede escribirse entonces:

$$(1.6) \quad S_c : V = [(\sum m_i) f(r)] + \\ \frac{1}{2!} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}'_2] - \dots$$

Si en esta ecuación los vectores \bar{u}_2, \bar{v}_2 se encuentran describiendo un ángulo cero, o π , se ve que con una rotación conveniente, tomando la dirección de \bar{u}_2 como eje CZ , por ejemplo, se puede escribir:

$$S_k : V = [(\sum m_i) f(r)] + \frac{1}{2!} a_3^2 f_{zz} + \dots$$

el eje principal definido por la distribución es el eje CZ , el plano prin-

cial será normal a CZ en G. Una aplicación de este caso se verá en el Capítulo II.

Si los vectores \bar{u}_2, \bar{v}_2 de la ecuación (1.6) no coinciden, puede tomarse el plano que contiene a esos vectores como plano coordenado, el plano XCY por ejemplo, y puede escribirse:

$$S_k : V = [(\Sigma m_i) f(r)] \\ + \frac{1}{2!} [u_x^2 f_{xx} - u_y^2 f_{yy}] + \dots$$

como forma canónica de la sustitución. Así el plano principal será XCY, y el eje principal el \overline{CZ} .

Como se ve, en este caso a), la distribución $\{S_0\}$ define, independiente de $f(r)$, el centro C y el eje principal o el plano principal.

En el caso b), en que $\Sigma m_i = 0$, la ecuación (1.4) puede escribirse en la forma:

$$S_1 : V = a_3 f_z + a_{11} f_{xx} + 2a_{12} f_{xy} + a_{22} f_{yy} \\ + 2a_{13} f_{xz} + 2a_{23} f_{yz} + a_{33} f_{zz} + \dots$$

en que con una rotación en la ecuación (1.4) el vector $\bar{u}_1 = (\Sigma m_i x_i, \Sigma m_i y_i, \Sigma m_i z_i)$ pasa a coincidir con el eje OZ, y $\bar{u}_1 = (0, 0, u_2)$.

Se ve que existe una S_2 tal que

$$S_2 S_1 : V = a_3 f_z + a_{11} f_{xx} + 2a_{12} f_{xy} + a_{22} f_{yy} \\ + a_{33} f_{zz} + \dots$$

y otra vez con rotación en el plano XOY se tendrá:

$$S_2 S_1 : V = a_3 f_z + b_{11} f_{xx} - b_{22} f_{yy} + b_{33} f_{zz} + \dots$$

Si la función $f(r)$ tiene la propiedad

$$\nabla^2 f(r) = 0,$$

entonces con una S_3 aplicada a $S_2 S_1$ se puede llegar fácilmente a:

$$(1.7). S_3 S_2 S_1 = S_k : V =$$

$$a_3 f_z + c_{11} (f_{xx} - f_{yy}) + a_{111} f_{xxx} + \dots$$

ecuación en la cual se puede comprobar que la suma de los cuadrados de los coeficientes, de f_{xx} y f_{yy} se hizo mínima; los ejes del punto singular cuya medida está dada por $c_{11} (f_{xx} - f_{yy})$ son ortogonales entre

sí y ortogonales al eje CZ así quedan definidos el eje principal CZ y el plano principal que contiene a los ejes del punto singular de orden dos y cuya medida es:

$$V_2 = (\sqrt{c_{11}}, \sqrt{c_{11}}, 0) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{c_{11}} \\ -\sqrt{c_{11}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que para la determinación de centro, eje principal o plano principal en los ejemplos vistos se está procediendo como en el caso de formas cuadráticas en dimensión tres, v. g.:

$$V = 0 = a_0 + a_1x + a_2y + \dots + a_9z^2,$$

en que por medio de traslaciones y rotaciones se puede llevar a la forma:

$$V = 0 = \bar{a}_0 + \bar{a}_1x^2 + \bar{a}_2y^2 + \bar{a}_3z^2,$$

forma canónica en una expresión cuadrática que sugiere la definición S_k como canónica. Se ve que en realidad tanto en a) como en b) se está ante un problema de ejes propios.

II.—Potencial gravitacional en escala planetaria

2.0—En este capítulo se trata un ejemplo de lo visto en el capítulo anterior, aplicado al potencial Newtoniano.

Se usa la figura 1 del primer capítulo, la esfera de superficie K que contiene a la región R en que se encuentra una distribución $S_0 : \{m_i\}$ en que $m_i > 0$ para toda i.

La distribución S_0 da propiedades al espacio que se miden por la ecuación $V = \sum m_i f(\rho_i)$, $f = \frac{1}{\rho}$, véase la figura 2 del Capítulo I.

Se considera el valor de V desde puntos P sobre la superficie K, o fuera de la esfera K.

Si se calcula V mediante un desarrollo de Taylor como en la ecuación (1.4), se tendrá una sustitución S_1 con la forma:

$$(2.1). \quad S_1 : V = \frac{1}{r} (\sum m_i) \\ - [(\sum m_i x_i) f_x(r) + (\sum m_i y_i) f_y(r) \\ + (\sum m_i z_i) f_z(r)] + \dots$$

Se ha tomado como centro de referencia el centro O de la esfera $K \cdot r = \bar{O}P$, x_i, y_i, z_i son las coordenadas de m_i , punto singular de orden cero (masa), en f_x, f_y, f_z los índices x, y, z , indican derivación con respecto al índice.

Si se usan coordenadas esféricas $P(r, \lambda, \theta)$

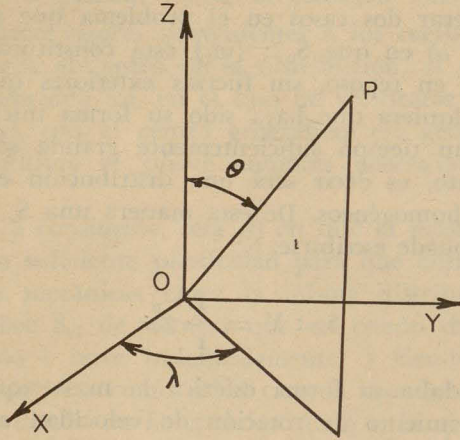


Figura 3

en que $x = r \cos \lambda \sin \theta$,
 $y = r \sin \lambda \sin \theta$,
 $z = r \cos \theta$, se ve que la ecuación (2.1) puede escribirse como:

$$(2.2). \quad S_1 : V = \frac{1}{r} g_0^0 P_0^0 +$$

$$\frac{1}{r^2} [g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) P_1^1]$$

$$+ \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + \dots] + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{r^{j+1}} \left[\sum_{i=0}^{i=j} (g_j^i \cos i\lambda + h_j^i \sin i\lambda) P_j^i \right]$$

en esta ecuación, en los coeficientes g_j^i, h_j^i , los superscritos i son índices;

P_j^i son los polinomios asociados de Legendre: $P_0^0 = 1$, $P_1^0 = \cos \theta$,
 $P_1^1 = \sin \theta$, $P_2^0 = \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 2 \theta)$, etc.

$$g_0^0 = \Sigma m_i, \quad g_1^0 = \Sigma m_i z_i, \quad \text{etc.}$$

Se van a considerar dos casos en el problema que aquí se trata; el primero es el caso α) en que $S_0 : \{m_i\}$ está constituido por una masa fluida, homogénea, en reposo, sin fuerzas exteriores que la afecten. Es inmediato que cualquiera que haya sido su forma inicial (la forma de la región R) en un tiempo suficientemente grande será simétrica con respecto a un punto, es decir será una distribución esférica, en cascarones concéntricos homogéneos. De esta manera una S_c aplicada a S_i de la ecuación (2.2), puede escribirse:

$$S_c : V = \frac{1}{r} g_0^0.$$

Si una vez llegada a su forma esférica la masa aquí considerada se le ve con un movimiento de rotación de velocidad angular constante, al cabo de un tiempo t convenientemente largo, la deformación sufrida conserva ciertas simetrías, una alrededor del eje de rotación y otra con respecto al plano normal a ese eje y que contiene el centro C de la antigua esfera. En esta situación se tiene que $g_j^i, h_j^i = 0$, cuando $i \neq 0$, por la primera simetría, pues V es independiente de λ por lo tanto los coeficientes de $\cos n\lambda, \sin n\lambda$, son 0 para $n = 1, 2$, etc.

También se tiene que

$$g_j^i, h_j^i = 0 \quad \text{cuando}$$

$P_j^i(\theta) \neq P_j^i(\pi - \theta)$, por la segunda simetría, lo que implica que V es independiente de $P_1^0, P_3^0, P_5^0, \dots$ con lo cual la ecuación (2.2) puede escribirse:

$$(2.3). \quad S_c : V = \frac{1}{r} g_0^0 P_0^0 + \frac{1}{r^3} g_2^0 P_2^0 + \\ + \frac{1}{r^5} g_4^0 P_4^0 + \dots$$

Se ve que esta S es S_k , de acuerdo con lo dicho en el Capítulo I, está referida al centro C de la distribución y el eje \overline{CZ} define al eje principal en el cual está tomada la dirección del punto singular dado por el término $\frac{1}{r^3} g_2^0 P_2^0$.

El plano normal a este eje y que pasa por C define al plano principal.

Se ve que para el planeta tierra, la ecuación (2.3), es la usada en gravimetría [2] dando valores convenientes a los coeficientes g_i^0 .

Se ve también que el centro de la distribución, el eje principal y el plano principal coinciden así, en el caso de verificarse las hipótesis para esta distribución α), con el centro geográfico, eje geográfico y ecuador geográfico, (este último se puede entonces denominar ecuador gravimétrico).

El segundo caso a considerar, será β) en que la masa tiene una forma arbitraria pero con suficiente plasticidad para que entre en deformación debido a acciones mecánicas entre la misma distribución S_0 , no hay acción exterior sobre S_0 , de manera que en estado de reposo tiende a una esfera (cuando t crece indefinidamente) y tiende a una distribución doblemente simétrica como en el caso α) cuando entre en rotación.

Es decir que partiendo de la ecuación (2.2) a la que puede aplicarse la sustitución S_2 tal que $S_2 S_1 = S_c$ lleve a la forma:

$$(2.4). \quad S_c : V = \frac{1}{r} g_0^0 P_0^0 + \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + \dots] + \dots$$

en ésta se puede tomar el eje \overline{CZ} de rotación y se tendrá que: $g_j^1(t)$ y $h_j^1(t)$, $j = 2, 3, \dots$, son funciones de tiempo y cuando t crezca se tendrán las expresiones:

$$\alpha) \quad g_j^1(t), h_j^1(t) \longrightarrow 0$$

$$\text{si } i \neq 0, t \longrightarrow \infty$$

por la tendencia a simetría axial,

$$\beta) \quad g_j^1(t), h_j^1(t) \longrightarrow 0 \text{ si}$$

$$P_j^1(\theta) \neq P_j^1(\pi - \theta) \text{ y } t \longrightarrow \infty$$

por la tendencia a simetría ecuatorial, con lo que puede escribirse:

$$(2.5). \quad \lim V(\alpha) = \lim V(\beta) = \frac{1}{r} g_0^0 P_0^0 + \frac{1}{r^3} g_2^0 P_2^0 + \\ + \frac{1}{r^5} g_4^0 P_4^0 + \dots$$

cuando $t \longrightarrow \infty$

Es de esperar que si en β) la fluidez se pierde, no se alcance este límite y aparezcan términos como $\frac{1}{r^4} g_3^0 P_3^0$ citado por A. H. Cook [3], desde luego g_3^0 es pequeño pero de todas maneras la simetría ecuatorial no se alcanza en el caso de la tierra y probablemente tampoco en los otros planetas interiores. En los planetas exteriores, los cuales son muy fluidos, sometidos a las grandes deformaciones de tipo marea, es también difícil que alcancen el límite dado por la ecuación (2.5), desde luego que se está hablando en escala planetaria, porque en escala local referida a pequeñas anomalías sobre la superficie de la tierra (por ejemplo) ese límite nunca se alcanza. El sol probablemente sea el elemento del sistema planetario que mejor se aproxime a verificar la ecuación (2.5).

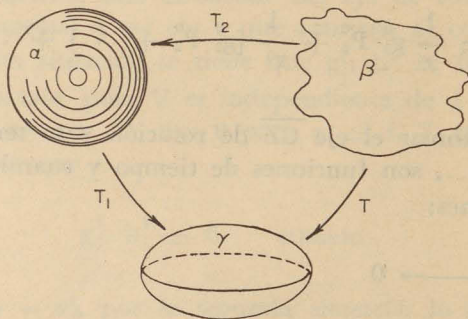


Figura 4

La distribución α) en la figura tiende mediante una transformación T_1 de su geometría hacia γ), distribución con simetría axial y ecuatorial.

La distribución β) tendería mediante T_2 hacia la distribución α) en reposo y después por la rotación hacia γ), pero actuando simultáneamente la mecánica interna en β) y la rotación producen la transformación directa T .

Intuitivamente se está estableciendo que:

$$T = T_1 \oplus T_2$$

2.1—En el presente capítulo se ha hablado del ecuador geográfico y del ecuador gravimétrico, inclusive en el caso de la ecuación convencional en gravimetría se supone que coinciden. Si este no fuera el caso, supóngase el monolito de la figura 5: que tiene simetría axial alrededor del

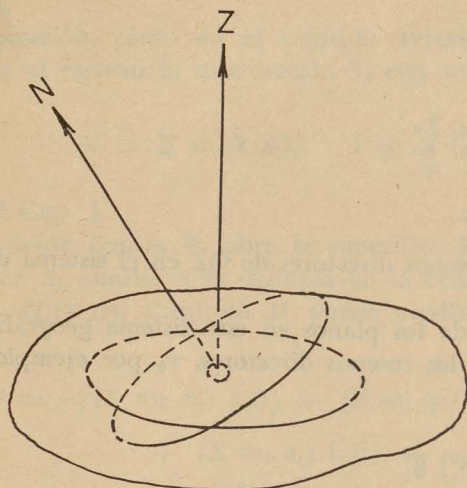


Figura 5

eje OZ y también ecuatorial, lo que definiría el plano principal como ecuador gravimétrico, y a OZ como eje principal con:

$$(2.6). \quad S_k : V = \frac{1}{r} g_0^0 P_0^0 + \frac{1}{r^3} g_2^0 P_2^0 + \frac{1}{r^5} g_4^0 P_4^0 + \dots$$

dado por (2.5).

Ahora supóngase que estando en rotación alrededor del eje ON, se construye un sistema de referencia con el mismo centro 0, que puede ser el caso planetario en que el eje ON se determina por medios astronómicos y es eje de referencia, éste sistema se denominará geográfico.

El potencial del monolito referido a este sistema es:

$$(2.7). \quad S_c : V = \frac{1}{r} g_0^0 P_0^0 + \frac{1}{r^3} [\bar{g}_2^0 P_2^0 + (\bar{g}_2^1 \cos \lambda + \bar{h}_2^1 \sin \lambda) P_2^1 + (\bar{g}_2^2 \cos 2\lambda + \bar{h}_2^2 \sin 2\lambda) P_2^2] + \dots$$

Si se desarrolla $V_2 = \frac{1}{r^3} g_2^0 P_2^0$ dado por (2.6) para identificar con V_2 de la ecuación (2.7) se tiene:

$$2 \bar{g}_2^0 = [2 z_0^2 - (x_0^2 + y_0^2)] g_2^0$$

$$\bar{g}_2^1 = x_0 z_0 g_2^0$$

$$\bar{h}_2^1 = y_0 z_0 g_2^0$$

$$4 \bar{g}_2^2 = (x_0^2 - y_0^2) g_2^0$$

$$2 \bar{h}_2^2 = x_0 y_0 g_2^0$$

x_0, y_0, z_0 son los cosenos directores de OZ en el sistema de referencia geográfico.

Si se toma uno de los planos en este sistema geográfico que contenga al eje OZ, uno de los cosenos directores, y_0 por ejemplo, se hace cero y se tiene:

$$2 \bar{g}_2^0 = (2z_0^2 - x_0^2) g_2^0$$

$$\bar{g}_2^1 = x_0 z_0 g_2^0$$

$$4 \bar{g}_2^2 = x_0^2 g_2^0$$

Se está suponiendo que el ángulo NOZ va a ser pequeño, de tal manera que los términos $V_4 = \frac{1}{r^5} g_4^0 P_4^0$ y siguientes no sufren alteración notable.

Si el monolito adquiere propiedad de plasticidad entra en deformación, que va a estar dada principalmente por los términos en que figura x_0 .

En febrero de 1971 se dio a conocer por investigadores de Geodetic Survey of America del Departamento de Comercio de los Estados Unidos, que el arco máximo que llega a tenerse sobre el planeta entre los

ejes ON y OZ es menor de 30 m., es decir $x_0 < \frac{30}{6\,000\,000}$ o bien $x_0 <$

5×10^{-6} , a pesar de lo cual puede apreciarse el efecto en aumento de sismicidad cuando x_0 es máxima.

III.—Potencial magnético terrestre

3.0—Este trabajo se refiere al campo permanente (de origen interno). Se repiten las hipótesis del Capítulo II-2.0, se usa la fig. 1 del primer capítulo; dentro de la esfera K se encuentra una región R en que reside una distribución $S_0 : \{m_i\}$, con la condición $\Sigma m_i = 0$. Esto, como se comprueba fácilmente equivale a suponer una colección de dipolos contenida en R.

Con esta suposición, como en el capítulo anterior, la propiedad V que proporciona al espacio la distribución S_0 está medida por:

$$V = \Sigma m_i f(\rho_i), \quad f = \frac{1}{\rho}$$

véase Fig. 2 del Cap. I.

Se calcula V desde puntos P sobre la superficie K, o exteriores a K.

Una sustitución S_1 , similar a la definida en la ecuación (4) y repetida en la ecuación (2.1) del Capítulo II puede escribirse en la siguiente forma:

$$(3.1). \quad S_1 : V = -[(\Sigma m_i x_i) f_x(r) + (\Sigma m_i y_i) f_y(r) + (\Sigma m_i z_i) f_z(r)] + \dots$$

tomando coordenadas esféricas P(r, λ , θ) como en el Capítulo II, véase Fig. 3, en la ecuación (3.1) se tiene la siguiente expresión:

$$(3.2). \quad S_1 : V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\sum_{m=0}^n (g_n \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) P_n^m \right]$$

esta ecuación es frecuentemente usada con el artificio de el "Balayage".

Sea un punto singular $Q_i(x_i, y_i, z_i)$, $|OQ_i| = h_i$, en que reside m_i .

En los momentos de todos los órdenes: $m_i x_i$, $m_i x_i^2$, $m_i x_i y_i$, etc., se toman las siguientes identidades: $m_i x_i = a m_i \frac{x_i}{a}$, $m_i x_i^2 = a^2 m_i \frac{x_i^2}{a^2}$, etc. Así es como si se tuviera la masa ó carga $m_i \frac{h_i}{a}$ a la distancia a del origen

y deslizada a lo largo del vector h_i . Se determinan g_1^0 , g_1^1 , h_1^1 , g_2^0 , etc., en

función de las componentes de $m_i \frac{h_i}{a}$, y se tienen $g_1^0 = \frac{\sum m_i x_i}{a}$, $g_1^1 = \frac{\sum m_i y_i}{a}$, etc. La función que determina a V , puede escribirse:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} \left[\sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m \right]$$

Este es el artificio conocido por el "Balayage", desde luego la ecuación que da V , de todas maneras funciona como una sustitución S_1 .

En geomagnetismo se introduce el factor a^2 [9] que afecta todo el segundo miembro y se tiene la conocida expresión:

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \left[\sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m \right]$$

En esta sustitución S_1 se están midiendo puntos singulares de órdenes uno, dos, etc., residentes en el centro 0 de coordenadas, como ya lo mencionó Umow [4].

En esta S_1 el centro 0 de la sustitución es el centro del planeta como fue definido en 1.1 y que en 2.0 se ve que coincide con el centro geográfico. El eje de rotación es el eje OZ , el plano XOY es el plano del ecuador geográfico, el plano ZOX contiene al meridiano de Greenwich. Se considera la tierra esférica en este caso. El radio de la esfera $r = a$. Los polinomios asociados de Legendre (normalizados según Schmidt) son:

$$P_1^0 = \cos \theta, \quad P_1^1 = \operatorname{sen} \theta$$

$$P_2^0 = \frac{1}{4} (3 \cos 2\theta + 1), \quad P_2^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 2\theta,$$

$$P_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}^2 \theta, \text{ etc.}$$

Se tiene la siguiente:

TABLA I

Autor	Epoca	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Gauss	1835	-3235	-311	625	51	292	12	-2	157
Adams	1845	-3219	-278	578	9	284	-10	4	135
Fritsche	1885	-3164	-241	591	-35	286	-75	68	142
Dyson-Furner	1922	-3095	-226	592	-89	299	-124	144	84
Afanasieva	1945	-3032	-229	590	-125	288	-146	150	48
Finch-Leaton	1955	-3055	-227	590	-152	303	-190	158	24
Hendricks-Cain	1960	-3042	-216	578	-154	300	-195	159	20
A G R F	1965	-3040	-212	576	-165	299	-201	157	13

En esta Tabla y en las demás la unidad que se usa es: 1 unidad = $\gamma = 10^{-4}$ oersteds.

Por comodidad en la ecuación (3.2) el primer paréntesis recto se representará por V_1 , el segundo por V_2 , etc.

A continuación se calculan los momentos y direcciones de los ejes de los puntos singulares de órdenes uno y dos dados por V_1 y V_2 . Como se vio en 1.0 se tiene para cualquier sustitución S,

$$W_1 = \bar{u}_1 A_1, \text{ ver Ecuación (1.5)}$$

de aquí fácilmente se deduce la ecuación en que W_1 está referida al eje dado por \bar{u}_1 , y es la conocida ecuación

$$W_1 = \frac{M_1 \cos \varphi}{r^2}.$$

Pasando a coordenadas esféricas y estableciendo que $W_1 = V_1$ de la ecuación de Gauss, se tiene

$$(3.3). \quad M_1 \cos \theta_0 = a^3 g_1^0$$

$$M_1 \sin \theta_0 \cos \lambda_0 = a^3 g_1^1$$

$$M_1 \sin \theta_0 \sin \lambda_0 = a^3 h_1^1$$

lo que sugiere introducir la definición de momento reducido m_1 del punto singular de orden uno (dipolo) por medio de la igualdad

$$m_1^2 = (g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2$$

con lo que se verifica

$$M_1 = a^3 m_1, \text{ los ángulos } \theta_0, \lambda_0 \text{ corresponden a } \bar{u}_1.$$

$$\text{Se ve que } \cos \theta_0 = \frac{g_1^0}{m_1}, \text{ tan } \lambda_0 = \frac{h_1^1}{g_1^1}.$$

En este trabajo, se hace el análisis hasta el año de 1965.

Estas coordenadas (θ_0, λ_0) dan la intersección del eje del dipolo con la superficie de la Tierra, dirigido hacia el sur, pero es costumbre dar la dirección del dipolo hacia el norte por lo cual en la Tabla II, se da la dirección hacia el norte y la longitud oeste, así como el momento reducido del dipolo para las diferentes épocas.

TABLA II

Epoca	θ_0	λ_0	m_1
1835	12° 11'	63° 33'	3309
1845	11° 16'	64° 19'	3282
1885	11° 24'	67° 49'	3228
1922	11° 35'	69° 06'	3159
1945	11° 47'	68° 47'	3097
1955	11° 42'	68° 57'	3120
1960	11° 28'	69° 30'	3104
1965	11° 27'	69° 48'	3096

Aunque el cálculo de los elementos que producen V_1 es bien conocido, se expuso porque orienta en la forma de obtener los elementos que producen V_2 .

En una S cualquiera el término del punto singular de orden dos está dado por

$$W_2 = \frac{1}{2} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}_2], \text{ ver ecuación (1.5)}$$

como en el caso de W_1 , se deduce la ecuación en que W_2 está referida a los ejes de direcciones \bar{u}_2 y \bar{v}_2 , y se tiene:

$$(3.3). \quad W_2 = \frac{M_2}{r^3} \left[\frac{3}{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right]$$

la conocida ecuación dada por Maxwell [5]. Para establecer $W_2 = V_2$ en la ecuación de Gauss, conviene definir un momento reducido de cuadrípulo m_2 tal que verifique

$$M_2 = a^4 m_2$$

los ángulos φ_1 , φ_2 se dan en la figura siguiente:

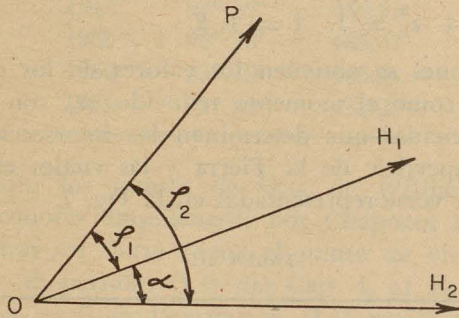


Figura 6

Se hace $\bar{u}_2 = \bar{O}H_1$, $\bar{v}_2 = \bar{O}H_2$

Sean x_1, y_1, z_1 , los cosenos directores de OH_1 ; x_2, y_2, z_2 , los cosenos directores de OH_2 y como anteriormente $x/r, y/r, z/r$, los cosenos directores de OP . Se substituyen en (3.3), $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2$ y $\cos \alpha$ en función de los cosenos directores, y se transforma a coordenadas esféricas como se hizo en el dipolo. Se compara la expresión obtenida con (3.2) con el objeto de que W_2 produzca el efecto de los términos de V_2 . Haciendo $M_2 = m_2 a^4$ se obtienen las siguientes relaciones que deben satisfacer los coeficientes g_2^i y h_2^i

$$(3.4). \quad m_2 (z_1 z_2 - y_1 y_2) = g_2^0 + \frac{g_2^2}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 (x_1 z_2 + x_2 z_1) = \frac{2 g_2^1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 (y_1 z_2 + y_2 z_1) = \frac{2 h_2^1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 (x_1 x_2 - y_1 y_2) = \frac{2 g_2^2}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) = \frac{2 h_2^2}{\sqrt{3}}$$

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1, \quad i = 1, 2.$$

Con estas ecuaciones se obtienen los valores de los cosenos directores de $\bar{O}\bar{H}_1$ y $\bar{O}\bar{H}_2$ así como el momento reducido m_2 , con los cuales se encuentran las coordenadas que determinan las intersecciones de estas direcciones con la superficie de la Tierra y las cuales están dadas en la Tabla III y pueden verse representadas en la Fig. 7.

TABLA III

Año	λ_1	θ_1	λ_2	θ_2
1835	178° 19'	97° 32'	- 87° 41'	151° 50'
1845	177° 35'	90° 50'	- 89° 17'	154° 53'
1885	168° 10'	84° 39'	-103° 45'	151° 58'
1922	161° 14'	82° 11'	-130° 59'	153° 19'
1945	158° 14'	78° 13'	-140° 30'	154° 59'
1955	153° 48'	75° 59'	-144° 54'	156° 55'
1960	152° 43'	75° 45'	-145° 32'	156° 56'
1865	152° 05'	74° 46'	-147° 21'	157° 28'

El ángulo α formado por los ejes OH_1 y OH_2 así como el valor m_2 varían según la Tabla IV.

3.1—Por comodidad se considera en este párrafo, el radio de la tierra $a = 1$, en lo que se trabajará con la ecuación (3.2). Se pretende efectuar una S_2 a S_1 tal que dé: $S_2 (S_1 S_0) = S_c S_0$. Como se define S_c en el Cap. I que implica hacer mínimo el segundo término de $S_1 S_0$, es decir, hacer mínimo el término:

$$V_2 = \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \operatorname{sen} \lambda) P_2^1 + \\ + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2],$$

dado en la ecuación (3.2).

TABLA IV

Año	α	m_2
1835	85° 14'	386.85
1845	90° 36'	363.46
1885	93° 48'	388.61
1922	87° 20'	432.64
1945	89° 12'	439.21
1955	92° 23'	485.04
1960	92° 19'	485.91
1965	93° 24'	492.08

Se recuerdan aquí los puntos de vista de William Thomson y A. Schmidt dados a conocer ampliamente por Chapman y Bartels [6].

Se va a generalizar en cierta forma el punto de vista del primero de ellos, en efecto en el párrafo (1.1) del Cap. I, al hacer el análisis del caso b) en que $\Sigma m_i = 0$, de la ecuación (1.4) escrita en la forma:

$$S_1 : V = a_3 f_z + a_{11} f_{xx} + 2a_{12} f_{xy} + a_{22} f_{yy} + \\ + 2a_{13} f_{xz} + 2a_{23} f_{yz} + a_{33} f_{zz} + \dots$$

se pasó a la forma $S_k S_1$ en la ecuación (1.6) del mismo párrafo quedando:

$$S_k : V = a_3 f_z + c_{11} (f_{xx} - f_{yy}) + a_{111} f_{xxx} + \dots$$

Aplicando este artificio a la ecuación (3.2) en que:

$$V_1 = \frac{1}{r^2} [g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \operatorname{sen} \lambda) P_1^1],$$

$$V_2 = \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + \dots], \text{ etc.}$$

con una rotación conveniente en el sistema de referencia en que \bar{u}_r quede a lo largo del eje OZ, puede escribirse $V_1 = \frac{1}{r^2} [g_1^0 P_1^0]$, los otros términos V_2 , etc., conservan su misma forma, con lo que podrá escribirse:

$$S_1 : V = \frac{1}{r^2} [g_1^0 P_1^0] + \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + \dots] + \dots \\ = V_1 + V_2 + \dots$$

Si se aplica una S_2 a S_1 se tendrá:

$$S_2 S_1 : V = V_1 + (\Delta V_1 + V_2) + \dots$$

ΔV_1 que se forma con segundas derivadas de $f(r)$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= (0, 0, u_{2z}) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r^3} [a_2^0 P_2^0 + (a_2^1 \cos \lambda + b_2^1 \sin \lambda) P_2^1] \end{aligned}$$

si $a_2^0 = -g_2^0$, $a_2^1 = -g_2^1$, $b_2^1 = -h_2^1$

$$(3.5). \quad S_2 S_1 : V = \frac{1}{r^2} [g_1^0 P_1^0] + \frac{1}{r^3} [g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda] P_2^2 + \dots$$

Si se usa el criterio del valor medio cuadrático de V_n tomado sobre toda la esfera terrestre, cuando V_2 se tiene:

$$|V_2|^2 = \frac{1}{r^3} \left[(g_2^0)^2 + (g_2^1)^2 + (h_2^1)^2 + (g_2^2)^2 + (h_2^2)^2 \right].$$

Se ve entonces que este se ha hecho mínimo cuando se tiene la ecuación (3.5), en efecto, con $S_2 S_1$, $|V_2|^2$ se reduce a $\left[\frac{1}{r^3} (g_2^2)^2 + (h_2^2)^2 \right]$ y ya no es posible hacer más reducciones, pues g_2^2 , h_2^2 son invariantes bajo traslaciones. Es decir, de acuerdo con las definiciones del Cap. I, $S_2 S_1 = S_0$, 0 en S_2 es el centro C de la distribución $S_0 : \{m_i\}$, como fue definido en 1.1.

Analizando este término, bajo la sustitución $S_2 S_1$, se ve que corresponde a un cuádrupolo cuyos ejes de cosenos directores $(x_1, y_1, 0)$ del primero, $(x_2, y_2, 0)$ del segundo y momento m_2 satisfacen:

$$m_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) = 0,$$

$$\sqrt{3} m_2 (x_1 x_2 - y_1 y_2) = 2 g_2^2,$$

$$\sqrt{3} m_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) = 2 h_2^2.$$

En la primera ecuación se ve que el coseno del ángulo formado entre los dos ejes es cero, es decir, forman un ángulo de 90° .

Efectuando una rotación en el plano XOY de tal manera que el eje OX por ejemplo, divida al ángulo formado por los ejes simétricamente, se comprueba que queda:

$$\Delta V_1 + V_2 = \frac{1}{r^3} m_2 \cos 2\lambda P_2^2, \sqrt{3} m_2 = 2 g_2^2$$

Se ve entonces que después de la última rotación se tiene $S_k : V = \frac{1}{r^2} g_1^0 P_1^0 + \frac{1}{r^3} g_2^2 \cos 2\lambda P_2^2 + \dots$ en esta última expresión se ha puesto g_2^2 en lugar de m_2 .

Siguiendo el criterio de Schmidt, si se parte directamente de la ecuación (3.2) y se efectúa la operación $S_2 S_1$ tal que lleve la distribución a un punto O' (x', y', z') se tendrá como ya se vio antes:

$$S_2 S_1 : V = V_1 + (\Delta V_1 + V_2) + \dots$$

$$\text{en que } \Delta V_1 = -[a_2^0 P_2^0 + (a_2^1 \cos \lambda + b_2^1 \sin \lambda) P_2^1 + \\ + (a_2^2 \cos 2\lambda + b_2^2 \sin 2\lambda) P_2^2] + \dots$$

de manera que:

$$V_2 + \Delta V_1 = (g_2^0 - a_2^0) P_2^0 + [(g_2^1 - a_2^1) \cos \lambda + \\ + (h_2^1 - b_2^1) \sin \lambda] P_2^1 + [(g_2^2 - a_2^2) \cos 2\lambda + \\ + (h_2^2 - b_2^2) \sin 2\lambda] P_2^2.$$

Si ahora se pide minimizar la medida de este punto singular de orden dos, puede usarse el criterio ya citado, de minimizar el valor medio cuadrático de $V_2 + \Delta V_1$, con lo que se llega a las conocidas ecuaciones dadas por Schmidt [6].

$$(3.7). \quad a_2^0 = 2g_1^0 z' - g_1^1 x' - h_1^1 y'$$

$$a_2^1 = (g_1^1 z' + g_1^0 x') \sqrt{3}$$

$$b_2^1 = (h_1^1 z' + g_1^0 y') \sqrt{3}$$

$$a_2^2 = (g_1^1 x' - h_1^1 y') \sqrt{3}$$

$$b_2^2 = (h_1^1 x' + g_1^1 y') \sqrt{3}$$

donde x' , y' , z' están dadas por las expresiones:

$$x' = a (L_1^x - g_1^1 E) / 3 m_1^2$$

$$y' = a (L_2^x - h_1^1 E) / 3 m_1^2$$

$$z' = a (L_0^x - g_1^0 E) / 3 m_1^2$$

$$L_0 = 2 g_1^0 g_2^0 + (g_1^1 g_2^1 + h_1^1 h_2^1) \sqrt{3}$$

$$L_1 = -g_1^1 g_2^0 + (g_1^0 g_2^1 + g_1^1 g_2^2 + h_1^1 h_2^2) \sqrt{3}$$

$$L_2 = -h_1^1 g_2^0 + (g_1^0 h_2^1 - h_1^1 g_2^2 + g_1^1 h_2^2) \sqrt{3}$$

$$E = (L_0 g_1^0 + L_1 g_1^1 + L_2 h_1^1) / 4 m_1^2$$

Para las ecuaciones (3.7) se ha considerado el radio $r = 1$.

El centro C en coordenadas esféricas: r , λ , θ y tomando el radio de la tierra igual a 6368 km para las diferentes épocas tiene la

TABLA V

Año	r	λ	θ
1835	289	188° 22'	102° 59'
1845	285	181° 12'	95° 02'
1885	305	168° 35'	87° 46'
1922	364	161° 19'	80° 21'
1945	368	156° 30'	75° 41'
1955	436	150° 49'	74° 18'
1960	440	149° 55'	74° 02'
1965	450	148° 42'	72° 52'

donde r es la distancia C al centro 0 geográfico.

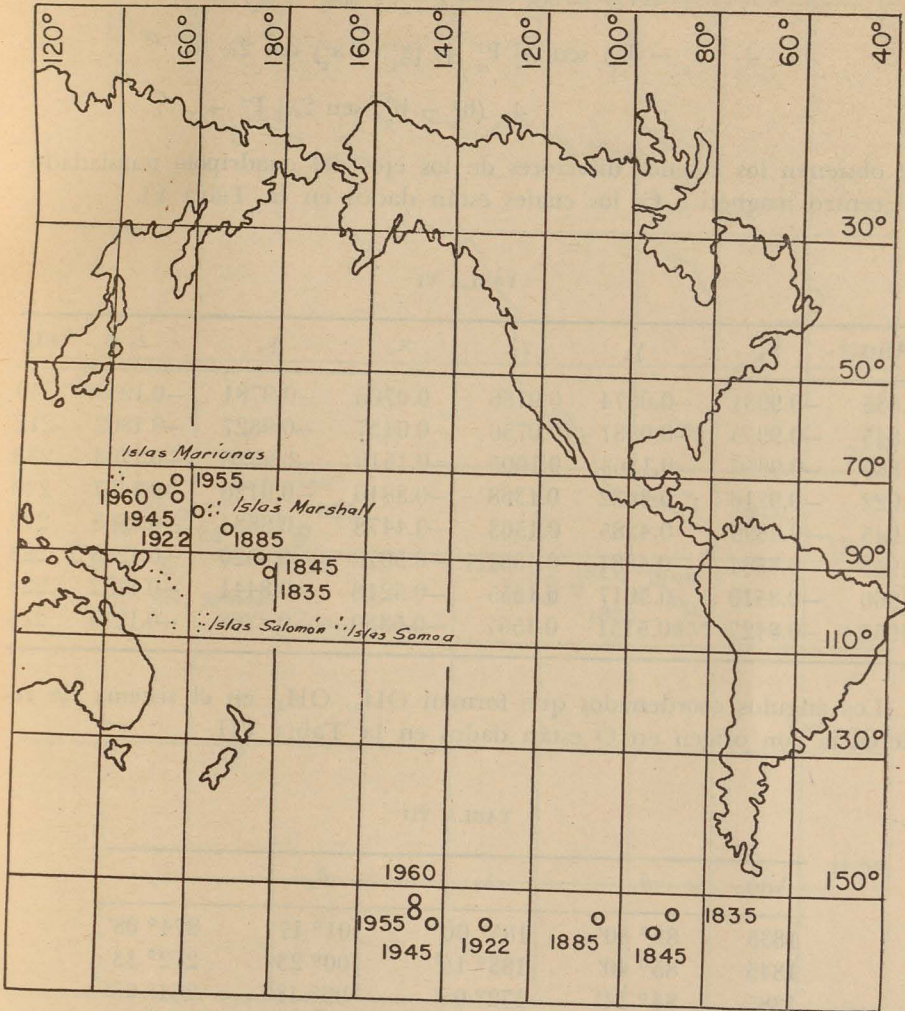


Figura 7

Intersecciones de los ejes del cuadrípolo central con la superficie de la tierra para diferentes épocas.

Usando las fórmulas (3.4) con los nuevos coeficientes para el desarrollo de la forma:

$$\begin{aligned}
 V - (V_1 + \Delta V_1) = & (g_2^0 - a_2^0) P_2^0 + [g_2^1 - a_2^1] \cos \lambda + \\
 & + (h_2^1 - b_2^1) \operatorname{sen} \lambda] P_2^1 + [g_2^2 - a_2^2] \cos 2\lambda + \\
 & + (h_2^2 - b_2^2) \operatorname{sen} 2\lambda] P_2^2 + \dots
 \end{aligned}$$

se obtienen los cosenos directores de los ejes del cuadrípulo trasladado al centro magnético C, los cuales están dados en la Tabla VI.

TABLA VI

Año	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	m_2
1835	-0.9931	-0.0874	0.0786	0.0706	-0.9781	-0.1958	240
1845	-0.9955	-0.0581	0.0756	0.0437	-0.9827	-0.1802	212
1885	-0.9856	0.1363	0.1005	-0.1519	-0.9736	-0.1703	238
1922	-0.9216	0.3632	0.1368	-0.3816	-0.9126	-0.1467	240
1945	-0.8899	0.4285	0.1563	-0.4478	-0.8834	-0.1385	219
1955	-0.8584	0.4881	0.1581	-0.5079	-0.8520	-0.1268	228
1960	-0.8510	0.5017	0.1555	-0.5218	-0.8441	-0.1232	228
1965	-0.8427	0.5151	0.1567	-0.5339	-0.8368	-0.1215	224

Los ángulos coordenados que forman OH_1 , OH_2 , en el sistema de referencia con origen en O están dados en la Tabla VII.

TABLA VII

Año	θ_1	λ_1	θ_2	λ_2
1835	85° 30'	185° 00'	101° 17'	274° 08'
1845	85° 40'	183° 15'	100° 23'	272° 33'
1885	84° 14'	172° 08'	99° 48'	261° 08'
1922	82° 08'	158° 29'	98° 26'	247° 18'
1945	81° 00'	153° 58'	97° 58'	243° 07'
1955	80° 54'	150° 23'	97° 17'	239° 12'
1960	81° 05'	149° 29'	97° 05'	238° 16'
1965	80° 59'	148° 40'	96° 59'	237° 28'

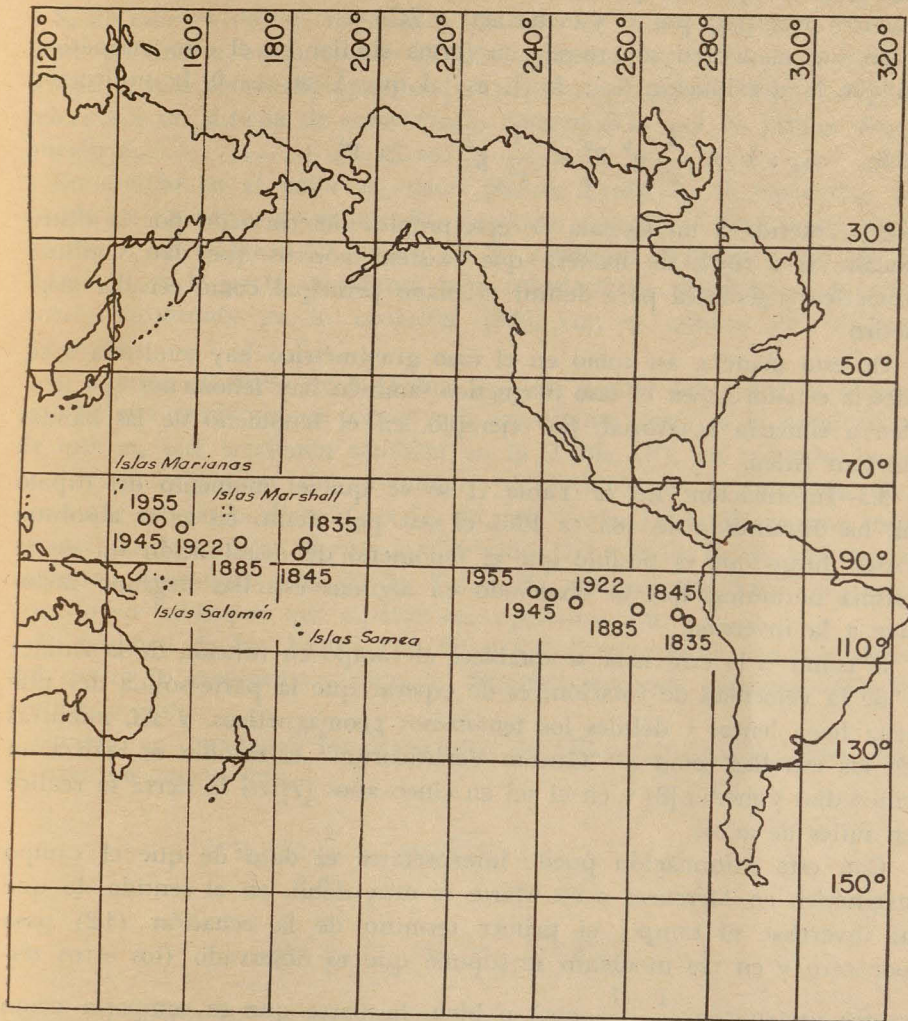


Figura 8

Intersecciones de los ejes del cuadrípulo cuando el dipolo y el cuadrípulo residen en C.

3.2—En el Capítulo I se dieron definiciones con las cuales, cualquiera distribución $S_0 : \{m_i\}$, $m_i > 0$, para toda i , determina por sí misma su centro C , su eje principal ZC , o, un plano principal M (ecuador gravimétrico), que pasa por C y es normal a $Z\bar{C}$.

De esta manera si se procede en forma similar en el caso magnético, en que la distribución $S_0 : \{m_i\}$, es tal que $\sum m_i = 0$, la sustitución

$$(3.6) \quad S_k : V = \frac{1}{r^2} g_1^0 P_1^0 + \frac{1}{r^3} g_2^2 \cos 2\lambda P_2^2 + \dots$$

queda referida a un sistema de ejes propios determinado por la distribución $S_0 : \{m_i\}$, de manera que existen motivos que dan similitud numérica y geofísica para definir el plano principal como ecuador magnético.

De esta manera, así como en el caso gravimétrico hay tendencia a simetría ecuatorial, en el caso magnético también hay fenómenos que tienden a simetría ecuatorial, por ejemplo, en el fenómeno de las bandas de Van Allen.

3.3—Información: En la Tabla II se ve que el momento del dipolo m_1 ha disminuido de 1835 a 1965 el seis por ciento en valor absoluto. Desde luego que es posible que el fenómeno de disminución sea de la misma naturaleza que el observado en algunas estrellas llegando inclusive a la inversión.

Si como es la evidencia, se establece el campo en función de la fluidez y de la velocidad de rotación, es de esperar que la parte sólida del planeta haga lentos y débiles los fenómenos geomagnéticos, y así, mientras en las estrellas como α^2 "Canum Venaticorum" el cambio se realiza en cinco días y medio [8] y en el sol en cinco años [7] en la tierra se realice en miles de años.

Con esta información puede interpretarse el dato de que el campo magnético en Mercurio o en Marte es muy débil, en el sentido de que al invertirse el campo, el primer término de la ecuación (3.2) pasa por cero y en ese momento se supone que es observado (los otros términos varían con $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^4}$, etc.) o bien, la parte que se comporta como fluida y capaz de ser fuente del campo, es muy reducida.

La información que proporciona el análisis de los términos que contienen a g_2^i , h_2^i en la sustitución S_1 de la ecuación (3.2), es en el sentido de que m_2 está creciendo en el período de 1835 a 1965, como puede

verse en la Tabla IV, en que m_2 va de 387 a 492 unidades, 1 unidad = 10^{-4} oersted.

Sin embargo, el análisis obtenido de la Tabla VI y que corresponde a S_k no informa de tal crecimiento. El valor de m_2 en esa época se mantiene próximo a un promedio de 230 unidades. Desde luego la última Tabla es más consistente puesto que sus datos resultan de que S_k está referida a un sistema de coordenadas determinado por la propia distribución S_0 .

En cambio en el valor m_2 dado por la Tabla IV se encuentra incluido un momento de orden dos, generado por \bar{m}_1 al desplazarse paralelamente de C hacia O centro de S_1 ecuación (3.2), y la m_2 de la Tabla VI es la parte invariante bajo translaciones del sistema de referencia encontrada en la ecuación (3.5), con el criterio de William Thomson.

El informe obtenido de la Tabla V es en primer lugar que la distancia OC está creciendo en forma muy consistente (esta es la explicación de que m_2 esté creciendo también en la Tabla IV); en segundo lugar la dirección $\bar{O}\bar{C}$ tiene un movimiento de rotación en la dirección noroeste que va con la dirección OH_1 (λ_1, θ_1) de la Tabla IV, y muy interesante puede resultar el que la dirección OH_1 de la Tabla VII se encuentre aproximada a la de la Tabla III aunque más hacia el oeste, cuando no había por qué esperar esta aproximación.

El resumen de las Tablas III, IV y VII es que $S_0 = \{m_1\}$ se aleja del centro O, geográfico y gira en dirección noroeste predominando la tendencia oeste.

Cuando se calcularon las direcciones de OH_1, OH_2 en la Tabla III, se tuvo en cuenta que:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}'_2] = \\ &= \frac{1}{2} (-\bar{u}_2) [A_2 (-\bar{v}'_2)]. \end{aligned}$$

Como en alguna de las dos direcciones estaban implícitas las del punto singular de orden dos, generado al efectuar $S_2 S_1 = S_c OH_1$ quedó determinado por (λ_1, θ_1) de la Tabla IV.

Naturalmente que si se calculan tablas correspondientes para el octipolo y otros multipolos de órdenes superiores para S_1 , se induce que los momentos m_3, m_4, \dots , también se incrementarían con $\bar{O}\bar{C}$, y, tam-

bién sus ejes registrarían el movimiento de rotación hacia el oeste. En cambio para S_c sólo se registraría el movimiento de rotación.

Como se ve en la Fig. 8, las intersecciones de los ejes $\bar{C}\bar{H}_1$ y $\bar{C}\bar{H}_2$ con la superficie de la tierra tienen lugar en las proximidades del ecuador geográfico, lo que era de esperar.

Si se ve con detenimiento la fotografía presentada por W. Livingston [7] del disco solar, se nota que, prescindiendo del signo, se presenta una distribución magnética que tiende a ser simétrica alrededor de los polos Norte y Sur en el Sol. Lo que sugiere que la ecuación del potencial magnético, debida al campo "permanente", referida a los propios ejes dados por la distribución S_0 ; tendrá la forma:

$$S_k : V = \frac{1}{r^2} g_1^0 P_1^0 + \frac{1}{r^3} g_2^2 \cos 2\lambda P_2^2 + \dots$$

y el eje principal y el plano principal (ecuador heliomagnético) diferirán poco del eje de rotación y del ecuador gravimétrico solar.

En la sustitución S_k , el primer término tiene simetría axial, el segundo término tiene simetría ecuatorial, de manera que las anomalías en escala planetaria, que no guardan estas simetrías estarán dadas a partir del punto singular de orden tres (octipolo) en adelante.

En la figura 9 se han tomado las cartas publicadas por el Coast and Geodetic Survey, correspondientes a los años 1945 y 1955. En las cartas se han publicado las líneas que se consignan en la fig. 9 con la denominación de ecuador real. Se ha trazado aparte de esta curva que corresponde al ecuador geomagnético, en cada una de las épocas el ecuador definido en este capítulo; también se ha trazado una curva que corresponde a un plano ecuatorial (geomagnético) calculado por mínimos cuadrados. Como se observa el ecuador real aparte de encontrarse bastante distorsionado (lejos de encontrarse en un plano) está cambiando con el tiempo.

Esto junto con el dato del movimiento de rotación del cuadripolo sugiere que la región donde se genera el campo magnético no es homogénea. Y esta región tampoco es concéntrica con la forma del planeta y se encuentra en movimiento, lo que pudiera ser útil en el estudio del interior de la Tierra.

3.4—En un dipolo AB, en A reside la carga $(-m)$, en B reside la carga $(+m)$, $|AB| = 2h$.

Se toma la dirección AB como eje OZ, el punto O centro de refe-

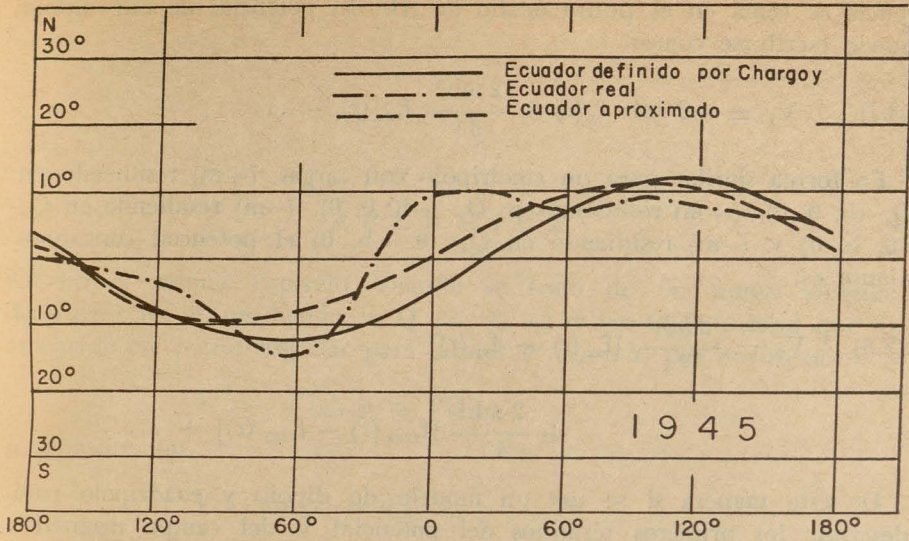


Fig. 9a. Posición de los ecuadores, definido por Chargoy, real y aproximado para el año 1945.

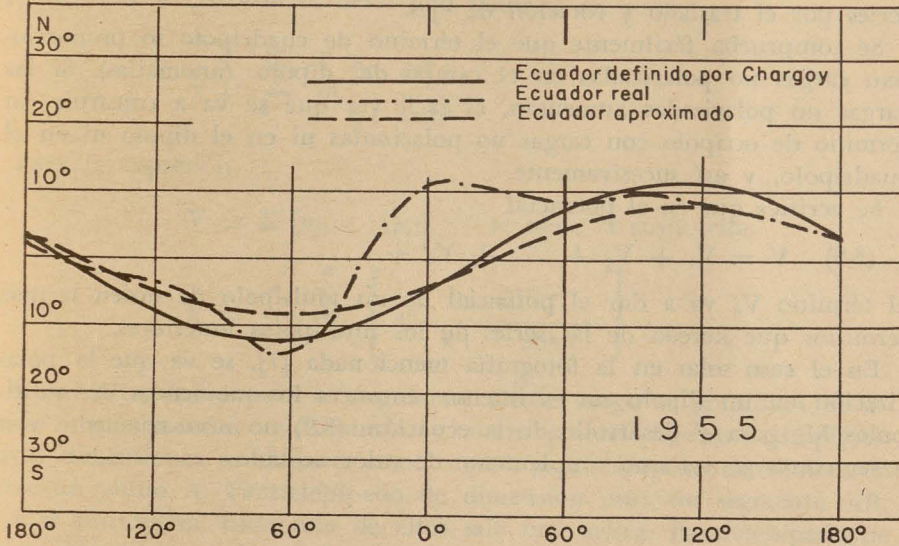


Fig. 9b. Posición de los ecuadores, definido por Chargoy, real y aproximado para el año 1955.

rencia se toma en el punto medio de AB. El potencial de este dipolo puede escribirse como:

$$(3.7). \quad V_1 = -2 \text{ mh } f_z(r) - \frac{2 \text{ mh}^3}{3!} f_{zzz}(r) - \dots$$

En forma similar para un cuadrupolo con cargas (+m) residiendo en Q_1 (h, 0, 0), (+m) residiendo en Q_2 (-h, 0, 0), (-m) residiendo en Q_3 (0, h, 0) y (-m) residiendo en Q_4 (0, -h, 0) el potencial correspondiente es:

$$(3.8). \quad V_2 = \frac{2 \text{ mh}^2}{2!} [f_{xx}(r) - f_{yy}(r)] \\ + \frac{2 \text{ mh}^4}{4!} [f_{xxxx}(r) - f_{yyyy}(r)] + \dots$$

De esta manera si se usa un modelo de dipolo y cuadrupolo para describir los primeros términos del potencial V del campo magnético terrestre, no necesariamente debe suponerse que $r \gg h$ y por lo tanto se sugiere que el potencial de los modelos será del tipo dado por las ecuaciones (3.7) y (3.8) sobre todo cuando el potencial está referido al sistema geográfico en que aparecerán otros términos al desarrollar estas series por el traslado y rotación de ejes.

Se comprueba fácilmente que el término de cuadrupolo lo proporcionan cargas no polarizadas en el campo del dipolo (anomalías). Si las cargas no polarizadas aumentan, es fácil ver que se va a construir un término de octipolo con cargas no polarizadas ni en el dipolo ni en el cuadrupolo, y así sucesivamente.

Se verifica que en el potencial

$$(3.9). \quad V = V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$$

el término V_n va a dar el potencial de un multipolo de orden n más términos que hereda de las series de los multipolos anteriores.

En el caso solar en la fotografía mencionada [7], se ve que la polarización en un dipolo no es intensa, entonces los momentos de multipolos M_n para el desarrollo de la ecuación (3.9) no necesariamente van a ser convergentes sino simplemente de valor acotado.

A P E N D I C E

4.0—En el primer capítulo, cuando se trató de un punto singular de orden cero, m , residiendo en $Q (x_0, y_0, z_0)$ se vio la propiedad que da al espacio ese punto singular para puntos $P (x, y, z)$ por medio de

$$V = mf(\rho), \quad \rho = PQ.$$

o su sustitución

$$V = mf(r) - \bar{m}\bar{u}_1 A_1 + \frac{m}{2!} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}_2] - \dots$$

Se ve fácilmente que esta sustitución es la introducida por Maxwell, [1] pág. 225 y 226, con el desarrollo también en serie:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} m \frac{h^k}{k!} \frac{d^k f(r)}{dh^k}.$$

Para la expresión

$$V = \Sigma [m_i \cdot f(\rho_i)], \quad \text{se tiene la sustitución}$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[m_i \frac{h_i}{k!} \frac{\partial^k f(r_i)}{\partial h_i^k} \right]$$

4.1—Multipolos y puntos singulares: Desde luego se considera el espacio tridimensional euclidiano. Se usan paralelepípedos (simplejos) cuyas dimensiones se definen como sigue: paralelepípedo de dimensión cero, un punto A . Paralelepípedo de dimensión uno, un segmento $\bar{A}B$; A y B vértices, de cada uno de ellos sale una arista. Paralelepípedo de dimensión dos, uno como el anterior AB y un $A'B'$ paralelo a él, uniendo A con A' , B con B' de cada vértice A, B, B', A' salen dos aristas.

Paralelepípedo de dimensión tres, un ABCD como el anterior y un A'B'C'D' paralelo a él, uniendo AA', BB', ..., se tiene que de cada vértice salen tres aristas. Paralelepípedo de dimensión cuatro, un ABCDE ... como el anterior y un A'B'C'D'E' ... paralelo a él, como antes uniendo AA', BB', ..., de cada vértice salen cuatro aristas; se ve que así se pueden construir paralelepípedos de dimensión cinco, seis, etc. Se ve que si un paralelepípedo es de dimensión n, de cada vértice salen n aristas. Si AB es una arista, se dirá que A y B son vértices contiguos. Si en un paralelepípedo de dimensión n, se supone que en un vértice A reside un número real (+m) y en los contiguos a A se supone que residen (-m) en cada uno y así todos los vértices del paralelepípedo contienen elementos (+m) o (-m) se dirá que el paralelepípedo es un multipolo de orden n. Si las n aristas que salen de un vértice A miden l_1, l_2, \dots, l_n longitudes, se define un momento del multipolo como:

$M_n = C_n m_n \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_n$; C_n es un número constante que se puede tomar con algún criterio conveniente, vg. $C_n = n!$.

Si se consideran las direcciones de las aristas que salen de A, por ejemplo, $\vec{AB}, \vec{AC}, \dots$, como ejes, el multipolo de orden n, tiene n ejes. Desde luego conviene considerar esos ejes orientados de tal manera que se prefiere tomar un vértice que contenga el número (-m) como origen y dirigir las aristas hacia los contiguos que contienen a (+m); así, si (-m) reside en 0 y los contiguos a 0 son A, B, ..., quedan definidas las direcciones $\vec{OA}, \vec{OB}, \dots$.

Si en una recta $\overline{X'X}$ se tiene un punto P(x) y sobre esa recta se tiene también un punto Q(x + Δx), cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se dice que Q es punto adherido a P de tal manera que toda vecindad u(P) contiene siempre a Q. Supóngase ahora que en el multipolo de orden n y de momento $M_n = C_n m_n l_1 \cdot l_2 \cdot \dots$, se tenga $l_i \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, n$; considerando a 0 como origen; entonces todos los otros vértices A, B, ...; del simplejo quedan adheridos a 0. En este caso se dice que 0 es un punto singular de orden n. Es obvio que el multipolo sí puede existir en la naturaleza (en el laboratorio) mientras que el punto singular es sólo un modelo matemático.

4.2—Puntos singulares en el espacio de una dimensión. Sea un punto singular Q(m) de orden cero, es decir un punto Q en el que reside el número m, la coordenada de Q es h, el observador está en P.

Como se ve en la figura, $PQ = \rho$,

$$(4.1). \quad V = mf(\rho), \quad \rho = x - h,$$

entonces:

$$(4.2). \quad V = mf(x) - \frac{mh}{1!} f'(x) + \frac{mh^2}{2!} f''(x) - \dots + R.$$

Si se analiza el término

$$V_1 = m h f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{mh}{\Delta x} f(x + \Delta x) - \frac{mh}{\Delta x} f(x) \right]$$

se ve que en $-\frac{mh}{\Delta x} f(x)$ se está midiendo la propiedad que al espacio da la presencia del punto singular de orden cero $\left(-\frac{mh}{\Delta x}\right)$, residiendo éste en el origen 0 de coordenadas; en $+\frac{mh}{\Delta x} f(x + \Delta x)$ también midiendo la propiedad que adquiere el espacio por la presencia del punto singular de orden cero, $\frac{mh}{\Delta x}$ residiendo adherido a 0 por la izquierda pues la coordenada de $+\frac{mh}{\Delta x}$ es Δx y $\Delta x \rightarrow 0$ ($+\Delta x$ está tomado hacia la izquierda de 0). De acuerdo con lo visto se está entonces ante un punto singular de orden uno, con residencia en 0. El hecho de que pueda simplificarse el segundo miembro de (4.2), no aparta de que esté dentro de la definición $V = \sum m_i f(\rho_i)$ establecida en el Cap. I en que también se estableció que f tiene todas sus derivadas. Se ve también que en el término

$$V_2 = m \frac{h^2}{2!} f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{mh^2}{(\Delta x)^2} f(x + 2\Delta x) - 2 \frac{mh^2}{(\Delta x)^2} f(x + \Delta x) + \frac{mh^2}{(\Delta x)^2} f(x) \right],$$

se está midiendo la distribución de cuatro puntos singulares de orden cero: dos $\left(+ \frac{mh^2}{(\Delta x)^2} \right)$ positivos y otros dos correspondientes negativos que están situados en los vértices de un paralelepípedo de dimensión dos, aunque sumergido en un espacio de dimensión uno. Estos cuatro puntos determinan un punto singular de orden dos residiendo en 0, como en el caso de V_1 . Es fácil generalizar y ver que en

$$V_n = m \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

se tiene la medida de un punto singular de orden n , aunque sumergido en un espacio de dimensión uno. En esta forma se ve con mucha claridad que si en (4.1) se está midiendo la propiedad que el punto singular de orden cero m da al espacio cuando esa m reside en $Q(h)$, en (4.2) se tiene esa misma medida pero dada por puntos singulares de órdenes $0, 1, 2, \dots, n$ residiendo en 0. Desde luego se supone que $R \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$. Si se pasa al espacio tridimensional, en el cual se encuentra una colección $S_0 : \{m_i\}$ de puntos singulares de orden cero, es fácil ver que:

$$\begin{aligned} S_1 S_0 : V = (\Sigma m_i) f(r) - \frac{1}{1!} [(\Sigma m_i x_i) f_x + \\ (+ m_i y_i) f_y + (+ m_i z_i) f_z] + \dots \\ + \Sigma m_i f(r) - \bar{u}_1 A_1 + \frac{1}{2!} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}'_2] - \dots \end{aligned}$$

en $V_0 = \Sigma m_i f(r)$ se está midiendo el punto singular de orden cero localizado en 0 como se dijo en el Capítulo I.

En $V_1 = \bar{u}_1 A$ se está midiendo un punto singular de orden uno, de eje en la dirección del vector \bar{u}_1 y de momento $M_1 = C m_1 = C m_0 I$.

En $V_2 = \frac{1}{2} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}'_2]$ se está midiendo un punto singular de orden

dos con ejes en las direcciones \bar{u}_2 y \bar{v}_2 y de momento $M_2 = 2 C_2 m_2 I_1 I_2$. Se ve inmediatamente que $M_3 = 3 C_3 m_3 I_1 I_2 I_3$, etc.

Dado un momento de punto singular puede escribirse en diferentes formas, por ejemplo en el caso de un punto de orden tres

$$\begin{aligned}
 M_3 &= C m l_1 l_2 l_3 \\
 &= C |\bar{u}_3| \cdot |\bar{v}_3| \cdot |\bar{w}_3| \\
 &= C m l^3
 \end{aligned}$$

4.3—En el segundo capítulo se trató el caso para el cual $S_1 S_0$ es convergente. Si esa no fuera la situación, puede tratarse como se ve enseguida: Sean $P(x, y, z)$, $Q(x_0, y_0, z_0)$, en que m reside en Q .

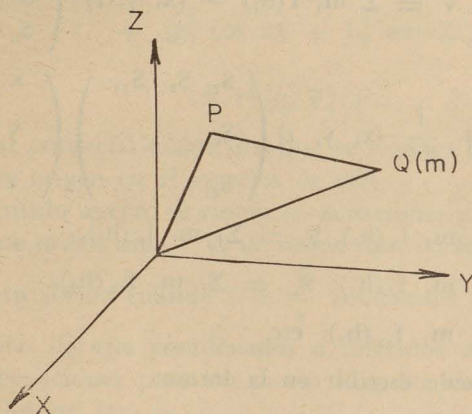


Figura 10

Se tiene $r < h$ de manera que la sustitución $S_1 S_0$ es divergente, como se ve en la ecuación:

$$S_1 S_0 : V = \sum_{k=0}^{\infty} m \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k f(r)}{\partial h^k}$$

Si se hace uso del principio de reciprocidad (C. de La Vallée Poussin, Les Nouvelles Méthodes de la Théorie du Potentiel, p. 15 Paris, 1937), para el punto singular Q que contiene a m , se tiene:

$$V = mf(h) - m [xf_x(h) + yf_y(h) + zf_z(h)]$$

$$+ \frac{m}{2!} [x^2 f_{xx}(h) + \dots] + \dots$$

$$= mf(h) - (x, y, z) \begin{pmatrix} mf_x \\ mf_y \\ mf_z \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{2!} (x, y, z) \begin{pmatrix} mf_{xx} & mf_{xy} & mf_{xz} \\ mf_{yx} & \dots & \dots \\ mf_{zx} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ + \dots$$

Para una colección $\{m_i\}$ en que $h_i > r$ para toda i , se tendrá:

$$V = \Sigma m_i f(h_i) - (x, y, z) \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2!} (x, y, z) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & \dots & \dots \\ S_{31} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \dots$$

en que $S_1 = \Sigma_i m_i f_x(h_i)$, $S_2 = \Sigma_i m_i f_y(h_i)$,

$S_3 = \Sigma_i m_i f_z(h_i)$; $S_{11} = \Sigma_i m_i f_{xx}(h_i)$,

$S_{12} = \Sigma_i m_i f_{xy}(h_i)$, etc.

Se ve que se puede escribir en la forma:

$$V = g_0^0 + r [g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \operatorname{sen} \lambda) P_1^1] \\ + \frac{r^2}{2!} [g_2^0 P_2^0 + \dots] + \dots$$

Por ejemplo sea un cascarón esférico de radio a en que por unidad de área se tiene la masa m , como centro de referencia se toma el centro o del cascarón. Por la simetría de la distribución $\{m_i\}$, es independiente de λ y θ para puntos P (r, λ, θ) interiores, por lo tanto se tiene:

$$V = g_0^0 = \Sigma_i m_i f(h_i) = \\ = \frac{1}{a} \Sigma_i m_i = \frac{4\pi a^2 m}{a} = 4\pi am, \text{ como es bien}$$

conocido.

En la ecuación (5.1), la expresión

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} m \frac{r^k}{k!} \frac{\partial^k f(h)}{\partial r^k}$$

se define como S'_1 asociada de S_1 , es decir asociada de (4.2).

4.4—En el tercer capítulo como en el segundo, puede ocurrir que $h_i > r$ para toda i y por lo tanto $S_1 S_0$ sea divergente.

Si este es el caso, entonces puede procederse como en el párrafo anterior y se tiene:

$$\begin{aligned} S'_1 = & r [g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \operatorname{sen} \lambda) P_1^1] \\ & + r^2 [g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \operatorname{sen} \lambda) P_2^1 \\ & + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2] \\ & + r^3 [g_3^0 P_3^0 + \dots] + \dots \end{aligned}$$

que corresponde al potencial magnético que se registra en la superficie de la tierra y tiene su origen en el exterior de ella.

En el mismo capítulo tercero se vieron las ecuaciones de los puntos singulares que dan V_1 de orden uno, y V_2 de orden dos; su forma general, para cualquier $f(r)$; y su forma cuando $f = \frac{1}{r}$ residiendo en el origen y en cualquiera dirección de ejes coordenados o referidos a sus propios ejes. Aquí se dan las ecuaciones para un punto singular de orden tres (octipolo) y para cualquier $f(r)$ es

$V_3 = \frac{1}{3!} \bar{u}_3 [(A_3 \bar{v}'_3) \bar{w}'_3]$ así por ejemplo para el término $a_{111} f_{xxx}$ su coeficiente es $a_{111} = u_1 v_1 w_1$; para $a_{112} f_{xxy}$, su coeficiente satisface

$$3 a_{112} = u_1 v_1 w_2 + u_1 v_2 w_1 + u_2 v_1 w_1;$$

en $a_{123} \cdot f_{xyz}$ el coeficiente satisface las condiciones:

$$6 a_{123} = \sum u_i v_j w_k, \quad i, j, k, \text{ diferentes entre sí}$$

y además $i, j, k = 1, 2, 3$.

Si $f = \frac{1}{r}$ entonces se tiene:

$$V_3 = \frac{1}{r^4} \sum_{m=0}^3 (g_3^m \cos m\lambda + h_3^m \operatorname{sen} m\lambda) P_3^m$$

Si se toman los ejes del punto singular como ejes de referencia se tiene en este caso en que $f = \frac{1}{r}$

$$V_3 = \frac{M_3}{r^4} \left[\frac{5}{2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - \frac{1}{2} (\cos \alpha_1 \cos B_{23} + \cos \alpha_2 \cdot \cos B_{31} + \cos \alpha_3 \cos B_{12}) \right]$$

$r = OP$; OH_1, OH_2, OH_3 ejes del punto singular (octipolo); $\alpha_1 = \sphericalangle POH_1$, $B_{12} = \sphericalangle H_1 OH_2$, etc. M_3 momento.

Como se ve en el capítulo 3 Tabla I se puede escribir:

$$g_j^i = g_j(t), h_j^i = h_j(t),$$

t , tiempo. Sin embargo, los datos no son como para garantizar que alguna extrapolación sea buena a partir de los datos dados en la Tabla I.

Para establecer las ecuaciones (3.4) en que se obtienen los valores m_2 y los cosenos directores de los ejes del cuadrípolo se usaron las ecuaciones (3.3) en que V_2 quedó referida a sus propios ejes y la V_2 expresada en el desarrollo de Gauss. Pero probablemente es más general el artificio de usar

$$V_2 \frac{m_2}{2!} (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

que con la ecuación

$$V_2 = \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cdot \cos \lambda + h_2^1 \text{ sen } \lambda) P_2^1 + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \text{ sen } 2\lambda) P_2^2]$$

(se ha hecho el radio de la tierra $a = 1$).

En estas dos ecuaciones pueden deducirse muy fácilmente los cosenos directores de OH_1 y OH_2 ejes del cuadrípolo y que están dados por $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$.

Este artificio se puede extender para calcular los ejes y el momento de multipolos de orden superior al que aquí se trató.

4.5—Otras aplicaciones.

En los capítulos segundo y tercero se vio una aplicación de sustituciones cuando $f = \frac{1}{r}$. En este párrafo se ve el ejemplo cuando $f = r^2$.

Sea la colección $\{m_i\}$ en la región acotada R , ésta en el plano XOY , también $P(x, y, 0)$, $m_i > 0$ (o menor) para toda i .

De acuerdo con lo visto en el primer capítulo se tiene:

$$S_0 : V = \sum m_i r_i^2, \text{ y para}$$

$$S_1 S_0 : V = (\sum m_i) f(r) + (\sum m_i x_i) f_x(r)$$

$$+ (\sum m_i y_i) f_y(r) + \left[\frac{1}{2!} m_i x_i^2 f_{xx} + \dots \right] + \dots$$

como $r^2 = x^2 + y^2$.

$$S_1 S_0 : V = r^2 \sum_i m_i + 2x \sum_i m_i x_i +$$

$$2y \sum_i m_i y_i + \sum_i m_i y_i^2 + \sum_i m_i y_i^2.$$

Si se efectúa una S_2 tal que $S_2 S_1 = S_c$ puede escribirse $S_c S_0 : V = r^2 \sum_i m_i + \sum_i m_i r_i^2$.

Se ve que se obtiene el conocido teorema de Steiner de manera que si $P(0, 0, 0)$, se tiene:

$$V = \sum_i m_i r_i^2.$$

También puede usarse el criterio del primer capítulo para problemas como el siguiente:

En la superficie de una esfera, un hemisferio se conserva a $(+1)$ grado y el otro a (-1) de temperatura, se trata de construir la función V que describa la temperatura sobre esa superficie. Se supone una distribución $S_0 : \{m_i\}$, medida con el criterio $V = \sum_i m_i f(\rho_i)$, tomando $f(\rho)$

que converja para un desarrollo de Taylor, vg: $\frac{1}{r^n}$, $n = 1, 2, \dots$, desde

luego el caso más sencillo es $n = 1$. Si se procede como en los capítulos I y II tomando una S_k se ve que se puede escribir:

$$V = g_0^0 P_0^0 + g_3^0 P_3^0 + g_5^0 P_5^0 + \dots$$

pues V es independiente de λ en este sistema de referencia y $g_j^i, h_j^i = 0$ cuando $i \neq 0$.

El conocido teorema de que una función V , definida sobre una superficie esférica k , continua, acotada, puede desarrollarse en armónicos esféricos, es decir:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m,$$

que como se ve es una generalización del ejemplo anterior; puede generalizarse para ciertas discontinuidades como la que se ve, también, en el ejemplo anterior. Es decir, pueden incluirse los casos de discontinuidades para los cuales, desarrollos de Fourier o de Legendre permiten describir funciones. Desde luego, como el sistema de referencia es esférico, obviamente el desarrollo es en series trigonométricas de λ y θ . Si ese no fuera el caso, resultaría en función de las coordenadas escogidas. En estos últimos ejemplos algunos autores usan el artificio de el "Balayage" de que se habló en el Cap. III.

4.6—En el análisis de ciertas expresiones diferenciales, por ejemplo la hiperbólica $V = f_{xy}$, $V = \text{constante}$, por la invariancia del cuadripolo, bajo rotaciones puede llevarse a la forma:

$$V = a^2 f_{xx} - b^2 f_{yy}$$

En general la expresión diferencial homogénea

$$V = af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy}$$

puede escribirse

$$V = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

y sólo existen $\bar{u} = (u_1, u_2)$,

$$\bar{v} = (v_1, v_2) \quad \text{reales cuando en}$$

$$v_2 = b / (b^2 - ac)$$

$b^2 - ac \geq 0$, casos hiperbólico o parabólico; si $b^2 - ac < 0$ caso elíptico, el cuadripolo no existe, a menos que se incluyeran expresiones complejas que no se supusieron en este trabajo.

Con esto se ve que, si bien la ecuación

$$a) \quad V = \sum_i m_i f(\rho_i) \quad \text{puede llevarse a}$$

$$b) \quad V = \left(\sum_i m_i \right) f(r) + \frac{1}{1!} \bar{u}_1 A_1 +$$

$$\frac{1}{2!} \bar{u}_2 [A_2 \bar{v}_2] + \dots;$$

la inversa no es cierta, es decir si de a) puede pasarse a b), no siempre b) puede corresponder a alguna a).

BIBLIOGRAFIA

1. MAXWELL, J. C. 1885. *Traité d'Electricité et de Magnetisme*, Tomo I. p. 223. Paris, Gauthier-Villars.
2. MATEO, J. 1968. *El Potencial Terrestre*. p. 42. Universidad Nacional de La Plata, Argentina.
3. COOK, A. H. 1958. "Determination of the Earth's Gravitational Potential from Observations on Sputnik 2 (1957)". *Geophys. Jour. Roy. Astron. Soc.*, 1 (2): 341-345.
4. UMOV, N. 1904. "Die Construction des Geometrischen Bildes des Gauss'schen Potentials, als Methode zur Erforschung der Gesetze des Erdmagnetismus". *Terr. Magn. Atm. Elec.*, 9 (3): 105-112.
5. MAXWELL, J. C. 1885. *Traité d'Electricité et de Magnetisme*, Tomo I. p. 226. Paris, Gauthier-Villars.
6. CHAPMAN, S. AND J. BARTELS. 1962. *Geomagnetism*, II. p. 651. Oxford, Clarendon Press.
7. LIVINGSTON, W. C. 1966. "Magnetic Fields on the Quiet Sun". *Scient. Amer.*, 215 (5): 54-62.
8. BABCOCK, H. W. AND T. G. COWLING. 1953. "Reports on the Progress of Astronomy General Magnetic Fields in the Sun and Stars". *Month. Not. Roy. Astron. Soc.*, 113 (3): 357-381.
9. CHAPMAN, S. AND J. BARTELS. 1962. *Geomagnetism*, II. p. 625. Oxford, Clarendon Press.
10. ALVAREZ, G. M. 1963. "Definiciones de Ecuador Geomagnético". *Geofísica Internacional*, 3 (2): 43-45.