

PROBLEMAS MATRICIALES DE CONDICIONES A LA FRONTERA

Julian Adem y Marcos Moshinsky

RESUMEN

In a recent publication¹ a matrix type of boundary value problem was introduced in order to simplify the description of nuclear reactions. It appeared that this type of boundary value problem could find applications in other branches of mathematical physics, and the purpose of the present note is to illustrate them.

When we deal with vibrations of continuous media, with problems of heat flow etc., we usually describe the state of the system in terms of a single function which depends on position as well as on the time. As an example, we may mention the lateral displacement of a vibrating string, or the temperature function in case of problems of heat flow.

In many problems of vibration and heat conduction, of which examples will be given below, the description of the state by a single function leads to boundary value problems of great difficulty. It is possible though, in some cases, to divide the continuous medium into several regions, and with each region we can associate a function describing its state. These functions can be grouped to-

gether in the form of a column matrix or vector, which will then represent the state of the whole system. The mathematical problem we encounter then, is a matrix boundary value problem, which is, in general, much simpler than the one we would have to deal with in the usual formulation.

In the present note, we shall discuss two examples of matrix boundary value problems. The first one describing the flow of heat in a cross, illustrates the case where the interactions between the different regions appear through boundary conditions. The second one, dealing with the vibration of systems of plates with intermediate elastic media, illustrates the case where the interactions take place through the equations of motion. We shall obtain the eigenvalues and eigenmatrix functions corresponding to this type of problems, and with the help of them, give a formal solution for any initial conditions.

For the discussion of the self-adjoint properties of this type of boundary value problem, and the rigorous derivation of the series expansion theorems, we refer to other publications^{2,3,4}.

INTRODUCCION

En una publicación reciente, se presentó cierto tipo de problema matricial de condiciones a la frontera para simplificar la descripción de reacciones nucleares. Nos dimos cuenta de que este tipo de problema podía tener aplicaciones en otros campos de física matemática, y el propósito del presente trabajo, es el de ilustrarlos.

Si nos ocupamos de problemas de medios continuos, de flujo de calor, etc., generalmente describimos el estado del sistema en términos de una sola función que depende tanto de la posición como del tiempo. Para ilustrarlo, podemos hablar del desplazamiento lateral de una cuerda vibrante, o de la función de temperatura en el caso de problemas de flujo de calor.

En muchos problemas de vibración y conducción de calor, ejemplos de los cuales se darán abajo, la descripción del estado por una sola función, nos lleva a problemas matriciales de condiciones a la frontera difíciles de resolver. Es posible, sin embargo, en algunos casos dividir el medio continuo entre varias regio

nes, y con cada región asociar una función que describa su estado. Estas funciones pueden agruparse en forma de columna matricial o vector, que representará el estado del sistema. Nos encontramos entonces ante un problema matricial de condiciones a la frontera, que es generalmente, más simple que aquel que se nos presenta en la formulación usual.

En el presente trabajo discutiremos dos ejemplos de problemas matriciales de condiciones a la frontera. El primero, que describirá el flujo de calor en una cruz, ilustra el caso en el cual las interacciones entre las diferentes regiones aparecen a través de condiciones a la frontera. El segundo, que tratará las vibraciones de sistemas de placas con medios elásticos intermedios, ilustra el caso en el cual las interacciones tienen lugar a través de ecuaciones de movimiento. Obtendremos los valores y funciones matriciales características que corresponden a este tipo de problema, y con su ayuda daremos una solución formal para cualquier condición inicial.

Habremos de referirnos a otras publicaciones^{2,3,4}, para formular la discusión de las propiedades de auto-adjunticidad de este tipo de problemas de condiciones a la frontera, y de la derivación rigurosa de los teoremas de desarrollo en series.

1. *Flujo de calor en una cruz.*- Consideremos el problema de flujo de calor en una cruz (Fig. 1 a), cuyos cuatro brazos tienen la misma longitud l , y de secciones cuadradas de área a^2 , donde $a \ll l$. El material de la cruz tendrá una densidad ρ , conducción κ y calor específico c . Las caras laterales de la cruz estarán recubiertas en tal forma, que la conductividad exterior⁵ podrá tomarse como cero, es decir, no hay radiación. Si tratásemos de resolver este problema como uno de conducción de calor tri-dimensional en una región limitada por la superficie de la cruz, tendríamos un problema de condiciones a la frontera de solución difícil. Sin embargo, tomando en cuenta que la pequeñez de la sección nos permite suponer que la temperatura en todos sus puntos es la misma, podemos describir el estado de temperatura en la cruz de la siguiente manera: Asociamos a cada brazo de la cruz su función de temperatura $\theta_i(x,t)$, donde $i = 1,2,3,4$,

indica el brazo en cuestión, x representa la posición del punto en el brazo con $0 \leq x \leq l$ como se indica en la Fig. 1 a, y t es el tiempo. El estado de temperatura de toda la cruz está descrita entonces por la columna matricial.

$$\theta(x,t) = \begin{bmatrix} \theta_1(x,t) \\ \theta_2(x,t) \\ \theta_3(x,t) \\ \theta_4(x,t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

La ecuación para la temperatura en cada brazo será la bien conocida ecuación de flujo de calor en barras⁵, de manera que, la matriz que representa la temperatura en la cruz satisface la ecuación :

$$\rho c (\partial \theta / \partial t) = \kappa (\partial^2 \theta / \partial x^2) \quad (2)$$

Las condiciones a la frontera sobre la temperatura en los extremos libres $x = 0$, pueden tener cualquiera de las formas acostumbradas⁵; para simplificar

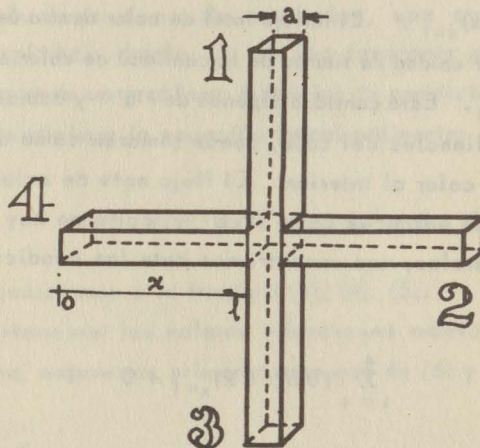


Fig. 1 a.

supondremos que los puntos de extremo serán mantenidos a la temperatura constante de cero. Tenemos entonces:

$$\theta(0,t) = 0 \quad (3)$$

Consideremos ahora las condiciones a la frontera en los puntos de extremo $x = 1$. La intersección de los brazos de la cruz en $x = 1$ dá lugar a un cubo de dimensiones lineales a , ilustrado en la Fig. 1 b. La pequeñez de las dimensiones lineales del cubo, nos permite suponer que la temperatura en todos los puntos del cubo es la misma. La temperatura en los extremos de todos los brazos será idéntica, y tenemos que:

$$\theta_1(1,t) = \theta_2(1,t) = \theta_3(1,t) = \theta_4(1,t) \quad (4)$$

lo cual dá lugar a tres condiciones de frontera linealmente independientes.

Finalmente, para obtener nuestra última condición a la frontera, debemos considerar el flujo total de calor dentro del cubo. El flujo de calor por unidad de tiempo a través de las secciones de extremo de cada barra dentro del cubo está dado por $-\kappa a^2 (\partial \theta_i / \partial x)_{x=1}$. El influjo total de calor dentro del cubo debe ser igual al incremento por unidad de tiempo de la cantidad de calor en el cubo, que es $\rho c a^3 (\partial \theta_1 / \partial t)_{x=1}$. Esta cantidad depende de a^3 y debido a la pequeñez de las dimensiones lineales del cubo, puede tomarse como de orden superior al flujo total de calor al interior. El flujo neto de calor al interior del cubo puede suponerse entonces como ~ 0 y, como no hay radiación a través de las caras laterales, nos encontramos ante las condiciones a la frontera:

$$\sum_{i=1}^4 (\partial \theta_i / \partial x)_{x=1} = 0 \quad (5)$$

El problema de flujo de calor en una cruz tiene ahora una descripción matemática completa en términos de la ecuación (2), y de las condi-

ciones a la frontera (3), (4), (5). Debido a la simetría de este problema por

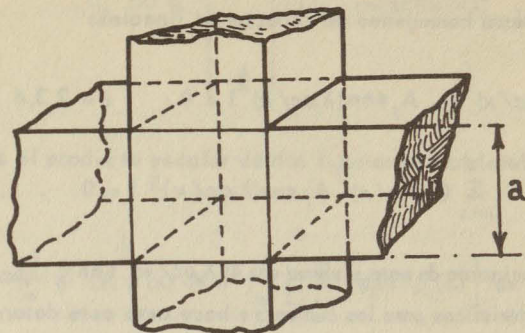


Fig. 1 b.

particular, puede encontrarse una transformación lineal simple de la matriz $\theta(x,t)$, la cual reduce (2)-(5) a cuatro problemas escalares independientes. Sin embargo, hemos de discutirlo como problema matricial para ilustrar el procedimiento general.

Si introducimos como de costumbre, una solución de la forma $\theta(x,t) = \theta(x) \exp(-\lambda t)$ donde λ es una constante positiva real arbitraria, nos encontramos ante un problema matricial de condiciones a la frontera en el cual $\theta(x)$ satisface la ecuación lineal ordinaria:

$$d^2 \theta / dx^2 + (\lambda \rho c / \kappa) \theta = 0 \quad , \quad (6)$$

así como las condiciones a la frontera (3), (4), (5).

Para determinar los valores y funciones matriciales características en este problema, notaremos primeramente que de (6) y (3), $\theta(x)$ debe tener la forma:

$$\theta(x) = A \operatorname{sen} (\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} x \quad , \quad (7)$$

donde A es una matriz columna constante de componentes A_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Aplicamos ahora las condiciones a la frontera (4), (5) a la solución (7) y obtenemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$A_1 \text{sen}(\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} l - A_i \text{sen}(\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} l = 0; \quad i = 2, 3, 4 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} A_i \cos(\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} l = 0 .$$

El determinante de este sistema es: $4(\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} \text{sen}^3[(\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} l] \cos[(\lambda \rho c / \kappa)^{\frac{1}{2}} l]$ y los valores característicos para los cuales se hace cero este determinante son:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2 \kappa}{4 \rho c l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Podemos ver del determinante que cuando n es impar, el valor característico no es degenerado, mientras que si n es par, es triplemente degenerado. Las funciones matriciales correspondientes son:

Para n impar:

$$\theta_n^{(x)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (2l)^{-\frac{1}{2}} \text{sen}(n\pi x / 2l), \quad (10a)$$

para n par:

$$\theta_n^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} l^{-\frac{1}{2}} \text{sen}(n\pi x / 2l); \quad \theta_n^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} l^{-\frac{1}{2}} \text{sen}(n\pi x / 2l) \quad (10b)$$

$$\theta_n^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} (2l)^{-\frac{1}{2}} \text{sen}(n\pi x/2l) \quad (10b)$$

Definimos el producto escalar de dos funciones matriciales $\phi(x)$, $\psi(x)$ como:

$$(\phi, \psi) = \int_0^l \phi'(x) \psi(x) dx = \int_0^l \left[\sum_{i=1}^4 \phi_i(x) \psi_i(x) \right] dx \quad (11)$$

donde $\phi'(x)$ es la forma transpuesta de la matriz $\phi(x)$. Vemos entonces que para n par, las funciones matriciales características $\theta_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha = 1, 2, 3$ fueron elegidas en forma de ser mutuamente ortogonales, es decir, $(\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}) = 0$ etc. Todas las funciones matriciales características están normalizadas $(\theta_n, \theta_n) = 1$. Finalmente, las funciones matriciales características que corresponden a diferentes valores característicos son ortogonales, como puede verse directamente de (10), así como de consideraciones generales de auto-adjunticidad presentadas en otro trabajo².

Supongamos ahora que la distribución inicial de temperatura está dada por una función matricial $\tau(x)$ de clase $C^{(1)}$, con segundas derivadas seccionalmente continuas que satisface las condiciones a la frontera (3, 4, 5). La variación de temperatura con el tiempo estará representada^{3,4} por una función matricial:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \theta_{2n+1}(x) \exp [-(2n+1)^2 \pi^2 \kappa t / 4 \rho c l^2] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 a_{2n}^{(\alpha)} \theta_{2n}^{(\alpha)}(x) \exp [-n^2 \pi^2 \kappa t / \rho c l^2] \quad (12)$$

donde:

$$a_{2n+1} = (\tau, \theta_{2n+1}) ,$$

$$a_{2n}^{(a)} = (\tau, \theta_{2n}^{(a)}) .$$

Vemos que en la formulación presente, el problema de flujo de calor en una cruz admite una completa solución.

2. Vibración de dos placas circulares con un medio elástico intermedio .-

Consideremos un sistema de dos placas circulares de radio R , aprisionadas en sus extremos, y con un medio elástico intermedio. Designaremos por ρ_1 la densidad, por D_1 la rigidez flexionante, y por a_1 el espesor de la primera placa, y ρ_2, D_2, a_2 tendrán el mismo significado para la segunda placa. Finalmente, designaremos por k la carga por unidad de área de las placas necesarias para producir una compresión unitaria en el medio elástico.

El estado del sistema vibratorio puede describirse entonces en términos del desplazamiento normal de las dos placas $u_1(r, \varphi, t)$ y $u_2(r, \varphi, t)$ en los cuales r, φ representan las coordenadas polares en el plano. Como la fuerza por unidad de área que las placas ejercen unas sobre otras, es proporcional a la compresión $u_1 - u_2$ del medio elástico, tenemos que las ecuaciones de movimiento^{6,7} para el sistema vibratorio son:

$$\begin{aligned} \rho_1 a_1 (\partial^2 u_1 / \partial t^2) + D_1 \nabla^4 u_1 + k(u_1 - u_2) &= 0 , \\ \rho_2 a_2 (\partial^2 u_2 / \partial t^2) + D_2 \nabla^4 u_2 + k(u_2 - u_1) &= 0 . \end{aligned} \tag{13}$$

Introducimos, como siempre, una solución a este sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$u(r, \varphi, t) = u(r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{Bmatrix} \exp(i\omega t) , \tag{14}$$

en el cual, para simplificar la notación, nos abstenemos de asociar explícitamente un índice m a los dos componentes de matriz columna $u(r)$. Esto nos lle-

va al problema matricial de condiciones a la frontera:

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \begin{bmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 a_1 \rho_1 - k & k \\ k & \omega^2 a_2 \rho_2 - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{bmatrix} = 0 \quad (15a)$$

$$u(R) = 0 \quad (du/dr)_{r=R} = 0 \quad (15b)$$

Este tipo de problema matricial de condiciones a la frontera difiere del anterior en cuanto a que las interacciones entre las componentes tiene lugar a través de las ecuaciones de movimiento, y no a través de las condiciones a la frontera.

Para encontrar las frecuencias características y las funciones matriciales características de (15), consideraremos primero el problema escalar de condiciones a la frontera:

$$(\mathcal{L}^2 - \lambda^2)v(r) = 0; \quad v(R) = 0, \quad (dv/dr)_{r=R} = 0, \quad (16)$$

donde \mathcal{L} es el operador $[(1/r)(d/dr)r(d/dr) - (m^2/r^2)]$, y λ es un parámetro. La solución de (16) es bien conocida, como que es el problema de condiciones a la frontera de una sola placa circular. La función $v(r)$ está dada por $AJ_m(\lambda^{1/2}r) + BI_m(\lambda^{1/2}r)$ y los valores característicos λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ se representan por la ecuación trascendente:

$$\left[J_m(\lambda^{1/2}r) \frac{d}{dr} I_m(\lambda^{1/2}r) - I_m(\lambda^{1/2}r) \frac{d}{dr} J_m(\lambda^{1/2}r) \right]_{r=R} = 0 \quad (17a)$$

Las raíces $\beta_n = \lambda_n^{1/2} R/\pi$ de esta ecuación han sido determinadas para algunos valores de m . Las funciones características correspondientes son:

$$v_n(r) = A_n \left[J_m \left(\frac{\pi \beta_n r}{R} \right) - \frac{J_m(\pi \beta_n)}{I_m(\pi \beta_n)} I_m \left(\frac{\pi \beta_n r}{R} \right) \right], \quad (17b)$$

donde A_n es una constante arbitraria.

Proponemos ahora una solución para (15) de la forma $u_n(r) = cv_n(r)$ donde c es una matriz constante de componentes c_1, c_2 . Las condiciones a la frontera (15b) se satisfacen inmediatamente por (16), (17).

Como $\nabla^2 v_n = \lambda_n^2 v_n$, vemos que la ecuación de movimiento (15a) se transforma en las ecuaciones algebraicas lineales:

$$\left\{ \begin{bmatrix} D_1 \lambda_n^2 + k & -k \\ -k & D_2 \lambda_n^2 + k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} a_1 \rho_1 & 0 \\ 0 & a_2 \rho_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Para obtener soluciones no triviales de este sistema de ecuaciones, debe hacerse 0 el determinante de la matriz y esto determina las dos frecuencias características $\omega_n^{(1)}, \omega_n^{(2)}$ que corresponden a cada valor característico λ_n , y que toman las formas:

$$\left. \begin{matrix} \omega_n^{(1)} \\ \omega_n^{(2)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{k + D_1 \lambda_n^2}{a_1 \rho_1} + \frac{k + D_2 \lambda_n^2}{a_2 \rho_2} \right) \pm \left[a^2 (\lambda_n^2) + \frac{k^2}{a_1 \rho_1 a_2 \rho_2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

donde:

$$a(\lambda_n^2) = (2a_1 \rho_1)^{-1} (k + D_1 \lambda_n^2) - (2a_2 \rho_2)^{-1} (k + D_2 \lambda_n^2).$$

La matriz característica correspondiente toma de (18), la forma:

$$c^{(1)} = \begin{bmatrix} k/D_1 \\ -(a_1 \rho_1 / D_1) \gamma(\lambda_n^2) \end{bmatrix}, \quad ; \quad c^{(2)} = \begin{bmatrix} (a_2 \rho_2 / D_2) \gamma(\lambda_n^2) \\ k/D_2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde

$$\gamma(\lambda_n^2) = -a(\lambda_n^2) + [a^2(\lambda_n^2) + (a_1 \rho_1 a_2 \rho_2)^{-1} k^2]^{\frac{1}{2}}.$$

El problema matricial de condiciones a la frontera (15) está resuelto, siendo sus frecuencias características $\omega_n^{(1)}$, $\omega_n^{(2)}$ y las funciones matriciales características tienen la forma:

$$u_n^{(1)}(r) = c^{(1)} v_n(r), \quad u_n^{(2)}(r) = c^{(2)} v_n(r).$$

Se establece fácilmente de las ecuaciones generales (13), y de las condiciones a la frontera (15b), que dos funciones matriciales características u^* , u , que corresponden a frecuencias características diferentes son ortogonales en el sentido que: $\int_0^R u^{*'} W u \, dr = 0$ donde $u^{*'}$ es la transpuesta de u^* y W es la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_1 \rho_1 & 0 \\ 0 & a_2 \rho_2 \end{bmatrix}.$$

Podemos normalizar las funciones matriciales características u en el sentido en que $\int_0^R u' W u \, dr = 1$ eligiendo la constante en (17b) apropiadamente. Obtendríamos entonces:

$$(u_n^{(\alpha)}, u_l^{(\beta)}) \equiv \int_0^R u_n^{(\alpha)'} W u_l^{(\beta)} \, dr = \delta_{\alpha\beta} \delta_{nl}, \quad (21)$$

donde $\alpha, \beta = 1, 2$ y $n, l = 1, 2, 3, \dots$.

Hemos obtenido un conjunto ortonormalizado de funciones matriciales características que corresponden a este problema de vibración. Con su ayuda, podríamos representar el estado de vibración para las dos placas que corresponden a cualesquiera condiciones iniciales. Por ejemplo, supongamos que tuviéramos en $t = 0$ un desplazamiento dado de dos placas, y que la velocidad inicial fuera cero. El desplazamiento inicial de las dos placas podría representarse como la suma de términos de la forma:

$$\tau(r) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{array} \right\} \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Para cada término de este tipo, la solución al problema de vibración sería:

$$u(r,t) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \text{sen } m\varphi \end{cases} ,$$

donde $u(r,t)$ tiene la forma:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\tau, u_n^{(1)}) u_n^{(1)}(r) \cos(\omega_n^{(1)} t) + (\tau, u_n^{(2)}) u_n^{(2)}(r) \cos(\omega_n^{(2)} t) \} , \quad (22)$$

y

$$(\tau, u_n^{(a)}) \equiv \int_0^R \tau'(r) W u_n^{(a)}(r) r dr .$$

La generalización de los desarrollos presentes a sistemas de mas de dos placas, así como a otros tipos de condiciones a la frontera, y a otras formas para las placas, es sencilla.

3. *Conclusión.*- Un tipo general de problema matricial de condiciones a la frontera, que incluye los dos casos anteriores, sería aquél en el que hay interacciones entre las componentes de la matriz columna, en las ecuaciones diferenciales y en las condiciones a la frontera. Si introducimos componentes adicionales dentro de la matriz columna para reducir el sistema de ecuaciones diferenciales a uno de primer orden, los problemas matriciales de condiciones a la frontera presentados en este trabajo, se reducen a la forma que ha sido extensamente discutida por Birkhoff y Langer³. Mientras que en su formulación³, la naturaleza de autoadjunticidad de estos problemas se obscurece, sus pruebas concernientes a la existencia y propiedades de los valores y las funciones matriciales características, así como de los teoremas de desarrollo se pueden aplicar a los problemas que aqui se discuten. Estamos justificados entonces, en usar teoremas de desarrollo tales como (12), (22) en la solución de problemas del tipo aquí descrito.

Los autores agradecen al Ing. Ricardo Monges López, Director del Ins-

tituto de Geofísica, por la ayuda que ha prestado a esta investigación. Este trabajo fué patrocinado, en parte, por el Instituto Nacional de la Investigación Científica.

REFERENCIAS

1. M.Moshinsky, Phys.Rev. **81**, 347 (1951).
2. J.Adem y M.Moshinsky, Bol.Soc.Mat.Mexicana **7**, No.3-4 p.1 (1950).
3. G.D.Birkhoff y R.E.Langer, Proc.Amer.Acad.Arts Sci. **58**, 51 (1923).
4. M.Moshinsky, Bol.Soc.Mat.Mexicana **4**, No 1-4 p.1 (1947).
5. H.C.Carlsaw y J.C.Jaeger, Conduction of heat in solids, Oxford Clarendon Press, p. 111 (1947).
6. S.Timoshenko, Vibration problems in engineering, 2nd.ed. D.Van Nostrand, p. 428 (1937).
7. P.M.Morse, Vibration and sound, 2nd.ed. McGraw-Hill, p.210 (1948).