UNAM
21046
INSTITUTO DE GEOLOGÍA - CU

QE301
D53
UNAM
21046
INSTITUTO DE GEOLOGÍA - CU

S-0261

BIBLIOTECA

~~Estando equivoco el valor de la Normal mayor dado en la pag. 10. para la latitud de la Escuela de Ingenieros, hay que revisar todos los resultados endonce entre dicho valor.~~

Almanaques Nauticos que son necesarios para las aplicaciones hechas en esta obra.

1870.

Alfabeto griego.

Α α	Alfa	Ι ι	Iota	Ρ ρ ϱ	Rho
Β β ϐ	Beta	Κ κ	Cappa	Σ σ ς	Sigma
Γ γ ϛ	Gamma	Λ λ	Lambda	Τ τ	Tau
Δ δ	Delta	Μ μ	Mu	Υ υ	Upsilon
Ε ε	Epsilon	Ν ν	Nu	Φ φ	Phi
Ζ ζ	Zeta	Ξ ξ	Xi	Χ χ	Chi
Η	Eta	Ο ο	Omicron	Ψ ϕ	Psi
Θ θ ϑ	Theta	Π π ϖ	Pi	Ω ω	Omega

ι

Simbolos y abreviaciones —

* Estrella

⊙ El sol

● Conjuncion ó Nov.
☽ 1er. cuad. ó crec.
○ Luna ó Plen.
☾ Ult. cuad. ó meng.

☿ Mercurio

♀ Venus

⊕ ó ♁ Tierra

Signos de los Planetas, &

♂ Marte

♃ Jupiter

♄ Saturno

♅ Urano

♆ Neptuno

Signos del Zodiaco

aspectos —

☌ Conjuncion, ó

□

☍

Abreviaciones

☊ Nodo ascendente

☋ Nodo descendente

Corrección por nivel á las alturas y distancias zenitales que da un altazimut

Siendo para la posición directa en que se lee las alturas
o = indicación del extremo de la burbuja del lado del ocular
c = indicación del extremo hacia el objetivo.

o' c', respectivamente las lecturas del nivel en la posición inversa, que da las distancias zenitales

y suponiendo que no sea la lectura media ó correspondiente al centro del nivel. Llamando además

a = lect. del circ. vert. en la posición directa
b = lect. del mismo en la inversa.

Se pide c c' = Corrección por nivel para a y b, respectivamente que la distancia zenital aparente, es

$z' = (90° - (a + c)$ ~~$= (90° - a$~~

$z' = b + c'$

$c = \frac{1}{2} v (o - e)$
$c' = \frac{1}{2} v (o' - e')$
} para el nivel central

$c = \frac{1}{2} v (2m - (o + e))$
$c' = \frac{1}{2} v ((o' + e') - 2m)$
} para el nivel corrido estando el cero del lado del ocular para la posición directa.

Cuando el cero del nivel corrido está del lado del objetivo en la posición invertida, la corrección por nivel debe sustraerse, en vez de sumarse, como suponemos siempre todas las correcciones.

Cuando se hacen las ~~dos lecturas~~ observaciones en una y otra posición del instrumento, la distancia cenital aparente es:

$$z' = 45^\circ + \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4}v\left[(o+o') - (e+e')\right]$$

para el nivel central

$$z' = 45^\circ + \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4}v\left[(o'-o) + (e'-e)\right]$$

para el nivel corrido, en el supuesto como se ha dicho de que el cero esté del lado contrario en la posición en que se hacen las dos lecturas.

La corrección por nivel podríamos indicarla por la letra C_n según nuestro sistema ó también Δn

Intersecciones del elipsoide con planos verticales —

Lat. geog.

$\varphi = 0°$ { Radio curvat. del merid. = ϱ. =
+ " — " seccion á 45° de az...
" — " — " á 90° de az...

1° de meridiano

Estension de los arcos
á diversas latitudes

	metros legales
Cuadrante del meridiano terrestre . . .	10 000 857.1 m
grado de merid.º en el ecuador	110 563.7
" — " " — " ~~á 45º de lat.~~	~~111 119.5~~
" — " — " ~~en el polo~~	
" — " á 19º 9' 40"	110 683.1
" — " — " 19º 26' 12".3	110 686.4
" — " — " 45º	111 119.5
" —	
" — " — " en el polo (90º)	111 679.9

Cuadrante del ecuador terrestre	10 017 594.0
grado del paralelo 0º	111 306.6
" — " — " 19º 9' 40"	102 129.05
" — " — " 19º 26' 12".3	
" — " — " 45º	78 837.3
" — " — " 90º (en el polo)	0.0

Triangulos geodésicos

Logaritmos del radio del círculo osculador á diversas latitudes geográficas, y otras constantes que dependen de él.

$R' = N(1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2\varphi)$; á través [illegible]

R' = radio del círc. osculador.

N = normal mayor del elipsoide terrestre (log. en la pag. 34)

e = escentricidad del mismo (con los radios terrestres apreciados hasta las cuotas en metros)

$\log. e^2 = 7.824\ 4057$ . . . . (pag. 10)

φ = latitud geográfica del lugar

φ	log. R'	log. $\frac{1}{R' \operatorname{sen} 1''}$	log. $\frac{1}{2R'^2 \operatorname{sen} 1''}$	φ	log. R'	log. $\frac{1}{R' \operatorname{sen} 1''}$	log. $\frac{1}{2R'^2 \operatorname{sen} 1''}$
15° 00′	6.803 3864	8.513 9387	1.406 6223	24° 00′			
18 00							
19 00	6.803 4996	8.513 9255	1.406 3959				
„ 30	5154	9097	3643				
20 00	6.803 5314	8.513 8937	1.406 3323				
21 00							
23 00				32° 00	6.804 0073	8.513 4778	1.405 3805
„ 30	6.803 6535	8.513 7716	1.406 0881				

Triangulos geodesicos

Logaritmos del radio del circulo osculador á diversas latitudes geográficas, y otras constantes que dependen de el

$R^2 = N(1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi)$; á cuyo fin $\log R^2 = \log N - \log(1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi)$

R^2 = radio del circulo osculador

N = normal mayor del elipsoide terrestre (Log. vulg. pag. 34)

e = excentricidad del mismo (con los radios terrestres ofrecidos) (hasta los cuatro en un otro)

$\log e^2 = 7.824\,4057$ (pag. 40)

φ = latitud geográfica del lugar

φ	$\log R^2$	$\frac{\log}{R^2 \operatorname{sen} 1''}$	$\frac{\log}{2R^2 \operatorname{sen} 1''}$	φ	$\log R^2$	$\frac{\log}{R^2 \operatorname{sen} 1''}$	$\frac{\log}{2R^2 \operatorname{sen} 1''}$
15°00	6.803 3864	8.510 9337	1.406 6223	24°00			
18 00							
19 00	6.803 4996	8.510 9255	1.406 3959				
» 30	5154	9097	3643				
20 00	6.803 5314	8.510 8932	1.406 3323				
21 00							
23 00				32°00	6.804 0073	8.510 4178	1.405 3805
» 30	6.803 6535	8.510 7716	1.406 0881				

Vera
2 6 9 0 2 2 0 0 6 5 OCT. 2012

TRATADO

DE

TOPOGRAFIA

Y DE GEODESIA

CON LOS PRIMEROS ELEMENTOS DE ASTRONOMIA PRÁCTICA,

POR

FRANCISCO DIAZ COVARRUBIAS,

INGENIERO-GEOGRAFO
Y PROFESOR DE GEODESIA Y ASTRONOMIA PRACTICA
EN LA ESCUELA ESPECIAL DE INGENIEROS.

Agustín Díaz

TOMO II.

GEODESIA Y ASTRONOMIA.

MEXICO.
IMPRENTA DEL GOBIERNO, EN PALACIO,
Á CARGO DE JOSÉ MARIA SANDOVAL.

1869.

DONACION 15 OCT. 2012
I

Verna

QE301
D53

I-21046

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

COORDINACION DE CIENCIAS

Esta obra es propiedad de su autor, conforme á las leyes.

QIC-917

INTRODUCCION.

1.—La Geodesia es la ciencia que comprende todos los procedimientos aplicables á la determinacion de la figura y dimensiones de la tierra.

Considerada en su conjunto, su estudio es uno de los mas vastos, necesitando el auxilio, no solo de las partes mas elevadas de la matemática, sino el de varios ramos de las ciencias físicas. La Geodesia, en efecto, unida á la Astronomía da los medios de medir y configurar las grandes divisiones naturales del globo terrestre, como los continentes y los mares; determina la forma, magnitud y direccion de las cordilleras; traza el curso de los rios; establece los límites convencionales de los Estados; y construye, por último, *proyecciones* ó cartas geográficas que presentan á la vista en reducida escala toda la tierra, ó una extension cualquiera de su superficie. Enriquecida con sus descubrimientos, acompaña otras veces á la Geología y á la Física en sus investigaciones respecto de la estructura y estado actual del interior de nuestro planeta; y aun se atreve á acercarse con ellas al orígen de los tiempos, estableciendo hipótesis fundadas respecto de la forma, naturaleza y estado que debió presentar la tierra mucho ántes de que apareciera en ella el hombre y todos los demas seres que hoy la habitan.

El plan que me propuse en la redaccion de este libro no me permite tratar de la Geodesia con toda la amplitud que brevemente se ha bosquejado; pero procuraré desarrollar con suficiente extension aquellas partes de la ciencia que tienen aplicaciones mas frecuentes y mayor utilidad bajo el punto de vista práctico, objetos que constituyen el fin principal hácia el cual se dirigen mis esfuerzos.

PARTE PRIMERA.—GEODESIA PRÁCTICA.

CAPITULO I.

ELIPSOIDE TERRESTRE Y EXPRESIONES ANALITICAS DE SUS PARTES ELEMENTALES.

2.—Al considerar la figura general del globo terrestre es preciso prescindir por lo pronto de las desigualdades de su superficie, que casi desaparecen ante la magnitud de sus dimensiones, puesto que las montañas mas elevadas del mundo apenas llegan á la milésima parte del radio del globo, y son comparativamente mucho ménos perceptibles que las leves rugosidades que presenta la superficie de una naranja. Conviene, pues, suponer á la tierra terminada por una superficie unida é igual, tal como la que ofrecen las aguas del Oceano en su estado de reposo, prolongándola con la imaginacion en todas direcciones por encima ó por debajo de los continentes con la misma ley de curvatura que el conjunto del globo. En este sentido es como debe entenderse todo lo que se diga respecto de la magnitud y forma asignadas á la tierra; pues si bien la realidad es ciertamente contraria á esta suposicion, la ciencia tiene medios, que conocerémos en lo sucesivo, para hacer concordar la teoría establecida con los hechos tales cuales son, en aquellos casos en que la exactitud de un resultado pudiera quedar menoscabada en virtud de la hipótesis de una superficie uniforme que tanto contribuye á facilitar la resolucion de los problemas geodésicos.

Consideraciones puramente teóricas y fundadas con especialidad en la rotacion diurna de la tierra al derredor de su eje polar, habian inducido ya á los geómetras á admitir que este planeta no deberia ser exactamente esférico, sino ligeramente comprimido en los polos y

ensanchado hácia las regiones ecuatoriales. Los trabajos geodésicos practicados hasta el presente por los geógrafos confirman experimentalmente este resultado de la teoría, dando á conocer que el globo terrestre es un cuerpo esferoidal algo irregular, pero cuya forma *se confunde sensiblemente con la de un elipsoide de revolucion al derredor de su eje menor.* Sin perjuicio de consagrar mas adelante una parte de esta obra á la exposicion de los procedimientos por cuyo medio se ha podido llegar á esta conclusion, partirémos de la figura elipsoidal admitida, para establecer los cálculos relativos á las dimensiones del globo.

3.—Supuesto lo anterior, toda seccion hecha en la tierra por un plano que pase por sus polos B y L (fig. 1ª), da por resultado la elipse generatriz $BALK$ cuyo plano no es mas que el de un meridiano terrestre; y las secciones hechas perpendicularmente al eje polar son círculos llamados *paralelos.* El mayor de estos círculos es el *ecuador* cuyo radio es el semieje mayor CA de la elipse generatriz. Todas las demas secciones que pueden imaginarse oblicua ó paralelamente al semieje menor CB, producen elipses mas ó ménos excéntricas.

Los valores absolutos de los semiejes fueron calculados por el astrónomo Bessel valiéndose de las medidas dignas de mas confianza, y obtuvo los resultados siguientes:

Radio ecuatorial $CA = a = 6377397$ metros ~~a=b~~

Radio polar ..... $CB = b = 6356079$,,

Segun las tablas de Lee los valores exactos encontrados por Bessel, son $a = 6377397^{m}.15 \ldots \log = 6.8046434637$
$b = 6356078^{m}.96 \ldots \log = 6.8031892839$

El conocimiento de los ejes basta para caracterizar perfectamente á la elipse generatriz; pero lo mismo puede conseguirse por medio de uno solo de los ejes y la relacion que existe entre ambos, lo que á veces produce mas sencillez en los cálculos. Vamos á establecer esta relacion.

Se llama *aplanamiento ó compresion polar* la diferencia de los semiejes referida al semieje mayor como unidad. Designando por α el aplanamiento, se tendrá, pues:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

y si en esta expresion sustituimos los valores de a y b, obtendrémos:

$$\alpha = 0.0033427 = \frac{1}{299.2} \text{ próximamente.}$$

Se llama *excentricidad* la distancia del centro de la elipse á uno de los focos, tomando tambien por unidad el semieje mayor, de lo que se deduce:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \text{ó bien} \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Segun las tablas de Lee el valor de
$e = 0.081\,6967 \ldots \log e = 8.912\,205\,227\,1 \ldots \log. e^2 = 7.824\,410\,454\,2$

Sustituyendo los valores precedentes se obtiene $e^2 = 0.0066743$.

Antes de pasar adelante notemos la pequeña diferencia que hay de la forma real de la tierra á la de una esfera. En efecto, por el valor del aplanamiento se ve que este no es mas que de 21 kilómetros, que equivalen á cosa de 5 leguas mexicanas; miéntras que el radio medio de la tierra pasa de 6300 kilómetros ó de 1500 leguas mexicanas. De aquí se infiere que en muchos casos puede suponerse esférica la tierra sin error de importancia.

Cualquiera de las expresiones (1) y (2) nos permitirá eliminar de los cálculos á uno de los ejes, reemplazándolo por la compresion polar ó por la excentricidad, pues de la primera se deduce:

$$b^2 = a^2 (1 - \alpha)^2$$

y de la segunda:

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \ldots\ldots\ldots (3)$$

Nótese de paso que si se elimina á b^2 entre estas dos ecuaciones, y se desarrolla la resultante, se encontrará la siguiente relacion entre la excentricidad y el aplanamiento:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

y puesto que α es una pequeña fraccion, su cuadrado podrá casi siempre despreciarse, lo que equivale á decir que *el cuadrado de la excentricidad es próximamente igual al doble de la compresion.*

4.—Si en la ecuacion general de la elipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ se introduce el valor (3), se tendrá la ecuacion del meridiano terrestre en funcion de las constantes a y e^2, á saber:

$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2) \ldots\ldots\ldots (4)$$

Vamos ahora á expresar las coordenadas rectangulares x é y de un punto M de la superficie de la tierra en funcion de los elemen-

tos que pueden fijar su posicion sobre el meridiano. Si por M se levanta una perpendicular á la tangente $F D$ se tendrá la línea vertical $H Z$ del punto M. Esta línea prolongada encuentra la esfera celeste en un punto Z, que es el *zenit geográfico* ó *astronómico* de M, y la prolongacion del radio central $C M$ marca el *zenit geocéntrico* Z'. El ángulo $M G A$ formado por la normal $M G$ con el ecuador, se llama *latitud geográfica;* y el ángulo $M C A$ formado por el radio con el mismo plano del ecuador se llama *latitud geocéntrica* de M.

Las observaciones astronómicas que se practican con el objeto de caracterizar la posicion de un lugar sobre su meridiano, suministran directamente la latitud geográfica; de suerte que este elemento es el que introducirémos en los cálculos, pues una vez obtenido por medio de la observacion directa, servirá como argumento para determinar todos los datos geodésicos correspondientes á ese punto. Designemos por ϕ la latitud geográfica de M, por ϕ' su latitud geocéntrica y por R el radio central $C M$. Llamemos ademas N la *normal mayor* de M, que es la parte $M H$ de su vertical comprendida desde la superficie de la tierra hasta el eje polar, y n la *normal menor* $M G$ terminada en el ecuador. Con estas anotaciones los triángulo $M H P$ y $M G E$ dán respectivamente, teniendo presente que..... $H P = C E = x$ y que $M E = y$:

$$\left.\begin{aligned} x &= N \cos.\ \phi \\ y &= n \operatorname{sen}.\ \phi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Tambien del triángulo $M C E$ resulta:

$$\left.\begin{aligned} x &= R \cos.\ \phi' \\ y &= R \operatorname{sen}.\ \phi' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Con el objeto de calcular las normales N y n busquemos otro sistema de valores de x é y, que puede hallarse por las consideraciones siguientes. Si el arco $A M$ del meridiano crece una cantidad infinitamente pequeña, $M M'$, la ordenada recibirá un incremento $\mathrm{d}y$, la absisa un decremento $\mathrm{d}x$, y en el triángulo infinitesimal $M M' Q$ rectángulo en Q, el ángulo M' es igual á ϕ, por lo cual se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\tan.\ \phi$$

Diferenciando ahora la ecuacion (4) del meridiano, tendrémos:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{(1-e^2)\,x}$$

de donde resulta: $y = (1 - e^2)\,x \tan.\,\phi$.

Sustituyendo en esta última primero el valor (5) de y, y despues el de x, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{n \cos.\,\phi}{1-e^2} \\ y &= N\,(1-e^2)\,\text{sen.}\,\phi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

que es el nuevo sistema que nos permitirá calcular las normales.

5.—**Normal mayor.**—Si en la ecuacion del meridiano se introduce el valor de x dado por la relacion (5), y el último de y, que son los que contienen á N, resulta despues de dividir por $1 - e^2$:

$$N^2\,(1-e^2)\,\text{sen.}^2\,\phi + N^2 \cos.^2\,\phi = a^2$$

Haciendo las multiplicaciones y teniendo presente que..... ..... $\text{sen.}^2\,\phi + \cos.^2\,\phi = 1$, se tendrá:

$$N^2\,(1 - e^2\,\text{sen.}^2\,\phi) = a^2$$

de donde se deduce:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2\,\text{sen.}^2\,\phi)^{\frac{1}{2}}}$$

El denominador de N entra con mucha frecuencia en las fórmulas geodésicas, de modo que por abreviacion lo designaré por r, esto es:

$$r = (1 - e^2\,\text{sen.}^2\,\phi)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

y entónces la expresion de la normal mayor será:

$$N = \frac{a}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Calculemos, por ejemplo, la normal que corresponde á la Escuela de Ingenieros de México, cuya latitud geográf. es $\phi = 19° 26' 12''.3$.

e^2	7.8244057	r^2	9.9996789
sen. ϕ	9.5221390		
,,	9.5221390	r	—9.9998394
		a	6.8048435
	6.8686837	N	6.8048041
	0.00073907		
r^2	= 0.99926093	N	= 6379755 metros.

6.—**Normal menor.**—Sustituyendo en la ecuacion (4) los valores de x é y que contienen á n, se tendrá por medio de un cálculo semejante al anterior:

$$n = \frac{a\,(1 - e^2)}{r} \qquad \ldots\ldots (10)$$

Para la latitud de la Escuela de Ingenieros se tiene:

N	6.8048041	
$1 - e^2$	9.9970917	
n	6.8018958	n = 6337158m

7.—**Angulo de la vertical.**—Si se dividen una por otra las ecuaciones (5), se hace lo mismo con las (6) y se igualan ambos valores de $\frac{y}{x}$, resulta:

$$\text{tan. } \phi' = (1 - e^2) \text{ tan. } \phi \qquad \ldots\ldots (11)$$

relacion que liga las latitudes geográfica y geocéntrica, y permite calcular una de ellas conociendo la otra. Pero en lugar de proceder así, es preferible muchas veces calcular la diferencia que hay entre ellas, la que no es otra cosa mas que el pequeño ángulo..... $CMG = ZMZ'$ formado por la vertical y el radio, y por lo cual se llama comunmente *ángulo de la vertical*. Si la designamos por v, el triángulo MCG dará en efecto:

$$v = \phi - \phi'$$

Tomando la *tangente* de v y sustituyendo en el segundo miembro el valor precedente de tan. ϕ', se obtiene:

$$\text{tan. } v = \frac{\text{tan. } \phi - (1 - e^2) \text{ tan. } \phi}{1 + (1 - e^2) \text{ tan.}^2 \phi} = \frac{e^2 \text{ tan. } \phi}{\text{sec.}^2 \phi - e^2 \text{ tan.}^2 \phi}$$

Multiplicando numerador y denominador por cos.$^2\,\phi$, y recordando que sen. $2\,\phi = 2$ sen. ϕ cos. ϕ, se tendrá finalmente:

$$\text{tan. } v = \frac{0.5\ e^2 \text{ sen. } 2\,\phi}{r^2} \qquad (12)$$

Como v es siempre muy pequeño, no hay error de importancia en tomar el arco por su tangente, así como en suprimir el denominador que difiere muy poco de 1, con lo cual se tiene expresando á v en segundos:

$$v = \frac{0.5\ e^2}{\text{sen. } 1''} \text{ sen. } 2\,\phi = (2.83780) \text{ sen. } 2\,\phi$$

La cantidad contenida en el paréntesis es el logaritmo del factor constante $\frac{0.5\ e^2}{\text{sen. } 1''}$. Calculemos la latitud geocéntrica de la Escuela de Ingenieros.

$\frac{1}{2}\ e^2$	7.5233757	
sen. 2ϕ	9.7976849	$\phi = 19°\ 26'\ 12.''3$
r^2	—9.9996788	$v = \quad -7\ \ 12.\ \ 3$
tan. v	7.3213817	$\phi' = 19°\ 19'\ 00.''0$

La segunda fórmula daria:

Const.	2.83780	
sen. $2\,\phi$	9.79768	
v	2.63548	$v = 432.''0 = 7'\ 12.''0$

8.—**Radio central.**—El triángulo MCE da:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

Sustituyendo los valores (5) y ejecutando las operaciones, se tiene:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(1 - 2\ e^2 \text{ sen.}^2\,\phi + e^4 \text{ sen.}^2\,\phi\right) \qquad (A)$$

Descomponiendo en dos partes el segundo término dentro del paréntesis, la ecuacion anterior puede escribirse así:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(r^2 - e^2\,(1 - e^2) \text{ sen.}^2\,\phi\right)$$

de la cual resulta:

$$R = a\left(1 - \frac{e^2\,(1 - e^2) \text{ sen.}^2\,\phi}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta es la forma que se da por lo comun á la expresion del radio; pero si se sustituye el valor de r y se ejecuta la division indicada, se obtendrá sucesivamente:

$$R = a\left(1 - e^2\,(1-e^2)\,\text{sen.}^2\,\phi - e^4\,(1-e^2)\,\text{sen.}^4\,\phi - e^6\,(1-e^2)\,\text{sen}^6\phi - \ldots\ldots\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= a\left(1 - e^2\,\text{sen.}^2\,\phi + e^4\,\text{sen.}^2\,\phi - e^4\,\text{sen.}^4\,\phi + e^6\,\text{sen.}^4\,\phi - e^6\,\text{sen.}^6\,\phi + \ldots\ldots\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= a\left(r^2 + (e^4\,\text{sen.}^2\,\phi + e^6\,\text{sen.}^4\,\phi + \ldots\ldots)\,\cos.^2\,\phi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Reflexionando que e es una pequeña fraccion convendrémos en que podrán despreciarse sin notable error su cuarta y siguientes potencias, de lo que resulta:

$$R = a\,r \ldots\ldots (13)$$

que es una expresion suficientemente exacta y mas sencilla.

De la ecuacion (A) es fácil derivar otra fórmula casi tan breve como la anterior y enteramente exacta. En efecto, el valor de r da:

$$r^4 = 1 - 2\,e^2\,\text{sen.}^2\,\phi + e^4\,\text{sen.}^4\,\phi$$

y como los dos primeros términos son idénticos á los contenidos dentro del paréntesis en la ecuacion (A), resulta por sustitucion:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\,(r^4 + e^4\,\text{sen.}^2\,\phi - e^4\text{sen.}^4\phi)$$
$$= \frac{a^2}{r^2}\,(r^4 + e^4\,\text{sen.}^2\,\phi\,\cos.^2\,\phi)$$
$$= \frac{a^2}{r^2}\,(r^4 + \tfrac{1}{4}\,e^4\,\text{sen.}^2\,2\,\phi)$$

Pero la ecuacion (12) dá: $\frac{1}{4}\,e^4\,\text{sen.}^2\,2\,\phi = r^4\,\tan.^2\,v$, de donde se deduce: $R^2 = a^2\,(r^2 + r^2\,\tan.^2\,v)$ y por último:

$$R = \frac{a\,r}{\cos.\,v} \ldots\ldots (14)$$

El valor de v es tan pequeño que casi siempre es permitido tomar la unidad por su coseno, en cuyo caso vuelve á resultar la expresion (13).

Daré todavía otra fórmula para calcular el valor del radio, no porque ofrezca grandes ventajas respecto de las anteriores sino porque

suele encontrarse en algunas obras de Astronomía. Igualando los dos valores (5) y (6) de x, y sustituyendo el último valor de R, se tiene:

$$r^2 = \frac{\cos.\ \phi \cos.\ v}{\cos.\ \phi'}$$

con lo que la expresion (14) se convierte en:

$$R = a \left(\frac{\cos.\ \phi}{\cos.\ \phi' \cos.\ v}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Apliquemos el cálculo de la fórmula (14) á la latitud geograf de la Escuela.

a	6.8046435	
r	9.9998~~394~~ bueno	
$a\,r$	6.8044829	$a\,r = 6375039^{m}$
cos. v	9.9999991	
R	6.8044838	$R = 6375052^{m}$

Se ve que el resultado de la ecuacion (13) no difiere mas que 13^{m} del valor exacto de R, cantidad que es insignificante respecto de una magnitud tan considerable, de suerte que en general adoptaré la primera como expresion del radio en el curso de esta obra, por lo ménos cuando no se advierta lo contrario.

9.—**Radio de curvatura del meridiano.**—Se sabe que en la elipse, como en las demas secciones cónicas, el radio de curvatura ρ es igual al cubo de la normal menor dividido por el cuadrado de la ordenada correspondiente al foco, la cual es igual al semiparámetro de la curva. Para hallar la ordenada del foco hagamos..... $x = \sqrt{a^2 - b^2} = a\,e$, con lo que la ecuacion (4) de la elipse dará: $y^2 = a^2\,(1 - e^2)^2$, y entónces:

$$\rho = \frac{\dfrac{a^3\,(1 - e^2)^3}{r^3}}{a^2\,(1 - e^2)^2} = \frac{a\,(1 - e^2)}{r^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$r = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$

Para la Escuela de Ingenieros, se tendrá:

a	6.8046435	
$1 - e^2$	9.9970917	
r^3	—9.9995~~183~~ bueno	
ρ	6.8022169	$\rho = 6341864^{m}$

10.—**Tangente, subtangente, subnormal, &c.**—El cálculo de estas líneas es tan sencillo que se deduce inmediatamente de la figura, á saber:

$$\text{Tangente} \ldots\ldots MD = \frac{y}{\cos.\,\phi} = n \tan.\,\phi = \frac{a\,(1-e^2)\tan.\,\phi}{r}$$

$$\text{Tangente} \ldots\ldots MF = N \cot.\,\phi = \frac{a \cot.\,\phi}{r}$$

$$\text{Subtangente} \ldots\ldots ED = MD \text{ sen. } \phi = \frac{a\,(1-e^2)\tan.\,\phi \text{ sen. } \phi}{r}$$

$$\text{Subnormal} \ldots\ldots EG = n \cos.\,\phi$$

La diferencia de las normales, y las distancias del centro de la tierra á los puntos en que la normal mayor encuentra al plano ecuatorial y al eje polar, son:

$$GH = N - n = \frac{a e^2}{r}$$

$$CG = \frac{a e^2 \cos.\,\phi}{r}$$

$$CH = \frac{a e^2 \text{ sen. } \phi}{r}$$

No creo necesario hacer aplicaciones numéricas de estas fórmulas, porque no presentan dificultad alguna.

11.—Ahora que tenemos calculadas las expresiones de las principales líneas del elipsoide, es interesante investigar las variaciones que sufren con los cambios de posicion del punto M á que pertenecen, pues todas ellas dependen del valor de la latitud. Segun la forma de esas expresiones se ve que al paso que crece la latitud aumentan de valor las dos normales y el radio de curvatura del meridiano: miéntras que disminuye el radio central. En cuanto al ángulo de la vertical, crece hasta la latitud de 45°, punto en que llega á su *maximum*, y comienza en seguida á decrecer cuando continúa aumentando la latitud.

Si suponemos al punto M sucesivamente en el ecuador, en la latitud media de 45°, y por último, en el polo, podrémos formar la siguiente tabla de los valores que adquieren las dos normales, el radio central, el de curvatura y el ángulo de la vertical.

	$\phi = 0°$	$\phi = 45°$ *	$\phi = 90°$
Normal mayor	$N = a$	$N = \frac{a}{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}}$	$N = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$
Normal menor	$n = a(1-e^2)$	$n = \frac{a(1-e^2)}{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}}$	$n = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$
Radio central	$R = a$	$R = a(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}$	$R = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$
Radio de curvatura	$\rho = a(1-e^2)$	$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\rho = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$
Angulo de la vertical	$v = 0$	$v = \frac{0.5\,e^2}{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\text{sen. }1''}}$	$v = 0$
Radio de la esfera osculatriz	$R' = N(1-\frac{1}{2}e^2)$		$R' = N$

* Recuerdese que $\text{sen}^2 45° = \text{cos}^2 45° = \frac{1}{2}$ de consiguiente $2\,\text{sen}^2 45° = 1$

Por ella se ve que en el ecuador se tiene $N = R$, y $n = \rho$; miéntras que por el contrario, en el polo $N = \rho$, y $n = R$. Por lo tocante á v se deduce que tanto en el ecuador como en el polo coincide el zenit geográfico con el geocéntrico. A la latitud de 45° el radio central R es igual á ρ con muy corta diferencia, pues sus valores pueden escribirse así: $R = a(1-\frac{1}{4}e^2)$, y $\rho = a(1-e^2)(1+\frac{3}{4}e^2) = a(1-\frac{1}{4}e^2)$. Nótese igualmente que la expresion del radio polar desarrollada tambien hasta la segunda potencia de e, da: $a(1-\frac{1}{2}e^2)$, y que si se multiplica por el radio ecuatorial y se extrae despues la raiz cuadrada del producto, se tiene: $a(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}$, que es precisamente el valor del radio á 45° de latitud; luego *el radio central á la latitud media puede suponerse igual al término medio geométrico entre los radios ecuatorial y polar*, ó bien: $R_{45} = \sqrt{ab}$

12.—**Arcos del meridiano.**—La expresion del arco elemental de una curva es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

y diferenciando el valor (5) de x con relacion á la variable ϕ, resulta:

$$dx = -\frac{a}{r}\,\text{sen. }\phi\,d\phi + \cos.\phi\,d\,\frac{a}{r} = -\frac{a}{r}\,\text{sen. }\phi\,d\phi - \frac{a\cos.\phi\,dr}{r^2} \quad **$$

Sustituyendo el valor de dr, que es: $dr = -\frac{e^2\,\text{sen. }\phi\cos.\phi\,d\phi}{r}$, se tendrá:

$$dx = -\left(\frac{a}{r}\,\text{sen. }\phi - \frac{a e^2\,\text{sen. }\phi\cos.^2\phi}{r^3}\right)d\phi = -\frac{a\,\text{sen. }\phi}{r^3}(r^2 - e^2\cos.^2\phi)\,d\phi$$

y por último:

$$dx = -a(1-e^2)\,\frac{\text{sen. }\phi\,d\phi}{r^3} \qquad (17)$$

** Aquí se toma á r como variable por ser una funcion de φ, pues $r = (1-e^2\text{sen}^2\varphi)$; como $r^2 = (1-e^2\text{sen}^2\varphi)$ $2r\,dr = -2e^2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi$ por ser $d\,\text{sen}^2\varphi = d(\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi) = \text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,d\varphi\,\text{sen}\,\varphi = 2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi$ y de consiguiente $dr = -\frac{e^2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{r}$

De una manera semejante podria calcularse dy; pero puesto que se tiene la relacion: $dy = -\cot.\phi\, dx$, se hallará por sustitucion:

$$dy = a(1-e^2)\frac{\cos.\phi\, d\phi}{r^3} \quad \ldots\ldots (18)$$

Introduciendo ambos valores en la expresion diferencial del arco, se obtendrá fácilmente:

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{r^3} d\phi = \rho . d\phi \quad \ldots\ldots (19)$$

lo cual indica que *la extension de un arco pequeño del meridiano es igual á la diferencia de latitud de sus extremos multiplicada por el radio de curvatura.* Para mayor precision debe tomarse el radio que corresponde á la latitud del medio del arco.

Es necesario tener presente que $d\phi$ indica un arco expresado en partes del radio trigonométrico, por lo que al aplicar la fórmula si se quiere introducir ese arco por su número de segundos, deberá multiplicarse por sen. 1″. En cuanto á ds es una extension lineal expresada en las mismas unidades que ρ. Calculemos, por ejemplo, el tamaño de un grado del meridiano á la latitud 19° 26′ 12.″3 de la Escuela de Ingenieros de México.

ρ	6.8022~~169~~	
3600″	3.5563025	
sen. 1″	4.6855749	
ds	5.0440943	$ds = 110686^m4$

Si esta cantidad se divide por 60, se tendrá 1844^{m}77 por extension de 1′, esto es, por la distancia entre dos puntos del meridano de México cuyas verticales formen un ángulo de 1′. De una manera semejante se encontraria que 1″ vale 30^{m}746.

Basta la consideracion de que es elíptico el meridiano terrestre para comprender que los arcos de igual amplitud deben tener extensiones variables á diversas latitudes. Para obtener la ley de esta variacion sustituyamos en la ecuacion (19) el valor de r, y elevemos su denominador al numerador, de lo que resulta desarrollando.

$$ds = a(1-e^2)\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\phi + \tfrac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\phi + \tfrac{35}{16}e^6\,\text{sen.}^6\phi + \ldots\ldots\right) d\phi$$

Para $\phi = 0$ se tiene en el ecuador $\mathrm{d}\,s_0 = a\,(1 - e^2)\,\mathrm{d}\,\phi$. Sustituyendo en la anterior y no apreciando mas que hasta la segunda potencia de e, resultará:

$$\mathrm{d}\,s - \mathrm{d}\,s_0 = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{d}\,s_0\,e^2\,\mathrm{sen.}^2\,\phi$$

Para una amplitud dada $\mathrm{d}\,\phi$, la extension $\mathrm{d}\,s_0$ es constante, y por tanto lo será el coeficiente de $\mathrm{sen.}^2\,\phi$. Representándolo por C tendrémos:

$$\mathrm{d}\,s - \mathrm{d}\,s_0 = C\,\mathrm{sen.}^2\,\phi$$

resultado que indica que *el incremento de los arcos de igual amplitud en el meridiano es proporcional al cuadrado del seno de la latitud á que se consideran.*

13.—La fórmula (19) permite calcular con bastante exactitud la extension de los arcos del meridiano cuando son pequeños, esto es, cuando no exceden de dos ó tres grados; pero pasando de esa amplitud ya no seria exacto calcularlos por medio de una expresion diferencial, sino que será preciso hacer ántes la integracion de esta. Para conseguirlo desarrollémosla en serie para obtener:

$$s = a\,(1 - e^2)\int (1 + \tfrac{3}{2}\,e^2\,\mathrm{sen.}^2\,\phi + \tfrac{15}{8}\,e^4\,\mathrm{sen.}^4\,\phi + \tfrac{35}{16}\,e^6\,\mathrm{sen.}^6\,\phi + \ldots\ldots)\,\mathrm{d}\,\phi$$

Se tiene, por otra parte:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen.}^2\,\phi &= \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos.\,2\,\phi)\\
\mathrm{sen.}^4\,\phi &= \tfrac{1}{8}\,(3 - 4\cos.\,2\,\phi + \cos.\,4\,\phi)\\
\mathrm{sen.}^6\,\phi &= \tfrac{1}{32}\,(10 - 15\cos.\,2\,\phi + 6\cos.\,4\,\phi - \cos.\,6\,\phi)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores, y haciendo para abreviar:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \tfrac{3}{4}\,e^2 + \tfrac{45}{64}\,e^4 + \tfrac{175}{256}\,e^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Log. } A &= 0.00218214\\
B &= \tfrac{3}{4}\,e^2 + \tfrac{15}{16}\,e^4 + \tfrac{525}{512}\,e^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{,, } B &= 7.7031107\\
C &= \tfrac{15}{64}\,e^4 + \tfrac{105}{256}\,e^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{,, } C &= 5.023664\\
D &= \tfrac{35}{512}\,e^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{,, } D &= 2.30802
\end{aligned}$$

la serie anterior se representará así:

$$s = a\,(1 - e^2)\int (A - B\cos.\,2\,\phi + C\cos.\,4\,\phi - D\cos.\,6\,\phi)\,\mathrm{d}\,\phi \quad *$$

y efectuando la integracion, resulta:

$$s = a\,(1 - e^2)\,(A\,\phi - \tfrac{1}{2}\,B\,\mathrm{sen.}\,2\,\phi + \tfrac{1}{4}\,C\,\mathrm{sen.}\,4\,\phi - \tfrac{1}{6}\,D\,\mathrm{sen.}\,6\,\phi)\ldots(20)$$

* Siendo $\mathrm{sen}\,2\varphi = 2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$ $\quad d.\,\mathrm{sen}\,2\varphi = -2\,\mathrm{sen}^2\varphi\,d\varphi + 2\cos^2\varphi\,d\varphi = 2\cos 2\varphi\,d\varphi$ ó $\frac{1}{2}\,d\,\mathrm{sen}\,2\varphi = \cos 2\varphi\,d\varphi$ y por consiguiente la integral de $\int \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\varphi$, puesto que $\frac{1}{2}$ es constante. Así mismo

En esta fórmula el primer término del tercer factor contiene el arco ϕ contado desde el ecuador, y expresado en partes del radio trigonométrico; pero puede expresarse en segundos multiplicándolo por sen. $1''$.

Para hallar la distancia entre dos puntos situados en el mismo meridiano, puede calcularse la de cada uno al ecuador por la ecuacion precedente, y su diferencia será la distancia que se busca; pero es mas breve determinarla directamente de este modo. Si es ϕ' la latitud del otro punto se obtendrá por la fórmula la distancia s', que restada de s, produce:

$$s-s' = a(1-e^2)\Big(\begin{matrix} A\,(\phi-\phi') - B \text{ sen. } (\phi-\phi') \cos.\ (\phi+\phi') \\ +\tfrac{1}{2} C \text{sen. } 2(\phi-\phi') \cos. 2(\phi+\phi') - \tfrac{1}{3} D \text{ sen. } 3(\phi-\phi') \cos. 3(\phi+\phi') \end{matrix}\Big)$$

ó bien designando por g la diferencia de latitudes, esto es:..... $g = \phi - \phi'$, se obtiene:

$$s-s' = a(1-e^2)\Big(\begin{matrix} A\,g - B \text{ sen. } g \cos.\ (2\phi-g) \\ +\tfrac{1}{2} C \text{sen. } 2g \cos. 2(2\phi-g) - \tfrac{1}{3} D \text{ sen. } 3g \cos. 3(2\phi-g) \end{matrix}\Big) \quad \ldots (21)$$

Calculemos, por ejemplo, el arco de meridiano comprendido entre los paralelos de 15° y 33° de latitud. Se tendrá: $\phi - \phi' = 18°$ y $\phi + \phi' = 48°$.

a.....	6.8046435						
$1-e^2$.....	9.9970917						
				0.5.....	9.69897	*0.3*....	9.4771
	6.8017352	....	6.8017352	.....	6.80174	.....	6.8017
A.....	0.0021821	B....	7.7031107	C.....	5.02366	D....	2.3080
64800''....	4.8115750	sen. *18°*....	9.4899824	sen. *36°*...	9.76922	sen. *54°*	9.9080
sen. *1''*....	4.6855749	cos. *48°*....	9.8255109	cos. *96°*...	9.01923—	cos. *144°*	9.9080 —
	6.3010672		3.8203392		0.31282—		8.4028 —

Primer término.....	2000171m4
Segundo ,, ...	—6612. 1
Tercero ,, ...	— 2. 1
Cuarto ,, ...	0. 0
$s - s' =$	1993557m2

Cuando $\phi = 90°$, la fórmula (20) suministra el cuadrante del meridiano, siendo igual á $\frac{1}{2}\pi$ el arco ϕ en partes del radio, y se tiene:

$$\text{Cuadrante} = s = \tfrac{1}{2} a (1-e^2) \pi A \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

ó bien introduciendo el valor de A y desarrollando, resulta la serie:

$$\text{Cuadrante} = s = \tfrac{1}{2}\, a\, \pi\, (1 - \tfrac{1}{4}\, e^2 - \tfrac{3}{64}\, e^4 - \tfrac{5}{256}\, e^6 - \ldots) \ldots\ldots\ldots (23)$$

Hagamos la aplicacion de estas fórmulas.

$\frac{1}{2}$	9.6989700		
a	6.8046435		
π	0.4971499		
$1 - e^2$	9.9970917		
A	0.0021821		
s	7.0000372	Cuadrante =	10000857m1 (*)

El mismo resultado se obtiene por el cálculo de la serie (23), segun se ve á continuacion:

		$\frac{1}{4}$	9.3979400	$\frac{3}{64}$	8.67094	$\frac{5}{256}$	8.2907
		e^2	7.8244057	e^4	5.64881	e^6	3.4732
$\frac{1}{2}\, a\, \pi$	7.0007634		7.0007634		7.00076		7.0008
			4.2231091		1.32051		8.7647

Primer término		10017593m3
Segundo	,,	—16715. 1
Tercer	,,	— 20. 9
Cuarto	,,	— 0. 1
	Cuadrante =	10000857m1

14.—**Arcos de paralelo.**—Segun la generacion del elipsoide, cualquiera punto M de la elipse generatriz describe un círculo que se llama *paralelo* al ecuador, por la posicion que tiene realmente respecto de ese plano, siendo $M\,O = x$ su radio. Por consiguiente un arco de g grados tendrá una extension p, que puede calcularse por la fórmula:

$$p = \frac{\pi}{180^\circ}\, g\, N \cos.\, \phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

(*) Cuando en 1799 se adoptó en Francia el sistema decimal de medidas se tomó por base el resultado de las operaciones ejecutadas para medir el arco del meridiano que pasa por Paris, estableciéndose en la ley que el *metro* representaba la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre; pero posteriormente se halló un error en los cálculos de Delambre, cuyo efecto fué el de haberse asignado al *metro legal* una extension un poco menor de la que realmente le correspondia sin la existencia de ese error. Como se ve, el conjunto de las medidas modernas da 857m de mas en la extension del cuadrante, de modo que el metro *real* ó *físico* es cais 0m0001 mayor que el legal.

La cantidad $\frac{\pi}{180^\circ}$ expresa el arco 1° en partes del radio, cuyo logaritmo constante introducido en la ecuacion anterior la reduce á la siguiente:

$$p = (8.2418774)\, g\, N \cos.\, \phi$$

Determinemos la extension en metros de un grado en el paralelo de México. En este caso se tiene $g = 1°$, y $\phi = 19° 26' 12''.3$

Const.	8.2418774	
N	6.8048041	
cos. ϕ	9.9745160	
p	5.0211975	$p = 105002^m0$

El arco de un minuto tendrá, pues, la extension de 1750^m03, y el de un segundo la de 29^m167. Si $\phi = 0°$ y $g = 1°$, resulta un grado del ecuador de 111306^m6, que equivale á 26.564821 leguas mexicanas.

15.—**Intersecciones del elipsoide con planos verticales.**—Todos los planos que contienen la línea vertical de un punto M (fig. 2ª), se llaman planos verticales, y están caracterizados por la propiedad de ser perpendiculares al plano tangente en M, que se llama el *horizonte* de este punto. Entre todos los planos verticales hay uno cuyo azimut es de 90°, ó bien que forma un ángulo recto con el meridiano, y señala la posicion de los puntos *Este* y *Oeste*. Este plano es el que se designa con el nombre de *primer vertical*, segun se ha dicho en la Topografía.

La interseccion de cualquiera plano vertical con la superficie de la tierra produce una elipse cuya ecuacion vamos á determinar con el objeto de hallar su radio de curvatura en el punto M, por ser de uso frecuente en la Geodesia. Sea MP una parte de la seccion originada por el plano vertical PMG, que forma con el meridiano un ángulo azimutal $BMP = u$. Tomando por planos coordenados el ecuador ACD, el meridiano ACB y otro meridiano BCD perpendicular á este, adoptemos por eje de las x la línea CA, por eje de las y la CD, y finalmente la CB por eje de las z. Segun esto, las coordenadas de un punto cualquiera P de la interseccion serán: $x' = CS$, $y' = ST$ y $z' = TP$; y como P está situado en la superficie del elipsoide, sus coordenadas satisfarán la ecuacion de este, que

es $a^2 z'^2 + b^2 (x'^2 + y'^2) = a^2 b^2$, y que introduciendo el valor de b^2, puede ponerse bajo esta forma:

$$z'^2 + (1 - e^2)(x'^2 + y'^2) = a^2 (1 - e^2)$$

Tomemos ahora en el plano de la curva la vertical GM por eje de ordenadas siendo G el orígen, y designemos por x é y las coordenadas del mismo punto P referidas á este eje; á saber $y = GQ$, $x = QP$. Hallando los valores de x' y' y z' en funcion de x é y, y sustituyéndolos en la ecuacion del elipsoide, determinarémos la de la curva. Para esto tracemos la línea PN perpendicular al meridiano, así como en este plano las líneas NL y LR, la primera paralela y la segunda perpendicular á CA. El plano PQN resultará perpendicular á GM, formando las líneas PQ y QN el ángulo PQN igual al azimut u de la seccion. Igualmente la línea NQ perpendicular á GM formará con LR, perpendicular á CA, el ángulo..... $NQL = MGA = \phi$. De aquí se deducen los vlores siguientes:

$$x' = CG + GR - NL \qquad y' = PN \qquad z' = RQ + QL$$

y como ademas se tiene:

$$CG = \frac{a e^2 \cos. \phi}{r}; \qquad NP = x \text{ sen. } u;$$

$$GR = y \cos. \phi; \qquad QR = y \text{ sen. } \phi;$$

$$NL = NQ \text{ sen. } \phi = x \cos. u \text{ sen. } \phi; \qquad QL = NQ \cos. \phi = x \cos. u \cos. \phi;$$

resultará sustituyendo:

$$x' = \frac{a e^2 \cos. \phi}{r} + y \cos. \phi - x \cos. u \text{ sen. } \phi$$

$$y' = x \text{ sen. } u$$

$$z' = y \text{ sen. } \phi + x \cos. u \cos. \phi$$

Introducidos estos valores en la ecuacion del elipsoide, y haciendo para abreviar:

$$A = 1 - e^2 (1 - \cos.^2 u \cos.^2 \phi) \qquad D = -\frac{a e^2 (1 - e^2) \cos. u \text{ sen. } 2\phi}{r}$$

$$B = 1 - e^2 \cos.^2 \phi \qquad E = \frac{2 a e^2 (1 - e^2) \cos.^2 \phi}{r}$$

$$C = e^2 \cos. u \text{ sen. } 2\phi \qquad F = \frac{a^2}{r^2} (1 - e^2)^2 (1 + e^2 \cos.^2 \phi)$$

se obtendrá fácilmente la siguiente ecuacion de la curva:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F$$

que es la de la elipse que resulta de la interseccion de la tierra con el plano.

16.—Designando ahora por R_u el radio de curvatura para un punto de esta seccion, se tiene:

$$R_u = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

y diferenciando dos veces la ecuacion anterior en el supuesto de ser dx constante, se obtendrá sucesivamente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + Cy + D}{2By + Cx + E}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2A + 2B\frac{dy^2}{dx^2} + 2C\frac{dy}{dx}}{2By + Cx + E}$$

Sustituidos estos valores en la expresion de R_u, darán el radio de curvatura del punto cualquiera de la curva cuyas coordenadas sean x é y; pero como el que importa conocer es el correspondiente á M cuyas coordenadas son $x=0$, $y=\frac{a(1-e^2)}{r}$, tendrémos introduciendo estos valores y los de los coeficientes A, B, C, &c.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad * \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r\left(1-e^2\left(1-\cos.^2 u \cos.^2 \phi\right)\right)}{a(1-e^2)}$$

En consecuencia el radio de curvatura en el punto M, es:

$$R_u = \frac{a(1-e^2)}{r(1-e^2+e^2\cos.^2 u \cos.^2 \phi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Cuando u es igual á 0° ó á 180°, esto es, cuando el plano secante se confunde con el meridiano, resulta. $R_0 = \frac{a(1-e^2)}{r(1-e^2 \operatorname{sen.}^2 \phi)} = \frac{a(1-e^2)}{r^3}$; que es en efecto el valor de ρ hallado para el radio de curvatura del meridiano. Si $u=90°$, ó bien $u=270°$, se obtiene:

$$R_{90} = \frac{a(1-e^2)}{r(1-e^2)} = \frac{a}{r} = N$$

luego *el radio de curvatura de una seccion perpendicular al meridia-*

$* \frac{dy}{dx} = -\frac{Cy+D}{2By+E} = -\frac{\frac{ae^2(1-e^2)\cos u \sin 2\phi}{r} - \frac{a^2e^2(1-e^2)\cos u \sin 2\phi}{r}}{2By+E}$

$= 0$

no es igual á la normal mayor del punto de interseccion de los doplanos.

Para facilitar el cálculo logarítmico de la expresion (25) elevemos el denominador al numerador desarrollando hasta la segunda potencia de e; y teniendo presente que $\frac{a}{r} = N$, resultará:

$$R_u = N\,(1 - e^2 \cos.^2 \phi \cos.^2 u) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

de donde se obtiene la fórmula logarítmica.

$$\log. R_u = \log. N - Me^2 \cos.^2 \phi \cos.^2 u$$

Esta ecuacion suministra directamente el log. del radio de curvatura de la seccion cuyo azimut es u, conociendo el de la normal mayor que corresponde á la misma latitud. Calculando el logaritmo de la cantidad constante Me^2, se tiene:

$$\log. R_u = \log. N - (7.46219) \cos.^2 \phi \cos.^2 u \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Determinemos, por ejemplo, el radio del círculo osculador de la seccion que forma un ángulo de 45° con el meridiano de México.

Cons.....	7.46219		
$\cos.^2 \phi$.....	9.94903		
$\cos.^2 u$.....	9.69897	$\log. N = 6.8048044$	
	7.11019.....	-0.0012888	
		Log. $R_{45} = 6.8035153$	$R_{45} = 6360852^m$

Como una de las Tablas que van al fin de este Capítulo proporciona los logaritmos de las normales para todas las latitudes de la República, se calculará con la mayor facilidad el radio de curvatura de cualquiera seccion que tenga u por azimut.

17.—Si en los coeficientes A, B, C, &c., de la ecuacion general de las secciones verticales del elipsoide se hace $u = 90°$, se nulificarán los valores de C y D, resultando $Ax^2 + By^2 + Ey = F$ por ecuacion de la seccion originada por el primer vertical, referida al extremo de la normal menor como orígen. Busquemos los semiejes a' y b'

de esta elipse. Desde luego haciendo $x = 0$, se obtiene para los puntos M y K (fig. 1ª):

$$B y_1^2 + E y_1 = F$$

cuya resolucion da los dos valores siguientes, que corresponden á aquellos puntos:

$$y_1 = -\frac{E}{2B} + \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}} \qquad y_2 = -\frac{E}{2B} - \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}}$$

La semidiferencia de estos suministrará el semieje menor MK, á saber:

$$b' = \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}} = \frac{a e^2 (1 - e^2) \cos.^2 \phi}{r (1 - e^2 \cos.^2 \phi)} \sqrt{1 + \frac{1 - e^4 \cos.^4 \phi}{e^4 \cos.^4 \phi}}$$

$$b' = \frac{a}{r}\left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos.^2 \phi}\right)$$

Para calcular el semieje mayor a' es necesario determinar las coordenadas de un punto por lo ménos. Conservando el mismo eje de ordenadas MK, la ecuacion de la curva referida á su centro S será:

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$$

Calculemos las coordenadas del punto de la elipse que está situado en el ecuador, y cuya proyeccion es G. Se tiene:

$$SG = y = \tfrac{1}{2} MK - n = \frac{a (1 - e^2)}{r (1 - e^2 \cos.^2 \phi)} - \frac{a (1 - e^2)}{r} = \frac{a (1 - e^2) e^2 \cos.^2 \phi}{r (1 - e^2 \cos.^2 \phi)}$$

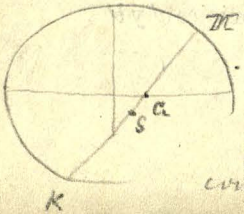
y es intersección de este con el plano KM

La absisa, que está situada en el plano del ecuador, será media proporcional entre las dos partes del diámetro $2a$, y así:

$$x^2 = \left(a + \frac{a e^2 \cos. \phi}{r}\right)\left(a - \frac{a e^2 \cos. \phi}{r}\right) = \frac{a^2}{r^2} (r^2 - e^4 \cos.^2 \phi)$$

Conociendo los valores de x é y, la ecuacion de la curva da:

$$a'^2 = \frac{x^2}{1 - \frac{y^2}{b'^2}}$$



Las ordenadas $KG = y_1$ $GM = y$ pueden considerarse, la primera como la suma del semieje KS y SG y la segunda como la diferencia del mismo $KS = SM$ y SG; en consecuencia la mayor $KS = b' = \frac{1}{2}(KG - GM)$

Con los valores hallados se tiene $\frac{y}{b'} = e^2 \cos.^2 \phi$, por lo cual se encuentra:

$$a'^2 = \frac{a^2 (r^2 - e^4 \cos.^2 \phi)}{r^2 (1 - e^4 \cos.^4 \phi)} = \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{1 - e^2 + e^2 \cos.^2 \phi - e^4 \cos.^2 \phi}{(1 - e^2 \cos.^2 \phi)(1 + e^2 \cos.^2 \phi)}$$

$$= \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{(1 - e^2)(1 + e^2 \cos.^2 \phi)}{(1 - e^2 \cos.^2 \phi)(1 + e^2 \cos.^2 \phi)}$$

y finalmente:

$$a' = \frac{a}{r} \left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos.^2 \phi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La excentricidad de esta seccion puede calcularse por la fórmula:

$$e'^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = 1 - \frac{b'^2}{a'^2} = 1 - \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos.^2 \phi} = \frac{e^2 \operatorname{sen}.^2 \phi}{1 - e^2 \cos.^2 \phi}$$

por la cual se ve que la excentricidad es nula cuando $\phi = 0$, y es igual á e cuando $\phi = 90°$, creciendo en general con la latitud. En efecto, si suponemos el punto M en A, su primer vertical se confunde con el ecuador, que es un círculo; y si se supone en B, su primer vertical será un meridiano perpendicular al de la figura. A la latitud de México el cuadrado de la excentricidad del primer vertical es solo $e'^2 = 0.0007435$, ó próximamente la décima parte del valor que obtuvimos para el meridiano; de lo cual se deduce que aquella seccion difiere muy poco de un círculo.

Un arco de g grados de amplitud y perpendicular al meridiano abrazará una extension dada por la fórmula:

$$q = \frac{\pi}{180°} g N = (8.2418774)\, g N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

y puesto que N es mayor que ρ, concluirémos que en el sentido de Oriente á Poniente la curvatura de la tierra es algo ménos pronunciada que de Norte á Sur. De la fórmula precedente resulta que á la latitud de México un grado del primer vertical tiene 111347^{m}6, y 30^{m}930 el arco de 1″, extension que es 0^{m}184 mayor que 1″ del meridiano.

18.—**Reduccion de las líneas geodésicas á segundos.**— Se llama *línea geodésica* la distancia mas corta que hay entre dos puntos del globo, contada sobre la superficie de este. Generalmente hablando, esta línea es de doble curvatura, puesto que las normales

de sus diversos puntos no están en un mismo plano; pero como las mayores líneas geodésicas que se consideran en la práctica comun de la ciencia son muy pequeñas respecto del radio del elipsoide, ningun error apreciable se origina de suponerlas curvas planas; y así es que las considerarémos como rigurosamente tales.

Sea $A\,B = k$ (fig. 3ª) la línea geodésica que une los puntos A y B, y que por su pequeñez relativa se confunde sensiblemente con el arco trazado con el radio $C\,A = R_u$ de su círculo osculador. Si con un radio $C\,a$ tomado por unidad, se describe el arco $a\,b = \theta$, este arco medirá la amplitud de k, y la figura da la proporcion $1 : \theta :: R_u : k$, de donde se obtiene:

$$\theta = \frac{k}{R_u} \qquad (29)$$

En esta ecuacion θ representa el arco expresado en partes de la unidad con que está descrito; para que exprese segundos será necesario multiplicarlo por sen. $1''$, y se tendrá poniendo el valor (26) de R_u:

$$\theta = \frac{k}{N \text{ sen. } 1''}\,(1 - e^2 \cos.^2 \phi \cos.^2 u)^{-1} = \frac{k}{N \text{ sen. } 1''} + \frac{k\,e^2 \cos.^2 \phi \cos.^2 u}{N \text{ sen. } 1''}$$

Haciendo $C = \frac{1}{N \text{ sen. } 1''}$ y calculando el logaritmo de la constante, tendrémos:

$$\theta = C\,k + (7.82441)\,C\,k \cos.^2 \phi \cos.^2 u \qquad (30)$$

El coeficiente C hace un papel importante en la práctica, y sus logaritmos se hallan calculados en una Tabla del Capítulo VII.

Como ejemplo calcularémos el ángulo que forman las verticales de dos puntos cuya distancia reducida al nivel del mar es $k = 36000^m$ con un azimut de 30° y siendo la latitud de 21° 30′.

C	8.5095868	Const.	7.82441
k	4.5563025	$\cos.^2 \phi$	9.93735
	3.0658893		3.06589
	1163.″83	$\cos.^2 u$	9.87506
	5. 04		0.70271
θ	= 1168.″9 = 19′ 28.″9		

19.—**Reduccion de segundos á metros.**—Este problema, inverso del anterior, tiene por objeto hallar la extension k de la lí-

nea geodésica cuya amplitud es θ. La ecuacion (29) da, expresando á θ en segundos:

$$k = \theta\, R_u \text{ sen. } 1'' \ldots\ldots (31)$$

Sustituyendo el valor de R_u y el de C, ó lo que es lo mismo, despejando á k en la fórmula (30), resulta:

$$k = \frac{\theta}{C} - (7.82441)\,\frac{\theta}{C}\cos.^2\phi\cos.^2 u \ldots\ldots (32)$$

Ejemplo. A la latitud de 32° ¿qué distancia habrá entre dos puntos del meridiano cuya diferencia de latitud sea $\theta = 25'\ 37''$?

θ	3.1866739	Const.	7.82441
C	8.5093742	$\cos.^2\phi$	9.85684
	4.6772997		4.67730
	47566^{m}3	$\cos.^2 u$	0.00000
	228. 3		2.35855
k =	47338^{m}0		

En casos como este, puesto que se trata de una línea cuyo azimut es nulo, seria preferible hacer uso de la fórmula (19) cuando se tiene una Tabla de los logaritmos de ρ como la que va al fin de este Capítulo. Expresando á θ en segundos y haciendo $A = \frac{1}{\rho \text{ sen. } 1''}$, se tendrá:

$$k = \frac{\theta}{A}$$

Los logaritmos de A son tan útiles como los de C, y constan igualmente en la Tabla del Capítulo VII. En el ejemplo precedente se obtendria:

θ	3.1866739	
A	8.5114678	
k	4.6752061	$k = 47338^m$

20.—**Diferentes modos de escribir las fórmulas.**—La primera de las Tablas que terminan este Capítulo contiene los logaritmos de r, R y N calculados de 30′ en 30′ para todas las latitudes de nuestro país, con sus diferencias por 1′, cuyo objeto es el de facilitar las interpolaciones para cualquiera latitud intermedia.

Estas diferencias son comunes á todos los logaritmos de aquellas cantidades correspondientes á la misma línea horizontal, teniendo presente que r y R van decreciendo y N aumentando cuando crece la latitud que es el argumento de la Tabla.

La Tabla II contiene los logarimos de ρ y el valor del ángulo de la vertical $v = \phi - \phi'$, tambien con sus diferencias por 1′. La III da en metros los valores crecientes de los grados del meridiano, y los decrecientes de los grados de los paralelos, con sus diferencias correspondientes.

Para calcular estas Tablas me he valido de las fórmulas desarrolladas hasta aquí; pero como no es raro encontrarlas en algunas obras bajo otras formas que presentan ventajas peculiares, daré á conocer estas trasformaciones refiriéndome únicamente á las principales líneas del elipsoide. Algunos calculadores hacen uso de ángulos auxiliares que facilitan considerablemente las aplicaciones logarítmicas. Así, por ejemplo, haciendo

$$e \operatorname{sen.} \phi = \operatorname{sen.} \psi$$

el valor de r será:

$$r = (1 - e^2 \operatorname{sen.}^2 \phi)^{\frac{1}{2}} = \cos. \psi$$

y las demas líneas tendrán las siguientes expresiones:

$$N = \frac{a}{\cos. \psi}$$

$$R = a \cos. \psi$$

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\cos.^3 \psi}$$

$$\tan. v = \frac{0.5\, e^2 \operatorname{sen.} 2\phi}{\cos.^2 \psi}$$

El ángulo subsidiario ψ es siempre muy pequeño, pues su mayor valor, que corresponde á $\phi = 90°$ es solo de 4° 41′ 10″. Este método de cálculo es ciertamente el mas breve, sobre todo cuando hay necesidad de hacer numerosas aplicaciones, como sucede en la formacion de Tablas.

Otros geómetras prefieren el uso de las series; así, por ejemplo, desarrollando la potencia $\frac{1}{2}$ de r, se obtiene:

$$r = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{sen.}^2 \phi - \tfrac{1}{8} e^4 \operatorname{sen.}^4 \phi - \tfrac{1}{16} e^6 \operatorname{sen.}^6 \phi - \ldots\ldots$$

y de una manera semejante:

$$N = a + \tfrac{1}{2} a e^2 \operatorname{sen.}^2 \phi + \tfrac{3}{8} a e^4 \operatorname{sen.}^4 \phi + \tfrac{5}{16} a e^6 \operatorname{sen.}^6 \phi + \ldots\ldots$$
$$R = a - \tfrac{1}{2} a e^2 \operatorname{sen.}^2 \phi - \tfrac{1}{8} a e^4 \operatorname{sen.}^4 \phi - \tfrac{1}{16} a e^6 \operatorname{sen.}^6 \phi - \ldots\ldots$$
$$\rho = a(1-e^2)(1 + \tfrac{3}{2} e^2 \operatorname{sen.}^2 \phi + \tfrac{15}{8} e^4 \operatorname{sen.}^4 \phi + \tfrac{35}{16} e^6 \operatorname{sen.}^6 \phi + \ldots\ldots)$$

La ventaja de este procedimiento consiste en que el calculador es dueño de llevar la aproximacion hasta el grado que quiera haciendo uso de logaritmos de cuatro ó cinco cifras; pero en general esta ventaja deja de existir cuando se tiene por principal objeto el cálculo de los logaritmos de las cantidades y no el de las cantidades mismas, como sucede por lo comun en la aplicacion de las fórmulas geodésicas.

Finalmente, en algunos cálculos astronómicos se toma por unidad de longitud el radio ecuatorial a, en cuyo caso se tiene:

$$R = r$$
$$N = \frac{1}{r}$$
$$\rho = \frac{1-e^2}{r^3}$$
&c. &c.

21.—**Superficie del elipsoide terrestre.**—Para resolver este problema con mas generalidad, comenzaré por determinar la superficie de un cuadrilátero formado sobre el elipsoide por dos paralelos de latitud y dos meridianos cualesquiera que formen entre sí un ángulo de L grados.

Al girar la elipse generatriz al derredor del eje polar, cualquiera de sus puntos M (fig. 1ª) cuya distancia al eje de rotacion es x, describirá una circunferencia representada por $2\pi x$, y por consiguiente los dos meridianos cuyos planos forman el ángulo L, interceptarán una parte de esta circunferencia que tendrá por valor $\frac{\pi L x}{180^\circ}$. Si este se multiplica por el arco elemental del meridiano, tendrémos la expresion del elemento de la superficie, á saber:

$$\mathrm{d}S = \frac{\pi}{180^\circ} L x \, \mathrm{d}s$$

y puesto que $x = N \cos. \phi$, y $\mathrm{d}s = \rho \, \mathrm{d}\phi$, resultará sustituyendo:

$$\mathrm{d}S = \frac{\pi a^2 L (1-e^2)}{180^\circ} \cdot \frac{\cos. \phi \, \mathrm{d}\phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen.}^2 \phi)^2}$$

Con el objeto de facilitar la integracion de esta expresion, hagamos sen. $\phi = z$, de donde resulta cos. $\phi \, d\phi = d z$. Sustituyendo se tiene:

$$d S = \frac{\pi a^2 L (1 - e^2)}{180^\circ} \cdot \frac{d z}{(1 - e^2 z^2)^2}$$

Pasando el denominador al numerador, y desarrollando, resulta:

$$d S = \frac{\pi a^2 L (1 - e^2)}{180^\circ} (1 + 2 e^2 z^2 + 3 e^4 z^4 + 4 e^6 z^6 + \ldots\ldots) d z$$

y efectuando la integracion de la serie:

$$S = \frac{\pi a^2 (1 - e^2) L}{180^\circ} (z + \tfrac{2}{3} e^2 z^3 + \tfrac{3}{5} e^4 z^5 + \tfrac{4}{7} e^6 z^7 + \ldots\ldots)$$

No he añadido constante porque la integral se nulifica cuando $z = 0$, lo que equivale á contar la superficie desde el ecuador hasta la latitud ϕ. Reponiendo finalmente sen. ϕ en lugar de z, se obtendrá:

$$S = \frac{\pi a^2 L (1 - e^2) \text{ sen. } \phi}{180^\circ} (1 + \tfrac{2}{3} e^2 \text{ sen.}^2 \phi + \tfrac{3}{5} e^4 \text{ sen.}^4 \phi + \tfrac{4}{7} e^6 \text{ sen.}^6 \phi \ldots) \ldots (33)$$

Por abreviacion designando por A la constante $\frac{\pi a 2 (1 - e 2)}{180^\circ}$, la ecuacion anterior da para las latitudes ϕ_1 y ϕ_2:

$$S_1 = A L (\text{sen. } \phi_1 + \tfrac{2}{3} e^2 \text{ sen.}^3 \phi_1 + \tfrac{3}{5} e^4 \text{ sen.}^5 \phi_1 + \ldots\ldots)$$
$$S_2 = A L (\text{sen. } \phi_2 + \tfrac{2}{3} e^2 \text{ sen.}^3 \phi_2 + \tfrac{3}{5} e^4 \text{ sen.}^5 \phi_2 + \ldots\ldots)$$

cuya diferencia, que es:

$$S_1 - S_2 = 2 A L \text{ sen. } \tfrac{1}{2} (\phi_1 - \phi_2) \text{ cos. } \tfrac{1}{2} (\phi_1 + \phi_2) + \tfrac{2}{3} A e^2 L (\text{sen.}^3 \phi_1 - \text{sen.}^3 \phi_2) + \tfrac{3}{5} A e^4 L (\text{sen.}^5 \phi_1 - \text{sen.}^5 \phi_2)$$

dará la superficie del cuadrilátero de L grados de *longitud geográfica*, y comprendido entre las latitudes ϕ_1 y ϕ_2. Nótese que en esta ecuacion el término mas influente es el primero, por lo cual si admitimos que L y $\phi_1 - \phi_2$ sean constantes, deducirémos con bastante aproximacion que *las areas de los cuadriláteros terminados por arcos de igual amplitud decrecen como los cosenos de sus latitudes medias.*

Si en la ecuacion (33) hacemos $L = 360^\circ$, resultará la superficie

de la zona comprendida entre el ecuador y el paralelo de latitud ϕ. Si ademas se supone $\phi = 90°$, y se duplica el resultado, se obtendrá por superficie de todo el elipsoide:

$$S = 4\pi a^2 (1-e^2)\left(1+\tfrac{2}{3}e^2+\tfrac{3}{5}e^4+\tfrac{4}{7}e^6+\ldots\right) = 4\pi a^2\left(1-\tfrac{1}{3}e^2-\tfrac{1}{15}e^4-\tfrac{1}{35}e^6-\ldots\right)$$

Se ve que esta expresion dará la superficie de la esfera que tenga a por radio, cuando se suponga nula la excentricidad e.

Para aplicar la fórmula (33) calculemos por zonas la superficie del elipsoide terrestre. La zona tórrida se supone limitada por los paralelos de 23° 30′ de latitud tanto al Norte como al Sur del ecuador. Las zonas templadas desde esta latitud hasta la de 66° 30′; y finalmente las glaciales terminadas en los polos. Por consiguiente haremos $L = 360°$, ϕ sucesivamente igual á 23° 30′, 66° 30′ y 90°, y duplicarémos los resultados de la fórmula para obtener las zonas de ambos semi-elipsoides. Ademas de esto, como el metro es una unidad demasiado pequeña para valuar areas tan considerables como son las geográficas, introducirémos en el cálculo el valor del radio ecuatorial a en miriámetros con el fin de obtener la superficie en miriámetros cuadrados ó hecto-miriaras. Si tendrá, pues, ... $a = 637{,}7397$ mir.

ZONA TÓRRIDA $\phi = 23° 30'$

arc. 1º..... 8.2418774			
a^2..... 5.6092870			
$1-e^2$..... 9.9970917			
$360°$..... 2.5563025			
C..... 6.4045586	$\frac{2}{3}e^2$..... 7.648316		$\frac{3}{5}e^4$..... 5.42696
sen. ϕ..... 9.6006997	sen.$^2\phi$..... 9.201398		sen.$^4\phi$..... 8.40280
6.0052583	6.005258	.....	6.00526
	2.854973		9.83502

Primer término = 1012181.3
Segundo ,, = 716.1
Tercer ,, = 0.7

Media zona tórrida = 1012898.1 hecto-miriaras

De igual manera con $\phi = 66° 30'$ se hallaria que la zona terrestre contada desde el ecuador hasta esa latitud, tiene 2336612.5 hecto-miriaras, de la que restando el resultado anterior, da 1323714.4 para cada zona templada Haciendo ahora $\phi = 90°$, hallarémos la area del

semielipsoide, de la que deducirémos despues la que corresponde á cada zona glacial.

	$\frac{2}{3}\,e^2$ ..... 7.648316.	$\frac{3}{5}\,e^4$	5.42696
C 6.4045586	6.404559		6.40456
	4.052875		1.83152

Primer término	=	2538391.3
Segundo ,,	=	11294.7
Tercer ,,	=	67.8
Medio elipsoide	=	2549753.8
	—	2336612.5
Zona glacial	=	213141.3

Duplicando las superficies de las zonas para obtener las correspondientes á los dos hemisferios, resulta la siguiente de toda la tierra:

Zona tórrida	=	2025796.2
Zonas templadas	=	2647428.8
Zonas glaciales	=	426282.6
Superficie del globo	=	5099507.6 hecto-miriaras.

En números mas breves, puede decirse que la superficie de la tierra es de cinco millones y cien mil hecto-miriaras, ó bien de quinientos diez millones de miriaras.

22.—**Volúmen del elipsoide.**—La superficie de un paralelo al ecuador es πx^2, que multiplicada por d y produce la siguiente expresion del volúmen elemental:

$$\mathrm{d}\,V = \pi\, x^2\, \mathrm{d}\,y$$

y sustituyendo los valores de x y de d y, se tendrá:

$$\mathrm{d}\,V = \pi\, a^3\,(1-e^2)\,\frac{\cos.^3\phi\,\mathrm{d}\,\phi}{(1-e^2\,\mathrm{sen.}^2\,\phi)^{\frac{5}{2}}}$$

Haciendo sen. $\phi = z$, será muy fácil trasformarla en la que sigue:

$$\mathrm{d}\,V = \pi\, a^3\,(1-e^2)\,\frac{(1-z^2)}{(1-e^2\,z^2)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}\,z$$

que desarrollada en serie, da:

$$\mathrm{d}\,V = \pi\, a^3\,(1-e^2)\left[1-(1-\tfrac{5}{2}\,e^2)\,z^2-(\tfrac{5}{2}\,e^2-\tfrac{3}{8}\,e^4)\,z^4-(\tfrac{3}{8}\,e^4-\tfrac{105}{16}\,e^6)\,z^6-\ldots\right]\mathrm{d}\,z$$

Integrando, sustituyendo el valor de z, haciendo $\phi = 90°$ y duplicando se obtendrá por volúmen del elipsoide:

$$V=2\pi a^3 (1-e^2)(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}e^2+\tfrac{1}{4}e^4+\ldots\ldots)=\tfrac{4}{3}\pi a^3 (1-e^2)(1+\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{3}{8}e^4+\ldots\ldots)$$

Fácilmente se reconoce que el último factor equivale á $(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}$, por lo que

$$V=\tfrac{4}{3}\pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

El cálculo anterior es molesto por el uso de las series; pero si en la expresion del volúmen elemental se sustituye el valor de x tomado de la ecuacion (4) del meridiano, se tiene:

$$V=\int\left(\pi a^2\,dy-\frac{\pi}{1-e^2}y^2\,dy\right)=\pi a^2 y-\frac{\pi y^3}{3(1-e^2)}$$

El volúmen se supone contado desde el ecuador, puesto que V es nulo con y. Para todo el elipsoide harémos $y=b=a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$, y duplicarémos para obtener como ántes:

$$V=2\pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{2}{3}\pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{4}{3}\pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

Apliquemos la fórmula expresando en miriámetros el radio ecuatorial.

$\frac{4}{3}$	0.1249387	
π	0.4971498	
a^3	8.4139305	
$\sqrt{1-e^2}$	9.9985458	
V	9.0345648	$V=1082841293$

En números redondos dirémos que el volúmen de la tierra es de 1083 millones de miriámetros cúbicos.

23.—**Tablas geodésicas.**—Terminaré este Capítulo con las Tablas siguientes que contienen los logaritmos de r, R, N y ρ, así como el ángulo de la vertical y los valores de un grado de meridiano y de paralelo para todas las latitudes de la República. Como es continuo el uso de estos elementos en los cálculos geodésicos, se encontrará una gran ventaja en tomarlos de las Tablas por medio de una simple interpolacion para cualquiera latitud intermedia, en lugar de determinarlos por la aplicacion directa de las fórmulas.

TABLA I.

LOGARITMOS DE r, R Y N.

LATITUD.	LOG. r	LOG. R	LOG. N	DIF. COMUN POR 1′
15° 00′	9.9999028	6.8045463	6.8047407	2.1
15 30	. 8964	. 5399	. 7471	2-2
16 00	. 8898	. 5333	. 7537	2.3
16 30	. 8830	. 5265	. 7605	2.3
17 00	. 8761	. 5196	. 7674	2.4
17 30	. 8689	. 5124	. 7746	2.4
18 00	. 8616	. 5051	. 7819	2.5
18 30	. 8540	. 4975	. 7895	2.6
19 00	. 8463	. 4898	. 7972	2.6
19 30	. 8384	. 4819	. 8051	2.7
20 00	. 8304	. 4739	. 8131	2.8
20 30	. 8221	. 4656	. 8214	2.8
21 00	9.9998137	6.8044572	6.8048298	2.8
21 30	. 8052	. 4487	. 8383	2.9
22 00	. 7965	. 4400	. 8470	2.9
22 30	. 7877	. 4312	. 8558	3.0
23 00	. 7786	. 4221	. 8649	3.1
23 30	. 7694	. 4129	. 8741	3.1
24 00	. 7601	. 4036	. 8834	3.2
24 30	. 7506	. 3941	. 8929	3.2
25 00	. 7410	. 3845	. 9025	3.3
25 30	. 7312	. 3747	. 9123	3.3
26 00	. 7213	. 3648	. 9222	3.4
26 30	. 7112	. 3547	. 9323	3.4
27 00	9.9997011	6.8043446	6.8049424	3.4
27 30	. 6908	. 3343	. 9527	3.5
28 00	. 6803	. 3238	. 9632	3.5
28 30	. 6697	. 3132	. 9738	3.6
29 00	. 6590	. 3025	. 9845	3.6
29 30	. 6482	. 2917	. 9953	3.6
30 00	. 6372	. 2808	6.8050062	3.7
30 30	. 6263	. 2698	. 0172	3.7
31 00	. 6152	. 2587	. 0283	3.7
31 30	. 6040	. 2475	. 0395	3.8
32 00	. 5926	. 2361	. 0509	3.8
32 30	. 5812	. 2247	. 0623	3.9
33 00	9.9995696	6.8042131	6.8050739	
33 30	5580		0855	
34 00	5463		0972	

factor... $r = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ $N = \frac{a}{r}$ $R = ar$

Normal mayor — radio central

34 30 ..... 9.999 5346 ..... 6.805 1089

35 00 ..... 5227 ..... 6.805 1208

TABLA II.

LOGARITMOS DE ρ Y ÁNGULO DE LA VERTICAL.

LATITUD	LOG. ρ	DIF. POR 1′	$v = \phi - \phi'$	DIF. POR 1′
15° 00′	6.8020267	6.4	5′ 44.″3	0.″35
15 30	. 0459	6.6	5 54. 7	. 34
16 00	. 0657	6.8	6 4. 9	. 34
16 30	. 0861	6.9	6 15. 1	. 33
17 00	. 1069	7.2	6 25. 1	. 33
17 30	. 1284	7.3	6 35. 0	. 33
18 00	. 1504	7.6	6 44. 8	. 32
18 30	. 1731	7.7	6 54. 5	. 32
19 00	. 1963	7.9	7 4. 1	. 31
19 30	. 2199	8.0	7 13. 5	. 31
20 00	. 2439	8.3	7 22. 8	. 31
20 30	. 2688	8.4	7 32. 0	. 30
21 00	6.8022940	8.5	7 41. 0	. 30
21 30	. 3195	8.7	7 49. 9	. 29
22 00	. 3456	8.8	7 58. 6	. 29
22 30	. 3721	9.1	8 7. 2	. 28
23 00	. 3993	9.2	8 15. 6	. 28
23 30	. 4269	9.3	8 23. 9	. 27
24 00	. 4549	9.5	8 32. 1	. 27
24 30	. 4833	9.6	8 40. 1	. 26
25 00	. 5122	9.8	8 47. 9	. 26
25 30	. 5416	9.9	8 55. 6	. 25
26 00	. 5713	10.1	9 3. 1	. 25
26 30	. 6015	10.1	9 10. 5	. 24
27 00	6.8026318	10.3	9 17. 6	. 23
27 30	. 6627	10.5	9 24. 6	. 23
28 00	. 6942	10.6	9 31. 5	. 22
28 30	. 7260	10.7	9 38. 2	. 22
29 00	. 7581	10.8	9 44. 7	. 21
29 30	. 7905	10.9	9 51. 0	. 20
30 00	. 8232	11.0	9 57. 1	. 20
30 30	. 8562	11.1	10 3. 1	. 19
31 00	. 8895	11.2	10 8. 8	. 19
31 30	. 9232	11.4	10 14. 4	. 18
32 00	. 9573	11.4	10 19. 8	. 17
32 30	. 9916	11.6	10 25. 0	0. 17
33 00	6.8030264		10 30. 1	

$\rho = \frac{a(1-e^2)}{r^3}$ = radio de curvatura del meridiano = $\frac{N(1-e^2)}{r^2}$

$r = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$

$-v$ = angulo en la vertical

TABLA III.

VALORES DE UN GRADO DE MERIDIANO Y DE PARALELO.

LATITUD:	GRADO DE MERIDIANO	DIF. POR 1'	GRADO DE PARALELO.	DIF. POR 1'
14 30				
15° 00′	110637m8	0m17	107538m0	8m47
15 30	642.8	.17	107284.0	8.74
16 00	647.9	.17	107021.9	9.01
16 30	653.1	.18	106751.7	9.28
17 00	658.4	.18	106473.4	9.55
17 30	663.8	.19	106187.0	9.81
18 00	669.4	.19	105892.6	10.08
18 30	675.2	.20	105590.2	10.35
19 00	681.2	.20	105279.7	10.61
19 30	687.3	.21	104961.3	10.88
20 00	693.4	.21	104634.8	11.15
20 30	699.7	.21	104300.4	11.41
21 00	110706.0	.22	103958.2	11.67
21 30	712.5	.22	103608.0	11.93
22 00	719.2	.23	103250.0	12.20
22 30	726.0	.23	102884.1	12.46
23 00	732.9	.23	102510.4	12.72
23 30	739.9	.24	102128.9	12.97
24 00	747.0	.24	101739.7	13.23
24 30	754.3	.25	101342.7	13.49
25 00	761.7	.25	100938.1	13.74
25 30	769.2	.25	100525.8	14.00
26 00	776.8	.26	100105.9	14.26
26 30	784.5	.26	99678.2	14.51
27 00	110792.3	.26	99243.0	14.75
27 30	800.1	.27	98800.4	15.00
28 00	808.1	.27	98350.3	15.26
28 30	816.2	.27	97892.5	15.51
29 00	824.4	.28	97427.3	15.75
29 30	832.7	.28	96954.7	16.00
30 00	841.1	.28	96474.7	16.24
30 30	849.5	.28	95987.4	16.48
31 00	858.0	.29	95492.9	16.73
31 30	866.6	.29	94991.1	16.97
32 00	875.3	.29	94482.0	17.21
32 30	884.1	0m29	93965.7	17.45
33 00	110892.9		93442.1	
33 30	901.8		92911.0	
34 00	110 910.7		92373.3	

Valores de 1" de merid. y paralelo

Latitud	1" de merid.	1" de paral	Latitud	1" de merid.	1" de paral
18°00′	30m7415	29m4146	20°00′	30m7482	
18 30	.7431	.3306	20 30		
19 00	.7448	.2444	21 00		
19 30	.7465	.1559	21 30		

CAPITULO II.

TRIANGULACIONES GEODÉSICAS Y MODO DE CONSIDERAR LOS TRIÁNGULOS TRAZADOS EN LA SUPERFICIE DEL ELIPSOIDE.

24.—En el primer tomo de esta obra, al tratar de las operaciones topográficas en general, vimos que el fundamento en que descansan es que la superficie de una esfera y su plano tangente casi se confunden en una reducida extension; y aun se recordará que el pequeño error que en realidad proviene de esta suposicion nos sirvió de base para fijar el límite de aquellas operaciones cuando se practicasen aisladamente. Pero se dijo al mismo tiempo que podrian hacerse extensivas á una porcion cualquiera de la superficie del globo, sujetándolas á terminar de trecho en trecho en ciertos puntos muy bien determinados, lo cual equivale á suponer la superficie de la tierra compuesta de elementos planos muy pequeños, lo mismo que se consideran las líneas curvas formadas de partes elementales rectilíneas. Vamos ahora á ocuparnos de la manera de fijar por medio de las triangulaciones geodésicas la posicion de aquellos puntos fundamentales que sirven de término y de rectificacion á las operaciones topográficas.

Las triangulaciones geodésicas no tienen solamente el objeto que acabo de indicar, sino que se aplican tambien á la medida de grandes arcos del elipsoide, los cuales sirven para calcular en seguida sus ejes, y por consiguiente todo lo que se refiere á su figura y dimensiones. Los planos de vastas porciones de la tierra, como los continentes y los Estados se forman principalmente por medio de grandes triangulaciones que determinan la posicion de las ciudades y de las poblaciones mas importantes, de las cadenas de montañas,

Un grado de meridiano — Un grado de paralelo

á 34°00'	110 910.7	92373.8
34 30	110 919.7	91829.0
35 00	110 929.2	91277.3

de los rios, de las costas, de las líneas limítrofes, &c., pues por lo comun las escalas en que se construyen estas *cartas geográficas* son tan pequeñas, que no pueden aparecer en ellas caractéres topográficos mas pormenorizados.

Aunque el espíritu de las triangulaciones geodésicas y su objeto final sean en rigor los mismos que los de las topográficas, fácilmente se comprende que deben existir entre ellas notables diferencias. Efectivamente, en la Topografía se proyectan ortogonalmente los puntos del terreno sobre el plano tangente á la superficie de la tierra; miéntras que en la Geodesia la proyeccion se verifica por medio de líneas convergentes hácia el centro del globo, que son las verticales de los puntos. Las cadenas topográficas constan de triángulos rectilíneos que se resuelven pór medio de la trigonometría plana; y las geodésicas, por el contrario, se componen de triángulos que podemos llamar *esferoídicos*, trazados en la superficie curva de un elipsoide, el cual, como se ha dicho, se supone formado por la prolongacion ideal de los mares. Hay todavía otra diferencia esencial: la posicion de un punto situado en una superficie plana se determina por medio de sus distancias á dos líneas fijas; miéntras que estando situado sobre una superficie curva hay necesidad de adoptar un sistema de coordenadas angulares ó esféricas, tales como la *longitud* y la *latitud* geográficas, referidas á dos planos coordenados que en este caso son el ecuador y un meridiano.

25.—Recordemos ahora brevemente las definiciones de longitud y latitud. En el Capítulo I se ha dicho ya que la latitud de un punto es su distancia angular al ecuador contada sobre el meridiano que pasa por el mismo punto. Se comprende desde luego que esta coordenada no basta por sí sola para fijar la posicion de un lugar sobre el elipsoide, puesto que conviene á todos los que se hallen en el mismo paralelo.

Las latitudes se cuentan desde 0° hasta 90° partiendo del ecuador hácia ambos polos; y para distinguir las que se refieren á uno ú otro hemisferio, se les agregan los nombres de *Norte* ó *Sur*, segun que los puntos á que pertenecen se hallen en el hemisferio boreal ó en el austral. Así decimos, por ejemplo, que la catedral de México está á los 19° 26′ 5.″3 de latitud Norte, y la ciudad de Santiago de Chile á 33° 26′ 42.″0 de latitud Sur. Con mas frecuencia se designan las latitudes del hemisferio boreal con el signo +, y las del austral con

el signo —, de modo que se dice que la latitud de México es de + 19° 26′ 5.″3 y la de Santiago — 33° 26′ 42.″0.

El ángulo formado por dos meridianos cualesquiera se llama en general su *diferencia de longitud*, y se mide por el arco del ecuador ó de un paralelo interceptado por sus planos. La longitud y la latitud reunidas fijan perfectamente la situacion de un lugar sobre la superficie de la tierra; porque la última determina la posicion del punto sobre su meridiano, y la primera establece la del meridiano mismo respecto de otro que se toma por orígen de las longitudes.

Como en el supuesto de ser la tierra un sólido de revolucion son iguales todos los meridianos, no hay razon alguna que haga adoptar á uno de ellos de preferencia á cualquiera otro para establecer el *cero* ú orígen de las longitudes; así es que cada nacion elige por lo comun el que pasa por su capital ó por su principal Observatorio astronómico. Cuando decimos que México está á 99° 7′ 9″ de longitud al Oeste de Greenwich, se entiende que el meridiano de México forma ese ángulo con el que pasa por aquel Observatorio. El de Paris está á 2° 20′ 9.″4 al Este del de Greenwich; y por consiguiente la longitud de México referida al meridiano de Paris como orígen, es de 101° 27′ 18.″2 al Oeste.

Las longitudes se cuentan desde 0° hasta 180° tanto al Este como al Oeste, por lo que es preciso indicar la direccion del punto fijado respecto del meridiano que sirve de orígen. Tambien se acostumbra, y es preferible por la brevedad, á señalar las longitudes occidentales con el signo +, y con el signo — las orientales. Así dirémos que la longitud de México respecto de Greenwich es + 99° 7′ 9″, y la de Paris contada desde el mismo meridiano, es — 2° 20′ 9.″4. Esta anotacion tiene tambien la ventaja de facilitar la combinacion de las longitudes para cambiar de orígen, ó para referir al mismo las que se cuentan respecto de distintos meridianos, lo cual se consigue por una suma ó una resta atendiendo á las reglas de los signos. Por ejemplo, si determinamos la longitud de un punto respecto de México, y encontramos que es de — 1° 57′ 10″2, su posicion referida á Greenwich será $L_0 = L_1 + L_2$, ó bien:

$$L_0 = + 99° 7′ 9.″0 — 1° 57′ 10.″2 = + 97° 9′ 58.″8$$

Si se quisiera referir la posicion del meridiano de México al del

Observatorio de Cambridge (Estados-Unidos), cuya longitud contada desde Greenwich es $+71°\ 7'\ 39.''9$, se tendriá $L_0 = L_1 - L_2$, ó lo que es lo mismo:

$$L_0 = +99°\ 7'\ 9.''0 - 71°\ 7'\ 39.''9 = +27°\ 59'\ 29.''1$$

Se comprenderá por estas definiciones que la cantidad que designé por L en la fórmula (33) del Capítulo I relativa á la superficie de un cuadrilátero terrestre, no es otra cosa mas que la diferencia de longitud de los meridianos que lo terminan.

Las longitudes geográficas no siempre se expresan en medidas angulares como lo he hecho hasta aquí, sino en unidades de tiempo. Expliquemos brevemente la causa y la ventaja de este modo de contarlas. En virtud del movimiento de rotacion del globo terrestre al derredor de su eje, cualquiera de sus puntos emplea 24 horas en describir un círculo paralelo al ecuador ó perpendicular al eje polar; y como este movimiento es uniforme, resulta que la velocidad angular será de 15° por hora. Por otra parte, la diferencia de meridianos ó de longitudes de dos lugares es el ángulo que forman sus respectivos meridianos; y en consecuencia puede expresarse por el tiempo que emplea la tierra en describirlo con la velocidad uniforme que acaba de indicarse. De esa manera la diferencia de longitudes representa directamente la diferencia de horas que se cuentan en los dos meridianos en un mismo instante físico; y bajo este aspecto facilita notablemente ciertos cálculos astronómicos, como se verá en otro lugar.

La reduccion de unidades angulares á unidades de tiempo y viceversa se hace con la mayor facilidad, pues designando por a un arco cualquiera expresado en medidas angulares, y por t expresado en unidades de tiempo, se tiene la ecuacion: $a = 15\,t$. Pero como el coeficiente 15 puede ponerse bajo la forma $\frac{60}{4}$, tendrémos $a = \frac{60}{4}\,t$, lo cual indica que para convertir tiempo en arco debe multiplicarse el primero por 60 y tomar la cuarta parte del producto. La multiplicacion por 60 equivale á convertir los segundos en minutos y estos en grados, de modo que la operacion queda reducida *á tomar la cuarta parte de la cantidad dada despues de haber convertido los minutos en grados, los segundos en minutos y las fracciones de segundo de tiempo en segundos de arco.*

Si por el contrario se da un arco para reducirlo á tiempo, *se mul-*

tiplicará por cuatro despues de haber convertido los grados en minutos, los minutos en segundos y los segundos en fraccion decimal.

Expresemos, por ejemplo, en tiempo la longitud 99° 7′ 9.″0 de México respecto de Greenwich. Convirtiendo los 99° en minutos de tiempo, &c., se tendrá:

$$\text{Longitud en tiempo} = \begin{array}{r} 1^h\,39^m\ 7.^s15 \\ 4 \\ \hline 6^h\,36^m\ 28.^s60 \end{array}$$

De igual manera hallaríamos que la longitud — 2° 20′ 9.″4 de Paris contada desde Greenwich es — $9^m\ 20.^s63$ expresada en tiempo. La de México respecto de Cambridge será + $1^h\,51^m\ 57.^s94$.

De lo que ántes se ha expuesto inferimos que, por ejemplo, cuando se cuenta en México exactamente la hora del medio dia, se contará en Cambridge la $1^h\ 51^m\ 57.^s94$, en Greenwich las $6^h\ 36^m\ 28.^s60$, en Paris las $6^h\ 45^m\ 49.^s23$, &c.

En los cálculos geodésicos casi siempre se expresan en arco las longitudes; pero como generalmente en los astronómicos se expresan en tiempo, he creido útil anticipar estas nociones, ya que ha sido preciso ocuparnos de las coordenadas que fijan geográficamente la posicion de un lugar cualquiera del globo.

26.—Supongamos ahora proyectada una triangulacion sobre la superficie del elipsoide por medio de las verticales de cada uno de sus vértices, y consideremos los triángulos que se originan de esta proyeccion. Los lados de los triángulos serán lo que hemos llamado *líneas geodésicas* (núm. 18), que son las distancias mas cortas entre cada dos puntos reducidas al nivel del mar.

Sean PQ y PR (fig. 4ª) los meridianos de dos puntos trigonométricos, cuyas proyecciones son Q y R; y QR el arco ó línea geodésica que los une. Si por la vertical Qm del punto Q y por la segunda estacion R se hace pasar un plano, este plano será vertical respecto del horizonte de Q; pero no lo será respecto del de R, como sucederia si la tierra fuese esférica. En efecto, para que el plano fuera vertical en R era preciso que contuviese la normal Rn de este punto; y por consiguiente esta última prolongada deberia encontrar á la de Q. La normal de Q está en el plano del meridiano PQ, la de R en el meridiano PR y ambos cortan al eje de la tierra en distintos puntos m y n; luego estas líneas no se encuentran, y por tanto no pueden determinar un plano, con excepcion únicamente del caso en que Q y

R estuviesen sobre un mismo paralelo ó sobre un mismo meridiano.

Las verticales de los demas puntos de la línea geodésica encontrarán al eje entre m y n, formando en su conjunto una superficie curva cuya interseccion con la del elipsoide no podrá ser una curva plana como $Q\,R$, sino una línea de doble curvatura. De aquí podemos deducir que toda seccion del elipsoide sujeta á la condicion de contener las verticales de todos los puntos por donde pase, es en general una curva de doble curvatura. Debe exceptuarse, sin embargo, el caso en que la seccion coincida con el meridiano, segun se ha visto.

Una línea geodésica se supone originada por una superficie normal á la tierra en todos sus puntos; luego en rigor esta línea no puede considerarse como una curva plana. Investiguemos el error que resultaria de admitir que la seccion $Q\,m\,R$ es normal á la superficie del elipsoide en todos puntos, ó lo que es lo mismo, de suponer que la línea geodésica es una curva plana. Para conseguirlo nada me parece mas propio que calcular el pequeño ángulo que forma con esta seccion la normal $R\,n$ del punto R. Haciendo pasar por $R\,n$ un plano $A\,R\,D$ perpendicular á la seccion $Q\,m\,R$, el ángulo $n\,R\,A$ será el que se busca; y considerando al punto R como el centro de una esfera cuyo radio sea la unidad, sus intersecciones con el meridiano de R, con la seccion $Q\,m\,R$ y con el plano que le es perpendicular, originará un triángulo rectángulo en A, cuyo lado $A\,D = x$ mide el ángulo que se desea calcular.

Haciendo $B\,D = p$, se tiene:

$$\text{sen. } x = \text{sen. } p \text{ sen. } A\,B\,D$$

Para determinar el arco p el triángulo plano $m\,R\,n$ da:

$$\text{sen. } p = \frac{m\,n}{R\,m} \text{ sen. } R\,n\,m$$

Basta la consideracion de que la tierra difiere poco de la forma esférica para comprender que los ángulos p y x deben ser muy pequeños, y que esta circunstancia nos permite hacer importantes simplificaciones en las ecuaciones anteriores sin alterar sensiblemente la exactitud del resultado. Desde luego se ve que siendo C el centro del globo, $m\,n$ es igual á $C\,n - C\,m$, líneas cuya expresion se ha expuesto en la pág. 14. Ademas, como las mayores líneas geodésicas son muy pequeñas respecto de la magnitud del elipsoide terrestre, las

normales de Q y R difieren poco entre sí, y mucho ménos debe diferir la línea $R\,m$ de la normal del punto Q, la cual designaré por N. El ángulo $R\,n\,m$ es complemento de la latitud del punto R, y por tanto sustituyendo en el valor de x, lo trasformarémos en este otro:

$$\text{sen. } x = \frac{Cn - Cm}{N} \cos.\ \phi' \text{ sen. } u$$

en el que designo por ϕ' la latitud de R y por u el ángulo que forma la seccion $Q\,m\,R$ con el meridiano de R. Llamando ϕ la latitud del punto Q, é introduciendo los valores de Cn y Cm, resulta:

$$\text{sen. } x = \left(\frac{a\,e^2 \text{ sen. } \phi'}{r'} - \frac{a\,e^2 \text{ sen. } \phi}{r}\right) \frac{\cos.\ \phi' \text{ sen } u}{N}$$

Puesto que x debe ser muy pequeño, podemos suponer $r = r'$ y tomar ϕ por ϕ' en la primera parte de la ecuacion, con lo cual introduciendo el valor de N, se obtiene:

$$\text{sen. } x = e^2 (\text{sen. } \phi' \cos.\ \phi - \text{sen. } \phi \cos.\ \phi') \text{ sen. } u = e^2 \text{ sen. } (\phi' - \phi) \text{ sen. } u$$

Como siempre es muy pequeña la diferencia de latitudes de los extremos de una línea geodésica, no hay inconveniente en tomar los arcos por sus senos, y así resultará finalmente:

$$x = e^2 (\phi' - \phi) \text{ sen. } u$$

La forma de esta expresion comprueba lo que habiamos anticipado, á saber, que x es extremadamente pequeño aun para los mayores valores que pueda adquirir en la práctica el factor $\phi' - \phi$. El ángulo u, que puede tomarse por el azimut de la seccion, entra tambien en el valor de x; pero nótese que para una misma distancia $Q\,R$ al paso que crece $\phi' - \phi$ disminuye u, y por el contrario, cuando este ángulo aumenta, disminuye la diferencia de latitud. En efecto, el mayor valor de $\phi' - \phi$ corresponde al caso en que Q y R estén en el mismo meridiano, y entónces $u = 0$. El mayor valor de sen. u corresponde al caso en que la seccion es perpendicular al meridiano, y entónces $\phi' - \phi$ es muy pequeño aun para un valor considerable de la distancia $Q\,R$. Así, pues, para aplicar la fórmula adoptaré el caso en que ambos factores contribuyen á aumentar el valor de x, suponiendo $u = 45°$. En esta circunstancia, y atendiendo á las dimensiones de

la tierra, se halla que siendo la distancia $Q\,R$ de 100000 metros, la diferencia de latitud de sus extremos es de 38′ próximamente, de lo que resultará:

e^2	7.82441	
2280″	3.35793	
sen. 45°	9.84948	
x	1.03182	$x = 10.''8$

Se ve por este resultado la pequeñez del ángulo formado por la normal y la seccion á pesar de haberse supuesto de 100 kilómetros la línea geodésica, lo que equivale á cerca de 24 leguas mexicanas. En los casos ordinarios de la práctica están léjos los lados trigonométricos de llegar á esas dimensiones, pues lo mas comun es que estén comprendidos entre 20000 y 50000 metros, y entónces los valores de x variarán desde 2″ hasta 5″, ó sea casi 1″ por cada miriámetro, sin olvidar que esto se verifica en el caso desventajoso que corresponde á $u = 45°$.

Las consecuencias inmediatas de todo lo expuesto son: que no resulta error alguno perceptible de suponer curvas planas las mayores líneas geodésicas; que las secciones de que provienen deben considerarse normales en todos sus puntos á la superficie del elipsoide; y por consiguiente, que los lados de una triangulacion geodésica pueden tratarse como pequeños arcos de círculo máximo trazados sobre la superficie de una esfera. De aquí se deduce tambien que los ángulos de un triángulo geodésico, que no son otra cosa mas que los de los planos verticales que por su interseccion con la superficie del elipsoide terrestre determinan los lados trigonométricos, no difieren sensiblemente de los de un triángulo esférico.

27.—Hemos llegado en último resultado á la conclusion de que un triángulo geodésico puede considerarse como trazado sobre una esfera, conclusion á la que podria tambien habernos conducido la simple consideracion de que siendo los mayores triángulos de una cadena extremadamente pequeños respecto de las dimensiones del globo, no deberia resultar error de importancia al suponer la superficie terrestre compuesta de cascos esféricos, ó lo que es lo mismo, de admitir que cada elemento de la superficie esferoidal se confunde con el correspondiente al de la esfera osculatriz.

Aceptadas estas consecuencias, queda todavía una dificultad, cual

es la de asignar el radio de la esfera que coincida sensiblemente con el elipsoide en una pequeña extension, tal como la superficie de un triángulo geodésico.

Hemos visto que todas las secciones verticales que pueden imaginarse al derredor de un punto tienen radios de curvatura que dependen del azimut de cada seccion; pero que están comprendidos entre los límites ρ y N. La primera idea que se presenta naturalmente á la imaginacion es la de investigar si alguno de estos límites puede tomarse por radio de la esfera osculatriz, pues se recordará que el primero mide la curvatura del meridiano y el segundo la del primer vertical, y que por tanto, los círculos descritos con esos radios se confunden sensiblemente en un espacio de uno ó dos grados con la curva á que pertenecen. La forma de sus expresiones indica á primera vista que para una misma variacion de latitud, ρ debe variar mas que N; pero para hacerlo mas perceptible, si se diferencian los valores de N y ρ con relacion á la latitud, se tendrá:

$$\mathrm{d}\,N = \frac{\frac{1}{2}\,a\,e^2\,\mathrm{sen.}\,2\phi}{r^3}\,\mathrm{d}\,\phi$$

$$\mathrm{d}\,\rho = \frac{\frac{3}{2}\,a\,e^2\,(1-e^2)\,\mathrm{sen.}\,2\phi}{r^5}\,\mathrm{d}\,\phi$$

y si se suprimen los denominadores, que siempre difieren poco de la unidad, y se desecha la cuarta potencia de e, se halla:

$$\mathrm{d}\,N = \tfrac{1}{2}\,a\,e^2\,\mathrm{sen.}\,2\phi\,\mathrm{d}\,\phi$$

$$\mathrm{d}\,\rho = \tfrac{3}{2}\,a\,e^2\,\mathrm{sen.}\,2\phi\,\mathrm{d}\,\phi$$

de donde se deduce que $\mathrm{d}\,\rho = 3\,\mathrm{d}\,N$. Por consiguiente la esfera descrita con N, que se confundiria en un largo espacio con una zona elemental del elipsoide en la direccion de Oriente á Poniente, daria de Norte á Sur una curvatura mucho ménos pronunciada que la que corresponde al meridiano; y por el contrario, la esfera descrita con ρ por radio, daria una curvatura demasiado fuerte al primer vertical.

En vista de esto, lo que parece mas razonable es buscar cuál es la seccion cuya curvatura sea un término medio entre las del meridiano y del primer vertical. Sea M la primera y V la segunda: de-

signando por S la de la seccion que se busca, establecerémos la condicion:

$$S = \tfrac{1}{2}(M + V)$$

de la que resulta esta otra:

$$M - S = S - V$$

Teniendo presente que las curvaturas de dos líneas son inversamente proporcionales á los radios que las miden, hallarémos:

$$M\rho = S R_u$$
$$VN = S R_u$$

La ecuacion (26) del Capítulo I expresa el valor de R_u en funcion de N; para obtenerlo en funcion de ρ tendrémos:

$$N = \rho (1 - e^2 \text{ sen.}^2 \phi)(1 - e^2)^{-1} = \rho (1 + e^2 \cos.^2 \phi)$$

valor que sustituido en la fórmula (26) produce:

$$R_u = \rho (1 + e^2 \cos.^2 \phi)(1 - e^2 \cos.^2 \phi \cos.^2 u) = \rho (1 + e^2 \cos.^2 \phi \text{ sen.}^2 u)$$

Introduciendo esta expresion en la primera de las relaciones anteriores, y la (26) en la segunda, resultará:

$$\frac{M}{S} = 1 + e^2 \cos.^2 \phi \text{ sen.}^2 u$$

$$\frac{V}{S} = 1 - e^2 \cos.^2 \phi \cos.^2 u$$

de las que se obtiene:

$$M - S = S e^2 \cos.^2 \phi \text{ sen.}^2 u$$
$$S - V = S e^2 \cos.^2 \phi \cos.^2 u$$

Igualando estos valores para cumplir la condicion establecida, hallarémos:

$$\text{sen.}^2 u = \cos.^2 u, \text{ ó bien: } \tan.^2 u = 1$$

ecuaciones que quedan satisfechas para $u = 45°$. Tambien las satisfacen los azimutes de $90° + 45°$, de $180° + 45°$ y de $360° - 45°$;

pero como de estos últimos el primero y el tercero corresponden á la misma seccion, así como el segundo á la seccion de 45° de azimut, y todas ellas están igualmente inclinadas respecto del plano del meridiano contando los azimutes por cuadrantes, deducirémos que *la seccion cuya curvatura es media entre las del meridiano y del primer vertical, es la que tiene 45° de azimut.* (*)

Representando por R' el radio de curvatura de esta que podria llamarse *seccion media*, tendrémos las siguientes expresiones que crecen lentamente con la latitud:

$$R' = N\,(1 - \tfrac{1}{2}\,e^2 \cos.^2 \phi)$$
$$R' = \rho\,(1 + \tfrac{1}{2}\,e^2 \cos.^2 \phi)$$

y que por lo demostrado, producirán una esfera que considerarémos como osculatriz, puesto que es la que mejor conviene al conjunto de curvaturas que presenta el elipsoide al derredor de un punto cuya

(*) Si suponiendo $u = 45°$, se multiplican uno por otro los valores de $\frac{M}{S}$ y $\frac{V}{S}$, desechando la cuarta potencia de e, resulta:

$$S = \sqrt{M\,V}$$

lo cual indica que la curvatura de la seccion cuyo azimut es de 45° puede tomarse igual al medio geométrico entre las correspondientes al meridiano y al primer vertical. A primera vista parece que este resultado no puede conciliarse con el que ántes se ha obtenido; pero es fácil demostrar que los términos medios aritmético y geométrico entre dos cantidades, se confunden sensiblemente siempre que la diferencia de las cantidades es pequeña respecto de sus magnitudes.

Sean, en efecto, a y $a + x$ las dos magnitudes. Su medio aritmético será:

$$A = a + \tfrac{1}{2}\,x$$

y su medio geométrico:

$$G = (a^2 + a\,x)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{x}{2\,a} - \frac{x^2}{8\,a^2} + \frac{x^3}{16\,a^3} - \ldots\right)$$

ó bien: $$G = A - \frac{x^2}{8\,a} + \frac{x^3}{16\,a^2} - \ldots\ldots$$

Se ve por esta relacion que los valores de A y G se aproximan tanto mas á la igualdad, cuanto mas pequeño sea x respecto de a, y llegarian á ser rigurosamente iguales si $x = 0$. Segun esto, en casos análogos, puede adoptarse en la práctica indiferentemente el medio aritmético ó el geométrico segun la naturaleza de los cálculos, siendo el geométrico mas cómodo para el uso de los logaritmos. Por esta razon se adoptó en el teorema demostrado en la pág. 15, referente al radio medio de la tierra.

latitud sea ϕ. Con ayuda de las Tablas que contienen los logaritmos de N y de ρ, se hallará fácilmente el de R', por las fórmulas.

$$\log. R' = \log. N - (7.16116) \cos.^2 \phi \quad *$$
$$\log. R' = \log. \rho + (7.16116) \cos.^2 \phi$$

28.—Casi todos los autores de Geodesia consideran suficientemente exacto el tomar la normal mayor por radio de la esfera osculatriz. Sin negar que este procedimiento basta en la mayor parte de los casos, creo que el método expuesto es ménos arbitrario, y de resultados mas estrictos en aquellos casos excepcionales en que los triángulos adquieran dimensiones considerables. Por otra parte, cuando la resolucion de un problema recae sobre una línea cuyo radio de curvatura difiera notablemente del de la esfera osculatriz que se haya supuesto, y se tema que esta diferencia dé lugar á algun error de importancia, puede corregirse el primer resultado de la manera que voy á indicar.

Sea s la extension lineal de una línea geodésica que se ha hallado que abraza una amplitud de g' grados en una esfera de radio R'. La relacion entre estas cantidades existe en la ecuacion:

$$s = \frac{\pi}{180^\circ} R' g'$$

Pero si se reconoce que el arco cuya extension es s forma parte de una seccion cuyo radio de curvatura es λ, la amplitud g que realmente le corresponde se tendrá por la fórmula:

$$\cancel{s = \frac{180^\circ}{\pi} \lambda g} \qquad s = \frac{\pi}{180^\circ} \lambda g$$

De donde igualando los dos valores de s resulta:

$$g = g' \frac{R'}{\lambda}$$

de suerte que basta multiplicar la amplitud hallada en la esfera supuesta por la relacion que existe entre su radio y el de curvatura de la seccion á que pertenece la línea, para hallar su verdadera amplitud.

Para la latitud media de la Republica

	7.16116	log. N....	6.80487
cos 23°30'....	+ 9.962398		− 0.00122
	+ 9.962398	R' 23°30'....	6.80365
0.00122 ...	7.08596....		

á la lat. $\varphi = 15^\circ$... $\log R' = 6.80339$

á la lat. $\varphi = 32^\circ$.. $\log R' = 6.80401$

Si por el contrario, la amplitud es constante y se desea conocer el valor lineal s, sabiendo que es s' en la esfera osculatriz, se tendrá:

$$s = s' \frac{\lambda}{R'}$$

que permite, como ántes, corregir el primer resultado cuando se juzgue necesario.

Creo poder anticipar que solo en casos especiales será preciso hacer esta correccion, como cuando se trata de arcos pertenecientes al meridiano ó al primer vertical cuyas curvaturas forman los extremos mayor y menor entre los cuales están comprendidas las de las demas secciones. En la mayoría de los casos basta emplear el radio de la esfera osculatriz, y aun en muchos, usar un valor constante del radio terrestre, tal como el que convenga á la latitud media del país en que se trabaja.

29.—Reducido así el problema de las triangulaciones geodésicas á las aplicaciones comunes de la trigonometría esférica, enumeremos brevemente las diversas operaciones que constituyen una triangulacion. Lo mismo que se hizo en la Topografía, las clasificarémos en el órden siguiente:

I.—La medida de una ó mas bases, cuya longitud sea proporcionada á los lados de los primeros triángulos, y que segun las circunstancias, varia desde 5000 hasta 15000 ó mas metros.

II.—La eleccion de los vértices trigonométricos, considerándolos bajo el doble punto de vista de ser notables por su posicion y de prestarse á que los triángulos de la cadena tengan una forma conveniente.

III.—La medida de los ángulos y la orientacion de uno ó mas lados.

IV.—La resolucion de los triángulos y los cálculos relativos á las coordenadas geográficas de sus vértices.

V.—La formacion de la *carta*, ó sea de la *proyeccion*, que es una construccion geométrica convencional para representar sobre la superficie plana del papel otra superficie no desarrollable, como es la del elipsoide terrestre.

A las diferencias establecidas en este Capítulo entre las triangulaciones topográficas y las geodésicas, es preciso agregar otras de la mayor importancia. En primer lugar, la orientacion de una ca-

dena geodésica debe hacerse por procedimientos astronómicos, únicos que pueden suministrar toda la exactitud que se necesita. En segundo lugar, el cálculo de las coordenadas geográficas de los vértices demanda la determinacion directa de las de uno de ellos por lo ménos, tambien por métodos astronómicos de la mayor precision. Por esta razon he consagrado la parte tercera de este libro á la exposicion de los métodos mas usuales que sirven para medir directamente el azimut de una línea, y para determinar la latitud y la longitud geográficas de un punto. Estas operaciones constituyen la aplicacion indispensable de la Astronomía práctica á la Geodesia.

CAPITULO III.

MEDIDA DE LAS BASES.

30.—La medida de las bases geodésicas es la operacion mas importante y quizá la mas difícil de una triangulacion. Nada hay que añadir á lo que se dijo en la Topografía respecto de la eleccion del terreno, si no es que siendo las bases geodésicas mas grandes que las topográficas, necesitan mayor esmero en la eleccion de las localidades y en el trazo ó demarcacion de las líneas. Por lo comun se hace este con un buen teodolito perfectamente nivelado, estableciendo jalones á intervalos de 50^m, exactamente en la direccion que marca el hilo de la retícula, el cual se ha hecho coincidir primero con la señal que indica el término de la línea.

Los instrumentos que se usan para la medida consisten en reglas de madera ó de metal, cuya longitud varia generalmenté de 3^m á 5^m, montadas en caballetes ó tripiés con todos los mecanismos necesarios para comunicarles pequeños movimientos en el sentido vertical y en el horizontal, á fin de colocarlas á nivel y exactamente en el plano vertical que pasa por los extremos de la base. La longitud total de las reglas se llama *estacion*.

Antes de describir algunos de estos aparatos indiquemos el método que se sigue para determinar con toda precision el tamaño de las reglas. Se sabe que todos los cuerpos experimentan variaciones en sus dimensiones, debidas á los cambios de temperatura á que están sujetos, y esta propiedad general de la materia es la que se llama *dilatabilidad*. Sus efectos son tan constantes, que se han utilizado para construir instrumentos, llamados *termómetros*, que sirven para medir las temperaturas. Un termómetro comun consiste en un tubo de vidrio cilíndrico, hueco y muy delgado, lleno en parte de un líquido como mercurio ó espíritu de vino, y con una escala al lado que señala el lugar en que se detiene la columna líquida en cualquiera temperatura. Para graduar la escala de los termómetros se han tomado por término de comparacion dos temperaturas fijas: la inferior es la que tiene una masa de hielo cuando se deshace ó se funde, y la superior la que conserva el agua pura al pasar al estado de vapor bajo la influencia del calórico. La primera es constante en cualquiera lugar de la tierra; pero la segunda depende mucho de la presion que experimenta el líquido en el momento de la ebullicion, ya sea que aquella provenga del peso de la atmósfera, ya del de cualquiera otro gas que lo oprima. Por esta causa se ha adoptado por temperatura normal de la ebullicion la que adquiere el agua pura hirviendo libremente al nivel del mar, donde se supone constante la presion atmosférica.

Si un termómetro construido como se ha dicho, perfectamente cerrado y libre de aire en su interior, se pone en contacto con trozos de hielo al fundirse, presentará el fenómeno de que va disminuyendo la altura de la columna líquida hasta que se detiene en un punto en el cual permanece por todo el tiempo que tarda el hielo en liquidarse. Entónces se hace una señal en el tubo para marcar el lugar que ocupa el extremo de la columna á esta temperatura fija. En seguida se pone en una vasija de agua caliente, y se ve que la columna sube gradualmente, y se detiene cuando el agua comienza á hervir, permaneciendo en el mismo punto miéntras dura la ebullicion. Si esta última operacion se ha hecho al nivel del mar, podrá marcarse el segundo término de la escala termométrica, y dividirse en partes iguales el espacio comprendido entre ellos, á fin de apreciar con el instrumento así graduado, las temperaturas intermedias.

En la escala del termómetro centesimal ó centígrado se divide ese

espacio en 100 partes iguales, representando cada una de ellas un grado de temperatura, y colocándose el *cero* de la escala en el punto de fusion del hilo. En el termómetro de Réaumur el cero está tambien en el punto de fusion; pero difiere del centígrado en que tiene marcados 80° en la temperatura de la ebullicion. El termómetro de Farenheit señala 32° en el punto de fusion y 212° en el de ebullicion. Las dos primeras escalas, especialmente la centesimal, se usan en Francia: los ingleses emplean casi siempre la de Farenheit.

En todo lo que haya necesidad de exponer respecto de temperaturas adoptaré la escala centesimal; pero como es frecuente tener que valerse de termómetros de otra construccion, trazaré el modo de convertir los grados de cada uno en los de los demas. Llamando c, f y r respectivamente las graduaciones centesimal, de Farenheit y de Réaumur, puesto que el cero de la primera y la última corresponden á la misma temperatura, se tienen $100 : 80 :: c : r$, de donde resulta: $r = 0.8\ c$ y tambien $c = \frac{5}{4}\ r$. El de Farenheit señala 32 en el punto de fusion, y así tendrémos: $212 - 32 : 100 :: f - 32 : c$, y de aquí se obtiene:

$$f = \tfrac{9}{5}\ c + 32°$$
$$c = \tfrac{5}{9} f - 17.°78$$

Del mismo modo se hallará:

$$r = \tfrac{4}{9} f - 14.°22$$
$$f = \tfrac{9}{4} r + 32$$

fórmulas que permiten hacer fácilmente la reduccion de las indicaciones de una escala á las de cualquiera otra.

31.—Puesto que el fenómeno de la dilatabilidad altera las dimensiones de los cuerpos, es preciso llevarlo en cuenta al comparar con la unidad fundamental el aparato que sirve para medir las bases geodésicas. Se llama *coeficiente de dilatacion* de una sustancia cualquiera la cantidad que aumenta su unidad de longitud por un incremento de un grado centesimal de temperatura. Segun esto, una regla que tenga l_0 unidades de longitud á la temperatura de cero, aumentará $c\ l_0$ por un grado, y en general $c\ t\ l_0$ por t grados de temperatura, siendo c su coeficiente de dilatacion, de modo que su longitud á t grados será:

$$l_t = l_0 + c\ t\ l_0 = l_0\ (1 + c\ t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Si se mide, pues, una barra de cualquiera material á la temperatura del hielo, y despues á la temperatura t, la fórmula anterior dará su coeficiente, á saber:

$$c = \frac{l_t - l_0}{t\, l_0} \quad \ldots\ldots (2)$$

Para los cuerpos sólidos siempre es c extremadamente pequeño, de suerte que no es indispensable que una de las medidas de la barra se haga á 0°; porque si se hacen dos medidas á las temperaturas t_1 y t_2 se tiene:

$$l_1 = l_0 (1 + c t_1)$$
$$l_2 = l_0 (1 + c t_2)$$

de donde eliminando á l_0 resulta:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + c t_1}{1 + c t_2} = (1 + c t_1)(1 - c t_2) = 1 + c(t_1 - t_2)$$

y despejando se encuentra:

$$c = \frac{l_1 - l_2}{l_2 (t_1 - t_2)} \quad \ldots\ldots (3)$$

La Tabla que sigue presenta los valores del coeficiente de dilatacion c hallados experimentalmente para diversas sustancias.

MATERIAS.	COEF. DE DILAT.
Oro	0.00001466
Platina	0.00000884
Plata	0.00001910
Cobre	0.00001718
Laton	0.00001878
Bronce	0.00001817
Hierro forjado	0.00001220
Hierro fundido	0.00001125
Acero no templado	0.00001079
Acero templado	0.00001239
Plomo	0.00002857
Zinc	0.00002942
Estaño	0.00002173
Vidrio	0.00000861
Mercurio	0.00018018
Agua pura	0.000466
Agua salada	0.000500
Aire y gases	0.00367
Laton, barra	0.0000155104 .. Bailey
Laton, regla	0.0000155629 .. Roy
" — "	0.0000154866 .. Froughton
" — hilo	0.0000158962 .. Smiton
Hierro-barra	0.0000104462 .. Smeaton
Acero-regla	0.0000094122 .. Roy

32.—Los modelos ó patrones de medidas que conservan los gobiernos son por lo regular de metal, y tienen marcada la temperatura á la cual representan la unidad legal de longitud. El metro-tipo de Francia es de platina, y el de México, comparado con aquel, es de laton. Ambos representan el metro legal á 0° de temperatura, y á cualquiera otra deberán calcularse sus longitudes por la fórmula (1), haciendo en ella $l_0 = 1$ y tomando por c el valor que corresponde al metal de que están construidos.

Supongamos que la unidad-modelo con que se cuente para determinar la verdadera longitud de una regla geodésica, no represente el metro á 0°, sino que haya sido construida igual al metro de Francia cuando ambos tenian la temperatura θ. Llamando F el metro frances que es de platina, y M el que va á usarse, se tiene:

$$F_\theta = M_\theta$$

Pero designando por p el coeficiente de dilatacion de la platina, y por c el del material del metro M, se tiene tambien:

$$F_\theta = 1^m + p\,\theta$$
$$M_\theta = M_0\,(1 + c\,\theta)$$

luego igualando, hallarémos:

$$M_0 = \frac{1 + p\,\theta}{1 + c\,\theta} = 1^m - (c - p)\,\theta \quad \ldots\ldots (4)$$

fórmula por cuyo medio se determina la longitud del modelo M á 0° de temperatura.

La temperatura x á la cual M es exactamente igual á 1^m, se obtendrá por la ecuacion:

$$1^m = M_x = M_0\,(1 + c\,x)$$

Sustituyendo el valor de M_0 y despejando, resulta $x = \frac{(c-p)\,\theta}{c - c\,(c-p)\,\theta}$; pero como el segundo término del denominador es de segundo órden, tendrémos desechándolo:

$$x = \frac{(c-p)\,\theta}{c} \quad \ldots\ldots (5)$$

La temperatura θ de la comparacion debe estar grabada en el metro. Su longitud á cualquiera otra temperatura t, será:

$$M_t = M_0 (1 + c\,t) = 1^m + p\,\theta + c\,(t - \theta) \quad \ldots\ldots (6)$$

ó bien en funcion de x:

$$M_t = M_x \left(1 + c\,(t - x)\right) = 1^m + c\,(t - x) \quad \ldots\ldots (7)$$

Supongamos que se tenga un metro de laton cortado igual al de Francia á la temperatura de 8°. La temperatura á la cual representa realmente el metro legal, es:

$$x = \frac{(0.0000188 - 0.0000088)\,8}{0.0000188} = 4.°3$$

Su longitud á 0° será:

$$M_0 = 1^m - 0.0000188 \times 4.3 = 0^m.99991916$$

y la que tenga á cualquiera otra temperatura t:

$$M_i = 1^m + 0.0000188\,(t - 4.°3)$$

33.—Comprendidas estas generalidades, supongamos que se va á determinar la longitud de una regla geodésica para medir una base. Llamemos R_0 su tamaño á 0° y m el coeficiente de dilatacion del material de que está construida. A una temperatura cualquiera t á la cual se hace la comparacion con el metro-modelo, tendrá la regla la longitud:

$$R_t = R_0\,(1 + m\,t) \quad \ldots\ldots (8)$$

Siendo c el coeficiente de dilatacion que conviene al metal de la unidad-modelo, y n el número de veces que esta cupo en la longitud de la regla, se tendrá:

$$R_t = n\,(1 + c\,t) \quad \ldots\ldots (9)$$

Igualando ambos valores, resulta:

$$R_0 = n\left(1 + (c - m)\,t\right) \quad \ldots\ldots (10)$$

Conociendo la longitud de la regla á 0°, la ecuacion (8) dará la que tiene á otra temperatura cualquiera. Si la regla y el metro son de una misma sustancia, se tendrá $m = c$, y la última fórmula da $R_0 = n$. En efecto en este caso son iguales los cambios de longitud.

Puede suceder que m no sea conocido, y entónces para determinar su valor á la vez que el de R_0, es insuficiente la ecuacion (10); pero repitiendo la comparacion á otra temperatura t', se tendrá:

$$R_0 = n' \left(1 + (c - m)\, t'\right)$$

y eliminando á R_0 entre esta y la fórmula (10), se halla:

$$m = c + \frac{n - n'}{n\,t - n'\,t'} \qquad \text{(11)}$$

En seguida la ecuacion (10) suministrará el valor de R_0. Debe procurarse que las temperaturas t y t' difieran bastante con el objeto de disminuir el efecto de los pequeños errores de observacion.

34.—El método que he expuesto fué con poca diferencia el que seguí para comparar el aparato geodésico con que medí la base para la triangulacion del Valle de México. Las reglas eran de madera, sustancia cuya dilatabilidad es tan pequeña, que muchos físicos la suponen nula. Sin embargo, Kater ha hallado que el pino blanco tiene un coeficiente de 0.0000041, y Puissant encontró 0.0000047 para la madera de sabino. Yo no conocia mas que esas dos experiencias, y me propuse determinar el coeficiente de nuestro pino (*oyamel*) de que estaban construidas las reglas. Con el objeto de presentar con mas minuciosidad un ejemplo de operaciones prácticas, copiaré algunos trozos de la Memoria que remití al Gobierno al terminar la medida de la base. (*)

«El aparato comparador de que podia disponer, consiste en un metro-modelo, un medio metro y un doble-decímetro, todos de laton, construidos por Parent y garantizados con el sello del gobierno frances. Al doble-decímetro, dividido en milímetros, le he adaptado un vernier que permite apreciar directamente 0^m00005, y que ha servido para medir el exceso de las reglas sobre los metros enteros. Un

(*) Vease la «*Memoria para la carta hidrográfica del Valle de México*» (pág. 24) publicada por el Sr. Orozco y Berra.

termómetro centígrado, unido al aparato, indica su temperatura en el momento de las observaciones.

«Establecida cada una de las reglas horizontalmente, y sostenidas por la cuarta y las tres cuartas partes de su longitud, con el objeto de colocarlas absolutamente en las mismas circunstancias que cuando se procede á la medida de la base, aunque no se les haya notado flexion alguna, se ha puesto el metro-modelo en coincidencia con uno de los extremos de la regla, y en esta posicion se ha fijado fuertemente á ella por su medio, con un tornillo de presion. En seguida el medio metro se ha puesto en contacto con el metro entero, fijándolo á la regla de igual manera, y luego que se ha estado cierto de que subsistian todas las coincidencias, se ha dejado pasar algun tiempo para que el termómetro tome la temperatura del aparato. Una vez anotada esta, se ponia en libertad el metro entero para volverlo á fijar á continuacion del medio metro, procediendo absolutamente lo mismo que ántes. El exceso de la regla sobre cuatro metros enteros se ha apreciado con el vernier del doble-decímetro. Los contactos de las diversas partes del aparato han sido tan perfectos como puede desearse, y algunas veces para variar los procedimientos, en lugar de comenzar por la coincidencia de la regla con el metro, se ha colocado este á una pequeña distancia del extremo de aquella, ya hácia adelante ya hácia atras, apreciando tambien la fraccion de metro con el vernier. Ambos métodos han conducido á los mismos resultados, lo que prueba la firmeza del aparato que se ha sujetado á diversas temperaturas.

«En los primeros dias de la medida de la base, y cuando todavía se usaban las estacas de que hice mencion en lugar de los tripiés, se notó en dos de las reglas una torsion bastante sensible, á pesar de todas las precauciones que habia tomado para impedirla; mas como solo se habian medido ochocientos metros cuando me resolví á adoptar los tripiés, quise comenzar de nuevo toda la medida con el aparato así modificado, tanto para buscar una comprobacion del grado de exactitud que podia esperar, como porque la ligera torsion de las dos reglas habia alterado probablemente su longitud, dada por las comparaciones que se habian hecho, lo que hacia indispensable una nueva medida del aparato. Afortunadamente no se volvió á notar cambio alguno en él, de suerte que toda la medida de la base se practicó con la longitud que resultó de las comparaciones posteriores, y que difiere cosa de 0^m003 de la que se habia obtenido primero.

«Para evitar el error que hubiera provenido de la pequeña curvatura de las reglas haciendo la comparacion como se explicó al principio, procedí de esta manera: medida repetidas veces una de ellas que no habia sufrido torsion alguna, se determinó la longitud de las demas por diferencias medidas con el vernier, de suerte que de este modo se tenia la distancia, en línea recta, comprendida entre los extremos de cada regla, eliminando tambien el error inicial del comparador, circunstancia que bastaria por sí sola para preferir este segundo método de comparacion, pues aunque aquel error se habia determinado con el mayor cuidado desde el principio, es siempre mas seguro proceder de manera que los resultados queden independientes de él.

«Todos los señores ingenieros que hoy forman la Comision han repetido tambien las observaciones, operando cada uno aisladamente, y anotando los datos en su registro particular para calcularlos separadamente con el objeto de comparar sus resultados con los mios. Antes de darlos á conocer, expondré el método de reduccion que he creido conveniente adoptar.

«Las cantidades incógnitas que se trata de determinar son dos, á saber: la longitud del sistema de reglas ó *estacion* á una temperatura fija ó *normal*, y la dilatacion relativa de la madera por cada grado centesimal. De consiguiente, dos comparaciones que suministran otras tantas ecuaciones entre ambas incógnitas, bastarian para determinar el valor de estas; pero este procedimiento presupone la exactitud de todos los elementos recogidos de la observacion, hipótesis inadmisible, por mas precisos que se supongan los instrumentos y los métodos empleados. Es, pues, necesario repetir las experiencias, y dando cada una de ellas una ecuacion de condicion, determinar los valores mas probables de las incógnitas, que son aquellas que satisfacen mejor á todas las ecuaciones. El análisis demuestra que estos valores son los que reducen á un *mínimum* la suma de los cuadrados de los errores, y por tanto, las variables deben determinarse estableciendo algebraicamente está condicion. La aplicacion que he hecho de la teoría de los *mínimos cuadrados*, (*) es la siguiente:

(*) El método de los *mínimos cuadrados* está fundado en la teoría matemática de las probabilidades, y sirve para combinar un número cualquiera de ecuaciones de condicion á fin de obtener los valores mas probables de las incógnitas que entran en ellas. La regla final para hacer la combinacion, se reduce *á multiplicar*

«Designando por E_0 la longitud de la *estacion* á 0° de temperatura; por m el coeficiente de dilatacion incógnita de la madera; por t la indicacion del termómetro en el momento de la comparacion; y por M la del metro-modelo cuya dilatacion l es conocida, se tendrá una ecuacion de esta forma:

$$E_0 (1 + m t) = M (1 + l t)$$

«Para abreviar llamaré x la *dilatacion absoluta* de la estacion, esto es: $x = m E_0$, y representaré por a el segundo miembro de la ecuacion, que se conoce, puesto que $l = 0.0000188$, con lo que se trasformará en esta otra:

$$E_0 + t x = a$$

«Cada comparacion da una ecuacion semejante; de suerte que en n comparaciones se tendrán entre las incógnitas E_0 y x las n ecuaciones de condicion:

$$\begin{aligned} E_0 + t_1 x &= a_1 \\ E_0 + t_2 x &= a_2 \\ E_0 + t_3 x &= a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_0 + t_n x &= a_n \end{aligned}$$

«Llamando ahora T la suma algebraica de las temperaturas; A la de los valores de a; B la de los cuadrados de las t; y C la de los productos $a\,t$, se tendrá:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdots t_n \qquad B = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \cdots\cdots t_n^2$$
$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots a_n \qquad C = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \cdots\cdots a_n t_n$$

«Con estas anotaciones, las ecuaciones normales entre E_0 y x, que expresan la condicion de los mínimos cuadrados, serán entónces:

$$\begin{aligned} n E_0 + T x - A &= 0 \\ T E_0 + B x - C &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtendrá finalmente:

$$x = \frac{A T - n C}{T^2 - n B} \qquad E_0 = \frac{A}{n} - \frac{T}{n} x$$

cada ecuacion de condicion por el coeficiente que en ella tiene una de las incógnitas, tomado con su signo, y á sumar las nuevas ecuaciones que resultan. La misma regla aplicada respecto de cada una de las incógnitas, da tantas ecuaciones llamadas *normales*, como incógnitas habia en las de condicion; y en consecuencia pueden resolverse por las reglas comunes del álgebra.

«Una vez calculada x puede sustituirse, si se quiere, en cada una de las ecuaciones de condicion para tener los valores individuales de E_0. Por último, el coeficiente de dilatacion de la madera se sacará de la relacion:

$$m = \frac{x}{E_0}$$

«No siendo posible incluir aquí todos los datos y los cálculos, que son bastante largos, me contentaré con poner á la vista los resultados que hemos obtenido separadamente los Sres. D. Manuel Fernandez, D. Miguel Iglesias, D. Francisco Herrera y yo, cada uno por seis comparaciones de toda la longitud de la estacion, ademas de las que se han hecho posteriormente á la medida de la base. El coeficiente de dilatacion del pino resulta:

Segun mis observaciones..... $m = 0.0000041$
„ las del Sr. Fernandez..... $m = 0.0000039$
„ las del Sr. Herrera..... $m = 0.0000044$
„ las del Sr. Iglesias..... $m = 0.0000045$

«Atendida la extremada pequeñez de esta cantidad, todos estos números pueden considerarse idénticos á los de Kater y Puissant.»

A pesar de la concordancia de los anteriores resultados, para adoptar los valores finales se combinaron todas las observaciones, obteniéndose definitivamente:

$$E_0 = 20^m55134 \qquad m = 0.0000042$$

35.—Los aparatos para la medida de las bases se han variado tanto, que no podriamos hacer la descripcion de todos ellos, ni aun mencionar los diversos arbitrios á que han acudido los geógrafos para conseguir la mayor precision combinada hasta donde es posible con la comodidad en el manejo de estos instrumentos. Harémos solo una breve descripcion de dos ó tres sistemas, persuadidos de que bien penetrado el ingeniero de las condiciones que debe reunir cualquiera de ellos, apreciará las modificaciones que advierta en los que tenga ocasion de usar, y aun acaso inventará otras que estén adecuadas á las circunstancias que le rodeen.

Las reglas, llamadas de Borda, con que se han medido algunas de las bases de la carta de Francia, son de platina y en número de cua-

tro. La longitud de cada una es próximamente de 4^m, y tiene sobrepuesta otra regla de cobre un poco mas corta, fijada invariablemente por uno de sus extremos á la de platina y libre por el otro. El objeto de esta combinacion bimetálica es el de poder apreciar la temperatura del aparato, por medio de la diferencia de dilataciones de las dos reglas, con cuyo fin tiene trazadas la de cobre algunas divisiones en su extremidad libre, y la de platina un vernier para estimar las fracciones de aquellas. Ademas de esto, cada regla de platina tiene en uno de sus extremos otra regla pequeña que se mueve en una ranura, en la cual hay otro vernier para apreciar las partes de las divisiones de la regla pequeña. Con este mecanismo, no es preciso poner las reglas en contacto al hacer la medida, sino que se colocan á una corta distancia una de otra, la cual se mide despues sacando la regla pequeña hasta que toque á la inmediata, y anotando la prolongacion que indica el vernier de la ranura. Cada una de las reglas está sostenida por otra de madera que descansa á su vez sobre tripiés con puntas de hierro que se clavan en el suelo por medio de un mazo.

El célebre astrónomo Bessel hizo uso de un aparato, tambien bimetálico, compuesto de reglas de hierro y de zinc. Las primeras tenian una longitud de 4^m, por $0^m.025$ de anchura y $0^m.01$ de espesor próximamente; y las de zinc de igual grueso y de unos $0^m.012$ de ancho, eran un poco menores que las de hierro. Estas últimas estaban terminadas por aristas verticales en forma de bisel, y las de zinc por aristas horizontales. La diferencia de longitud de estas dos reglas se media por medio de una lámina de vidrio dividida, y terminada por caras no paralelas, formando así una especie de cuña que se introducia entre la arista vertical de la regla de hierro y la horizontal de la de zinc. Esta medida daba á conocer la diferencia de dilataciones de los dos metales.

Los astrónomos Zach y Plana midieron las bases de Aix y de Turin con reglas de madera de sabino impregnadas de aceite y barnizadas, con el objeto de preservarlas de la humedad. Al operar, el baron de Zach dejaba de una regla á la inmediata un pequeño espacio, que media en seguida con otra regla pequeña de cobre dividida. Plana hacia mover una de las reglas hasta que un hilo muy fino que tenia cada una en un anillo fijo en su extremidad, cortase exactamente un punto marcado en la regla inmediata.

El ingeniero piamontés Porro ha inventado un aparato de la ma-

yor precision, y que resulta del uso combinado de una varilla de madera y de dos ó mas microscopios. La varilla de 3^m de longitud próximamente y de 0^m01 de diámetro, está contenida por medio de diafragmas en el eje de un tubo de cobre, y lleva en sus extremidades dos láminas metálicas pequeñas y divididas en diezmilímetros. Los microscopios apoyados en sólidos tripiés que se clavan en la direccion de la base, y á una distancia uno de otro próximamente igual á la longitud de la varilla, están dispuestos de manera que sus ejes ópticos pueden colocarse verticalmente por medio de niveles de aire. De esta manera, la distancia entre los ejes de dos microscopios consecutivos es la que se mide con la regla ó varilla de madera, pudiéndose estimar pequeñísimas fracciones de las divisiones que la terminan, con los hilos micrométricos de los microscopios.

Se han usado tambien cadenas metálicas á una tension constante, hilos delgados de hierro, tubos de vidrio, &c., &c. El vidrio tiene un coeficiente de dilatacion tanto mas pequeño cuanto menor es la cantidad de plomo que contiene: el del *flint glass* inglés es solo..... 0.00000812; pero ademas de la fragilidad de los aparatos construidos de vidrio, parece que esta sustancia no se dilata con mucha regularidad, lo cual puede ser causa de graves errores.

La madera, como se ha visto, es muy poco dilatable; pero varia notablemente de longitud por la accion de la humedad. De los experimentos del General Roy, geógrafo inglés, resulta que una regla de madera expuesta durante una noche á la humedad aumentó 0.000133 de su longitud. Para evitar este inconveniente se impregnan muy bien las reglas de aceite hirviendo y despues se cubren con varias capas de barniz, de pintura al óleo, ó mejor de ambas cosas. Con estas precauciones, y la de preservarlas siempre de las variaciones higrométricas demasiado bruscas, creo que se puede estar seguro de que un aparato de madera suministrará cuanta exactitud se necesita, teniendo la ventaja del poco peso, respecto de los aparatos metálicos.

36.—Para concluir, copiaré de la memoria que ántes se ha citado, la descripcion del aparato con que se midió la base del Valle de México, una de cuyas reglas está representada en la fig. 5ª, y que se construyó en esta ciudad.

«Las cinco reglas que lo componen son de madera de pino (*oyamel*), de poco mas de cuatro metros de longitud cada una, y cuya seccion es rectangular de 0^m05 por 0^m06. Cada regla está terminada por

casquillos de laton de una forma tal, que siendo sus extremos de un poco mas de un milímetro cuadrado, conservan una de las aristas de la regla en toda su longitud, disposicion muy ventajosa tanto para alinear el sistema y establecer bien los contactos, como para determinar la verdadera longitud de las reglas, comparándolas con la unidad fundamental. Armado el aparato, cada regla queda sostenida por dos rectángulos de madera, colocados al cuarto y tres cuartos de su extension, y provistos de tornillos que obrando lateralmente, sirven para comunicar los movimientos azimutales y para fijar la regla en una posicion invariable luego que se ha situado de una manera conveniente. A cada rectángulo va unido un eje vertical que entra en una abertura correspondiente practicada en las mesetas de los tripiés, que sirven de apoyo á todo el sistema, y que tienen tambien tornillos de presion que sirven para colocar la regla invariablemente á la altura que conviene. Los movimientos longitudinales se comunican á cada regla por un tornillo que se le fija voluntariamente y obra sobre los rectángulos que la sostienen. Al principio habia yo adoptado en lugar de los tripiés unas estacas cónicas de encino, terminadas por casquillos y puntas de hierro, que tenian cosa de 0^m75 de longitud y 0^m07 de diámetro en su cara superior, en cuyo centro estaba la abertura destinada á recibir el eje cilíndrico de que he hablado, y el tornillo de presion correspondiente. Estas estacas que se clavaban en la tierra á golpe de mazo, me parecieron preferibles á los tripiés, por ser mas portátiles y prestar mucha solidez; pero me ví en el caso de renunciar á su uso, teniendo que operar á lo largo de un camino cuyo lecho formado de piedras, hacia difícil y dilatada la operacion de fijar las estacas. Sin embargo, la construccion de los tripiés y otras pequeñas modificaciones que se han hecho al aparato, cuando lo indicaba la experiencia, no han aumentado los gastos del ministerio, pues han sido á mis expensas.

«Las reglas no están formadas de una sola pieza, sino compuestas de láminas delgadas de madera ensambladas longitudinalmente, lo que, como se sabe, garantiza mas la rigidez del conjunto. La madera se escogió bastante seca, y se impregnó ademas de aceite caliente aplicado varias veces, cubriendo en seguida las reglas de una capa gruesa de pintura al óleo, con el objeto de preservarlas mejor de la humedad.

«Para determinar la pequeña inclinacion de las reglas durante la medida, habia yo adoptado primero un clisímetro de perpendículo,

provisto de un arco de círculo graduado, que con el vernier de la alidada móvil, daba directamente los ángulos con aproximacion de un minuto; pero tambien tuve que desecharlo, pues noté que cuando hacia algun viento la alidada se desviaba algo de la vertical, no siendo bastante pesada para conservar su posicion invariable. Un aumento de peso me hacia temer la flexion de la regla geodésica que sostenia el clisímetro al determinar su ángulo de inclinacion; y por otra parte, no era fácil construir el mecanismo de tornillos de presion y aproximacion con que se hubiera podido remediar aquel inconveniente; y así es que adopté otro sistema de clisímetro incomparablemente mas exacto, y libre de aquel defecto. El nuevo instrumento es un círculo entero dividido, que da una aproximacion de 10″ con dos nonius, y cuyo primer destino era la construccion de los ángulos sobre el papel. Para adaptarlo al uso á que iba á dedicarse, lo hice colocar sobre un apoyo de madera, de modo que permaneciendo fijo el círculo, quedase móvil la alidada, en cuyo centro se le fijó un nivel de aire. Con esta disposicion, situado el clisímeto sobre la superficie cuya inclinacion se quiere determinar, no hay mas que conducir la burbuja de aire al medio del tubo del nivel por medio del tornillo de aproximacion, y leer la indicacion de la graduacion, procediendo en seguida del mismo modo despues de invertir el clisímetro. Esta doble lectura de la graduacion proporciona inmediatamente el conocimiento de que no ha habido error en las indicaciones obtenidas en las dos posiciones del instrumento, pues al paso que la semidiferencia de ambas lecturas da el ángulo de inclinacion que se busca, su semisuma da el error del índice, que debe ser una cantidad constante.»

37.—Pasemos ahora al modo de operar en el terreno. Luego que se tiene perfectamente determinada la longitud de las reglas á 0° ó á cualquiera otra temperatura, y conocido el coeficiente de dilatacion de la sustancia de que están construidas, se procede á la medida de la base, previamente trazada, como se ha dicho, por medio de jalones á 50 ó 100 metros de distancia. Para establecer próximamente en el alineamiento de la base los tripiés que sostienen las reglas, es muy conveniente atar un cordel muy tendido de estaca á estaca, á fin de mover ya poco las reglas para alinearlas con precision. Este alineamiento se hace valiéndose de una de las aristas de las reglas, ó si se cree necesario se colocan con ese objeto encima de ellas dos pínulas para dirigir la visual.

La extremidad de la primera regla se pone en la vertical del punto que señala el extremo de la base; punto que suponemos muy bien marcado en el centro de un poste ó pilastra de piedra. Una plomada de hilo muy fino se usará para señalar esta vertical, de suerte que la primera regla se pone en contacto con el hilo. Luego que está colocada así, y bien alineada, se fija á sus apoyos por temor de algun movimiento, y se establece la segunda en el alineamiento, sin tocar la primera regla, hasta que ambas se ponen en contacto, valiéndose de los tornillos que les comunican movimientos pequeños. Se procede del mismo modo hasta colocar las cuatro ó cinco reglas que forman la estacion. En seguida se anota la temperatura del aparato indicada por el termómetro ó los termómetros que van unidos á él, teniendo cuidado de que estos instrumentos estén en contacto con las reglas, pero á cubierto de los rayos directos del sol.

Si las reglas no se han establecido horizontalmente, lo cual si no difícil es dilatado, se anota su ángulo de inclinacion, que se mide ó con un círculo como el que se describió al hablar del aparato del Valle, ó bien por medio del instrumento representado en la fig. 6ª Este es un clisímetro comun de perpendículo al que se adapta un arco de círculo $A\,B$, que recorre la alidada $C\,D$, fija en el centro de la graduacion. Un nivel de aire pequeño E indica la verticalidad de la alidada, la cual tiene un vernier y sus tornillos de presion y aproximacion. Es necesario leer la indicacion del clisímetro en dos posiciones inversas para eliminar el efecto de los errores iniciales, segun se ha explicado en la Topografía. Una aproximacion de $1'$ es suficiente en todos casos.

Luego que se ha anotado la inclinacion de cada regla y la temperatura media del aparato, se quita la primera para colocarla á continuacion de la última, y se prosigue así, teniendo cuidado de evitar que choquen entre sí, y de inscribir en el apunte la indicacion que corresponde á cada una, para lo cual es conveniente numerarlas.

Como el choque de una regla con otra podria acaso producir el retroceso de la ya establecida, y por consiguiente la pérdida de toda la operacion ó al ménos del trabajo del dia, es en general preferible dejarlas á una pequeña distancia, y medir en seguida este espacio por medio de otra regla pequeña finamente dividida y un vernier, ó bien por medio de un triángulo de madera ó de metal $A\,B\,C$ (fig.

7ª). Estando divididos sus lados, para valuar la distancia $b\,c$ de una regla á la inmediata, se tiene:

$$b\,c = A\,b\,\frac{B\,C}{A\,B}$$

Si $B\,C$ es, por ejemplo, de 0^m025 y $A\,B$ de 0^m5, se podrá apreciar teóricamente $\frac{1}{20}$ de las divisiones de $A\,B$, las que si son milímetros, darán al instrumento una aproximacion de 0^m00005.

Cuando en el curso de la medida y por los accidentes del terreno, haya necesidad de colocar algunas reglas mas altas ó mas bajas que las ya establecidas, se hace tambien uso de una plomada para situar los extremos de las reglas en contacto con el hilo, cuyo espesor debe llevarse escrupulosamente en cuenta. El peso de la plomada debe recibirse en una vasija llena de agua para evitar las oscilaciones que harian incierto el contacto. Se usa igualmente la plomada al terminar el trabajo de cada dia, proyectando la extremidad de la última regla sobre la cabeza horizontal de una estaca firmemente clavada en el suelo. Desde el punto así fijado se parte al dia siguiente.

Toda precaucion, por exagerada que parezca, jamas lo es en una operacion tan delicada como la medida de una base geodésica. No insistiré mas sobre el particular, considerando que lo expuesto será suficiente para persuadir al geómetra de que en este género de trabajos debe ponerse á cubierto hasta donde le sea posible de toda clase de errores, acudiendo á todos los recursos de su ingenio y de su saber para conseguirlo.

Los ángulos de inclinacion sirven para reducir cada regla á su proyeccion horizontal, por medio de la fórmula:

$$r = R \cos. i$$

Como el ángulo i raras veces excede de 2°, es mas exacto introducir un seno en la ecuacion, calculando la diferencia de la regla á su proyeccion, á saber:

$$R - r = R\,(1 - \cos. i) = 2\,R \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2}\,i \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Esta fórmula se reduce á tabla con el valor hallado para R, y haciendo variar á i de dos en dos ó de tres en tres minutos desde 0° hasta 2°. De ella se interpola para cualquiera inclinacion. Si

no todas las reglas tienen exactamente la misma longitud, no es, sin embargo, necesario calcular la tabla para cada una, pues diferenciando la fórmula con relacion á R, se encuentra:

$$d(R-r) = 2 \operatorname{sen.}^2 \tfrac{1}{2} i \,.\, dR$$

y dividiendo por aquella, se tiene:

$$d(R-r) = (R-r)\frac{dR}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

de manera que para una regla de longitud $R + dR$, se tomará la reduccion que corresponde á R y se multiplicará por la constante $\frac{dR}{R}$ para obtener la pequeña correccion que debe sufrir la reduccion primitiva, que para la nueva regla será $R - r + d(R-r)$.

Lo mas comun en la práctica es que i no llegue á 1°, y entónces la ecuacion (12) puede simplificarse introduciendo á i en minutos, con lo que se tendrá:

$$R - r = \tfrac{1}{2} R i^2 \operatorname{sen.}^2 1' = (2.62642)\, R i^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Atendiendo á la pequeñez de la reduccion, es evidente que R puede tomarse á cualquiera temperatura, sin hacerle correccion alguna por la dilatacion.

38.—Veamos ahora cómo se calcula el valor definitivo de la base. Sea n el número de estaciones contenidas en ella, y............ $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots\ldots t_n$ las temperaturas anotadas en cada estacion. La base será:

$$B = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots\ldots E_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

En lugar de calcular separadamente la longitud de cada estacion, Mr. Salneuve propone un procedimiento que voy á exponer dándole mas generalidad. Sea x la temperatura que debe tener la estacion para representar exactamente N metros á 0°, y se tendrá la condicion:

$$E_x = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Llamando θ la temperatura á que se comparó el aparato con la unidad fundamental, se tiene tambien la ecuacion:

$$E_\theta = N_\theta$$

Pero como $E_\theta = E_x\left(1 + m\,(\theta - x)\right)$ y tambien $N_\theta = N\,(1 + c\,\theta)$, resultará atendiendo á la relacion (B):

$$x = \frac{(m - c)\,\theta}{m}$$

Una vez conocida x, cada uno de los términos de la ecuacion (A) puede expresarse en funcion de x, pues se tiene:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_x\left(1 + m\,(t_1 - x)\right) \\ E_2 &= E_x\left(1 + m\,(t_2 - x)\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= E_x\left(1 + m\,(t_n - x)\right) \end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$B = n\,E_x + m\,E_x\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots t_n) - m\,n\,x\,E_x$$

Sustituyendo N metros en lugar de E_x, segun expresa la condicion establecida, se tendrá en último resultado:

$$B = N\,n + N\,m\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots t_n) - N\,n\,(m - c)\,\theta \ldots\ldots (15)$$

No debe olvidarse que m representa el coeficiente de dilatacion de las reglas, y c el de la unidad-tipo, siendo θ la temperatura en el momento de la comparacion.

Este método es sin duda muy elegante: pero me parece mas sencillo el que seguí para calcular la base del Valle de México. Expresando los términos de la ecuacion (A) en funcion de la longitud del aparato á 0°, para lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0\,(1 + m\,t_1) \\ E_2 &= E_0\,(1 + m\,t_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= E_0\,(1 + m\,t_n) \end{aligned}$$

se hallará:

$$B = n\,E_0 + m\,E_0\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots t_n)$$

Llamando T el promedio de todas las temperaturas anotadas durante la medida, tendrémos:

$$n\,T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots t_n$$

con lo cual el valor de la base es:

$$B = n\,E_0 + m\,n\,T\,E_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

El valor de E_0 se obtiene, segun se ha visto, por las comparaciones del aparato con el metro-patron.

Lo precedente supone que todas las reglas se colocaron horizontalmente y en contacto; pero por lo general no es así, y se corregirán los valores precedentes de la base, añadiéndoles la suma de las distancias de las reglas, y restándoles la suma de las reducciones al horizonte dadas por las fórmulas (12) ó (14.) Designando por $\triangle$ los pequeños espacios de una regla á otra, y por Σ la suma de términos semejantes, la correccion es: $\Sigma\,(\triangle) - \Sigma\,(R - r)$. Cuando se haya usado la plomada tambien se hará una correccion aditiva para llevar en cuenta el grueso del hilo.

39.—Segun se recordará, las triangulaciones geodésicas deben proyectarse sobre la superficie del elipsoide formado por la prolongacion ideal de las aguas del Oceano; y esto se consigue proyectando la base, puesto que la resolucion de la cadena dará en seguida las proyecciones de los demas lados. Sea $A\,B = B$ (fig. 8ª) la base medida en un terreno cuya altura sobre el nivel del mar es $A\,a = n$; la proyeccion de esta línea será $a\,b = b$, siendo $C\,a = R'$ el radio de la esfera osculatriz. Los sectores semejantes $A\,B\,C$ y $a\,b\,C$ darán:

$$R' + n : B :: R' : b$$

de donde resulta:

$$b = B\,\frac{R'}{R' + n}$$

Como n es siempre muy pequeña respecto de R', es preferible calcular la diferencia entre la base medida y su proyeccion. Divi-

diendo por R' los dos términos de la ecuacion anterior, tendrémos:

$$b = B\frac{1}{1+\frac{n}{R'}} = B\left(1+\frac{n}{R'}\right)^{-1} = B\left(1-\frac{n}{R'}+\frac{n^2}{R'^2}-\frac{n^3}{R'^3}+\ldots\ldots\right)$$

de donde se obtiene por último:

$$B - b = B\frac{n}{R'} - B\frac{n^2}{R'^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Esta reduccion al nivel del mar es en todos casos tan poco considerable, que basta calcular solamente los dos primeros términos de la serie. Por la misma razon no hay inconveniente en tomar en lugar de R' la normal mayor ó el radio central correspondientes á la latitud media del país en que se trabaja. Cuando el terreno de la base sea inclinado, n expresará su altura media, que se determina por medio del barómetro, sin que sea indispensable hacerlo con mucha precision, pues un error de algunos metros en ese elemento no altera sensiblemente el valor de la serie, á causa de la magnitud considerable de los denominadores.

Concluiré este Capítulo tomando por ejemplo los cálculos de la base del Valle de México, y la apreciacion de su grado de exactitud.

«Las correcciones que deben hacerse al valor que se obtiene por el número de reglas colocadas en toda la extension de la base, son: 1ª reduccion de la longitud del aparato á la temperatua media que se obtuvo durante la medida, y que fué de 19.°6 centígrados: 2ª reduccion de cada regla al horizonte, para lo cual se hace uso de los ángulos de inclinacion medidos con el clisímetro: 3ª reduccion á la línea recta, habiéndose medido la base en línea quebrada, como se dijo al principio: 4ª reduccion al nivel del mar: 5ª correccion por el espesor de los monumentos que la terminan. Haciendo todos los cálculos se obtienen los números siguientes:

Longitud del aparato á 0° de temperatura...................	$E_0 =$	20ᵐ55134
Número de estaciones que contiene la base......................	$n =$	420. 6394
Producto..	$n\ E_0 =$	8644ᵐ703
Reduccion á la temperatura media........................	$m\ n\ T\ E_0 =$	+ 0. 712
Suma de las reducciones al horizonte................	$\Sigma\ (R - r) =$	— 0. 334
Suma de las reducciones á la línea recta.........................		— 0. 021
Reduccion al eje de los monumentos............................		+ 0. 962
Reduccion al nivel del mar (*)...........................	$B - b =$	— 3. 062
Longitud de la base al nivel del mar............................	$b =$	8642ᵐ96

(*) Para esta reduccion supuse de 2260ᵐ la altura del terreno en que se midió la línea, que fué en la carretera de México al Peñon.

«Por temor de alguna equivocacion al consignar en el registro el número de estaciones medidas, encargué al Sr. Iglesias que hiciese una triangulacion á lo largo de la línea, apoyándose en una base pequeña de poco ménos de 2000^{m}, á fin de conocer de esta manera la distancia aproximativa entre ambos monumentos. Se ejecutó así en efecto, y el valor que resulta de la operacion trigonométrica es 8642^{m}76, de suerte que se puede estar seguro de que no ha habido equivocacion alguna.

«Será ahora muy interesante calcular cuál puede ser el mayor error que tenga la base, en cuanto depende tanto del valor adoptado para la longitud del aparato, cuanto de los demas elementos que se deducen de la manera de operar en el terreno. Para lo primero puede tomarse por punto de partida la mayor diferencia que exista entre una de las comparaciones aisladas de las reglas y el valor medio que se admitió; pues aunque sea un hecho constante que la repeticion de experiencias conduce siempre á promedios mas ó ménos independientes de los errores fortuitos, y por consiguiente casi idénticos, deberé considerar aquí el caso mas desfavorable, suponiendo que uno de los valores extremos tiene mayor grado de probabilidad que el resultado medio. Con respecto á los errores que dependen del modo de operar, se les podrá atribuir un valor estimativo, deducido del grado de aproximacion de los instrumentos, y de la manera con que estos errores deben figurar en las fórmulas ó métodos de cálculo, admitiendo, ademas, que se han cometido en todas las operaciones.

«Hay cierta clase de errores que jamas pueden producir compensacion, pues se repiten siempre en el mismo sentido, tendiendo á aumentar ó disminuir el valor que se busca: entre estos figuran los de la longitud del aparato, los de reduccion al horizonte y los de alineamiento. Otros, por el contrario, son unas veces aditivos y otras sustractivos, de suerte que si no se destruyen completamente, por lo ménos el análisis enseña que su influencia en el resultado final es solamente proporcional á la raiz cuadrada del número de veces que pueden cometerse. A esta clase pertenecen los errores de los contactos de las reglas, que pueden ser mas ó ménos forzados, y tambien el error que se tenga al terminar la medida de cada dia. De las 24 medidas que se hicieron de la regla que se tomó por unidad para comparar los demas, la mayor diferencia entre el resultado medio admitido y el que mas se aleja de este, llega á 0^{m}00006. Combinan-

do con este número las mayores diferencias obtenidas en la comparacion de las otras reglas, encuentro que suponiendo que todos los errores máximos obrasen en el mismo sentido, la longitud del aparato diferiria $0^m.00046$ del valor adoptado, lo que produciria en la base una diferencia de $0^m.194$.

«La inclinacion de las reglas fué generalmente muy pequeña, pues pocas veces llegaba á 1°, y solo en dos ó tres casos excedió de 2°; mas suponiéndola de 1° en término medio, y admitiendo en las lecturas del clisímetro una incertidumbre de 1′, el error que resulta en la reduccion al horizonte es $0^m.00002$ por regla, lo que produce $0^m.044$ en la base.

«La manera de alinear las reglas no creo que pueda producir error sensible, teniendo á cada paso la comprobacion, no solo de los piquetes ó jalones, sino del cordel establecido entre cada dos de ellos; pero suponiendo, sin embargo, que el aparato se desviase de la línea recta una cantidad igual al espesor de cada regla, el cálculo aplicado á esta hipótesis da $0^m.00006$ por estacion, lo que supone en la base un error de $0^m.025$.

«En los contactos de las reglas puede admitirse una incertidumbre de $0^m.0001$ por regla, lo que originaria $0^m.004$ en el resultado.

«Finalmente, el error al terminar cada dia la operacion, no puede exceder de $0^m.001$, y esta cantidad produciria en toda la línea $0^m.006$. En cuanto á las correcciones que provienen de los cálculos, es claro que puede suponérseles constantes.

«Es ciertamente muy difícil que los errores lleguen á los límites que les he asignado, y lo es mucho mas que todos ellos tiendan á obrar en el mismo sentido; pero aun en este caso, que es el mas desfavorable que puede admitirse, resultará:

Error que puede provenir de la longitud del aparato.....	$0^m.194$
,, ,, ,, de la reduccion al horizonte.....	0. 044
,, ,, ,, del alineamiento.....	0. 025
,, ,, ,, de los contactos.....	0. 004
,, ,, ,, del término diario.....	0. 006
Suma de los errores.....	$0^m.27$

«Todas las consideraciones que preceden me inducen á creer que el error de la base no es probable que llegue á $0^m.2$, por lo ménos en la suposicion de que el aparato comparador represente exactamen-

te el *metro* á la temperatura normal, y de que no haya algun vicio constante en el modo de comparar, lo que parece garantizar la concordancia que hemos obtenido en la determinacion del coeficiente de dilatacion de la madera. Por otra parte, el tramo de 800^{m} que se habia medido usando estacas, se rectificó despues que adopté los tripiés, y hechas todas las reducciones, la diferencia de las dos medidas no llega á 0^{m}005, lo que proporcionalmente produciria en toda la línea una incertidumbre de 0^{m}06».

CAPITULO IV.

ELECCION DE LOS VÉRTICES.

40.—El reconocimiento previo del terreno, que se recomendó como muy útil en las triangulaciones topográficas, es del todo indispensable en las geodésicas, porque de él depende la eleccion de un buen plan de operaciones, la economía de tiempo en los trabajos subsecuentes, y acaso el menor costo de la triangulacion misma. Generalmente hablando, los principales vértices de una cadena deben establecerse en las montañas elevadas, desde las que se descubre una gran extension del país, procurando que sean aquellos en el menor número posible, y que los triángulos adquieran las mayores dimensiones compatibles con el poder y el mérito de los instrumentos de que disponga el ingeniero para medir los ángulos. La magnitud de los lados geodésicos, aunque muy variable como fácilmente se comprenderá atendidas las dificultades que presente el terreno y los medios de accion con que se cuente, puede establecerse entre los límites de 20 á 50 ó 60 mil metros, al ménos en las operaciones del órden comun.(*)

(*) Creo que el mayor triángulo medido hasta hoy es uno de los de la triangulacion del meridiano de Francia, el cual sirvió para enlazar una de las islas Baleares con la costa de España. El mayor lado de este triángulo tiene 160904^{m}, que representan 38.4 leguas mexicanas. El menor es de 110236^{m}, ó 26.3 leguas.

Para hacer un buen proyecto de triangulacion conviene formar un cróquis del país, tomando algunos ángulos con un instrumento portátil desde lo alto de los montes, á fin de determinar aproximadamente la posicion de todos aquellos puntos que se crean llenar las condiciones necesarias para servir de vértices. Es tambien muy útil tomar vistas de las montañas distantes con el objeto de reconocer mejor los puntos que parezcan propios para estaciones; y en general, no elegir definitivamente un vértice sin haber estado en él, para juzgar por sí mismo de las dificultades que ofrezca para continuar las operaciones; porque sucede muchas veces que á distancia se cree conveniente un lugar por su posicion elevada ú otra circunstancia, al paso que colocándose en él se encuentra la vista obstruida por obstáculos que al principio no habian podido apreciarse. La copia del aspecto que presentan los vértices lejanos sirve tambien para juzgar de qué modo se verán las señales que en ellos se coloquen. Así, por ejemplo, si una estacion se distingue limitando el horizonte, la señal que se ponga en ella se proyectará en el cielo, y de consiguiente convendrá pintarla de un color oscuro para que se vea con precision; miéntras que si se ha de proyectar sobre objetos terrestres, será mejor pintarla de blanco, y en general, deberá dársele un color que forme contraste con el del objeto sobre el cual se ve proyectada.

Al ocupar cada estacion cuando se hace el reconocimiento, puede averiguarse la manera con que se verá proyectada la señal que se establezca en ella. Sea A (fig. 9ª) la estacion de que se trata, y B otro vértice desde el cual se desea saber si se proyectará en el cielo ó en la tierra la señal que se ponga en A. Midiendo la distancia zenital $z = ZAB$ del punto B, y tambien la del punto C, que limita el horizonte en una direccion opuesta á la de B, se tendrá:..... $z' = ZAC$. Si $z + z'$ es mayor que 180°, es claro que el punto C estará deprimido respecto de la línea AB, y en consecuencia desde B se verá la señal de A proyectada sobre el cielo. Si, por el contrario, $z + z'$ es menor que 180°, la señal establecida en A se distinguirá desde B proyectada sobre objetos terrestres.

Muchas veces se establecen los vértices en las poblaciones: en tales casos es necesario elegir puntos muy notables que se distingan de la masa general de edificios; porque de otra manera suele ser muy dificultosa la medida de los ángulos. En todas ocasiones se procurará

evitar la eleccion de estaciones que den lugar á la *reduccion al centro*, que se ha dado á conocer en el núm. 69 de la Topografía.

Cuando se desea establecer geodésicamente un gran número de puntos, se dividen por lo regular las triangulaciones en primarias, secundarias, &c., lo mismo que en la Topografía. Debe, sin embargo, advertirse que cuando los lados no exceden de 15000^{m} se obtiene toda la precision apetecible tratando los triángulos como se ha enseñado en las operaciones topográficas, de manera que no estableceremos diferencia alguna respecto de los triángulos geodésicos de las mismas dimensiones, admitiendo que los secundarios de estas equivalen á los topográficos de primer órden. Cuando las cadenas geodésicas se establecen con el fin de que sirvan de apoyo á una extensa operacion topográfica, puede evitarse la medida de las bases topográficas, sirviendo de tales los lados menores de la triangulacion geodésica; porque en general deben estos considerarse como mas exactos que las líneas medidas directamente con el decámetro.

41.—Los triángulos geodésicos pueden tratarse como esféricos, segun lo que se ha expuesto en el Capítulo II; pero por ser siempre sus lados muy poco curvos, no habria inconveniente en hacerles extensivo lo que se dijo en la Topografía respecto de la figura mas ventajosa de los triángulos planos para que influyan ménos en ellos los errores de observacion. No obstante, demostraré directamente la misma propiedad en los triángulos esféricos poco curvos, valiéndome del análisis infinitesimal, por ser mas breve el cálculo.

Si la ecuacion

$$\text{sen. } a = \text{sen. } b \, \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

se diferencía suponiendo variables todos sus elementos, se obtiene:

$$\text{d } a = \frac{\text{cos. } b \text{ sen. } A}{\text{cos. } a \text{ sen. } B} \text{d } b + \frac{\text{sen. } b \text{ cos. } A \,.\, \text{d } A - \text{sen. } a \text{ cos. } B \,.\, \text{d } B}{\text{cos. } a \text{ sen. } B}$$

Como los errores angulares, segun se ha dicho varias veces, son independientes de los valores de los ángulos, si suponemos..... $\text{d } A = \text{d } B$, y ademas sustituimos el valor de sen. b, resulta:

$$\text{d } a = \frac{\text{cos. } b \text{ sen. } A}{\text{cos. } a \text{ sen. } B} \text{d } b + \text{tan. } a \, (\text{cot. } A - \text{cot. } B) \text{ d } B$$

y puesto que los lados son siempre de poca amplitud, la relacion de

sus cosenos, que entra en el primer término, es sensiblemente igual á la unidad; así es que omitiéndola, se tendrá la siguiente expresion del error del lado *a:*

$$\mathrm{d}\,a = \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}\,\mathrm{d}\,b + \text{tan. } a\,(\text{cot. } A - \text{cot. } B)\,\mathrm{d}\,B$$

Igualmente hallariamos para el tercer lado *c:*

$$\mathrm{d}\,c = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B}\,\mathrm{d}\,b + \text{tan. } c\,(\text{cot. } C - \text{cot. } B)\,\mathrm{d}\,B$$

Por estas ecuaciones se ve que los errores ó variaciones de los lados a y c provienen de dos causas: la primera es el pequeño error $\mathrm{d}\,b$ que pueda existir en la base b del cálculo; y la segunda el error angular. El efecto de la primera no puede nulificarse mas que con $\mathrm{d}\,b = 0$; y crecerá ó menguará segun que el ángulo opuesto á la base sea menor ó mayor que el adyacente.

El efecto de la segunda causa podrá ser nulo cuando lo sean los coeficientes de $\mathrm{d}\,B$; condicion que equivale á suponer $A = B = C$.

La parte de error que proviene de $\mathrm{d}\,b$, para valores poco diferentes de los ángulos adyacentes á la base, tendria un *mínimum* cuando $B = 90°$; pero esta condicion trae consigo la necesidad de ir disminuyendo la longitud de los lados trigonométricos, lo cual es contrario á la conveniencia, porque seria preciso haber partido de una base sumamente grande. Aunque por lo regular los errores de las bases tienen mas influencia que los angulares, se adopta la forma deducida de la primera condicion, que destruye el efecto de estos últimos, recomendándose solamente el medir las bases con extremada escrupulosidad. En la misma hipótesis de triángulos equiláteros, el error que proviene de $\mathrm{d}\,b$, si bien existe, al ménos no aumenta. Por idéntica razon se debe tener mucho cuidado de ir aumentando gradualmente la magnitud de los primeros triángulos cuando la base sea menor que la longitud media que se juzgue conveniente dar á los lados de la cadena.

Los coeficientes de $\mathrm{d}\,B$ son de la misma forma que los hallados en el cálculo referente á la mejor figura de los triángulos topográficos (Tom. I, pág. 22), por lo que, si se quiere, podrá trasformarse como allí se hizo, para el caso en que el error angular varíe de signo de un ángulo á otro, pues no creo necesario repetirlo aquí. Solo

recordaré que si bien es imposible en la práctica sujetarse á formar triángulos equiláteros, debe procurarse no salir de los límites 30° y 120° para los ángulos. He visto, sin embargo, triangulaciones de mucho mérito en que hay algunos ángulos muy agudos; y en realidad la magnitud de los errores angulares ha disminuido considerablemente en razon de la perfeccion progresiva que ha logrado alcanzarse en la graduacion de los instrumentos, muy superior en su línea al grado de exactitud con que pueden medirse las distancias; así es que cuando no pueda evitarse la eleccion de triángulos mal configurados, creo que midiendo sus ángulos con mas precaucion, no deben temerse malos resultados.

42.—Para la demarcacion de los vértices se han usado señales geodésicas muy diversas. Las mas comunes (fig. 10ª) consisten en tres ó cuatro maderos que forman un trozo de pirámide terminado en su parte superior por un cono invertido, que sirve de punto de mira. El eje del cono se proyecta en el suelo, y se marca su proyeccion sobre una estaca, á fin de colocarse en el centro mismo de la señal cuando desde ella se observan los ángulos. A veces se cubre de madera su parte superior para que sirva de abrigo al ingeniero y para resguardar el instrumento.

Tambien se ha hecho uso de señales (fig. 11ª) cuyo punto de mira es móvil, consistiendo en una lámina de madera ó de metal, que gira al derredor de un eje vertical, á fin de poderla dirigir hácia el punto desde el cual se observa.

Otras señales mas permanentes (fig. 12ª) forman pequeños observatorios de mampostería, de ladrillo ó de piedra. En su parte superior están terminadas por un cilindro que sirve á la vez de punto de mira y de apoyo al teodolito.

Se han usado tambien como puntos de mira cilindros, conos ó esferas formados de láminas metálicas (hoja de lata ó laton) que pulimentadas, se ven á grandes distancias, especialmente cuando las hiere la luz del sol.

Respecto de la altura de las señales, se dijo ya en la Topografía que debe ser por lo ménos igual á 0.00015 de la distancia desde la cual se han de observar. En cuanto al diámetro del punto de mira, por algunas experiencias que he hecho, creo poder asentar que una señal se distingue muy bien con un anteojo mediano cuando su grueso se ve bajo un ángulo de 2″, lo que próximamente equivale

á adoptar señales cuyo diámetro sea $\frac{1}{15}$ de su altura, ó bien 0.00001 de la distancia. Con estas dimensiones está formada la tabla siguiente:

20000m	3m0	0m2
30000	4. 5	0. 3
40000	6. 0	0. 4
50000	7. 5	0. 5
60000	9. 0	0. 6
70000	10. 5	0. 7
80000	12. 0	0. 8

Un teodolito de telescopio poderoso permitirá disminuir notablemente el grueso de las señales, con especialidad cuando á esta circunstancia reuna la de permitir las lecturas angulares con mucha aproximacion.

En algunas operaciones geodésicas se han medido los ángulos de noche poniendo señales luminosas en los vértices. Estas han consistido en lámparas colocadas en el foco de reverberos ó reflectores parabólicos cuya superficie interna, muy bien pulimentada, envía los rayos luminosos á una gran distancia paralelamente al eje del paraboloide. Así midieron los astrónomos Biot y Arago los ángulos del gran triángulo que liga las costas de Cataluña con la isla de Ibiza. En las operaciones ejecutadas en la India por los geográfos ingleses se han empleado fuegos de Bengala como señales. Creo que la luz llamada de Drummond, producida sobre un trozo de cal por una corriente de gases oxígeno é hidrógeno, ó mejor todavía la luz eléctrica, suministrarian magníficas señales con cuya ayuda podrian formarse triángulos muy extensos. Nuestro país se presta admirablemente á grandes trabajos geodésicos; porque en todas partes se encuentran dilatadas llanuras interrumpidas por elevadas sierras y por picos aislados que proporcionarian excelentes estaciones.

Parece que las observaciones nocturnas dan por lo regular resultados mas acordes que las ejecutadas de dia. Es probable que sea así principalmente en nuestros climas intertropicales, porque la causa mas influente de incertidumbre en la direccion de las visuales proviene del movimiento vibratorio del aire, cuyas capas inferiores, calentadas desigualmente, dan lugar á corrientes que hacen ver trémulas las señales, y por lo cual se recomienda medir los ángulos en las primeras horas del dia ó hácia la caida de la tarde.

En todos casos las señales nocturnas no deben tener mas que el tamaño necesario para que se distingan con el telescopio del teodolito como un punto luminoso ó una estrella pequeña.

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO
COORDINACION DE CIENCIAS

CAPITULO V.

MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

43.—Al tratar de este mismo asunto en la Topografía se dió á conocer el teodolito y se explicó detenidamente su manejo y la manera de practicar sus diversas rectificaciones. A lo que se dijo entónces solo debe agregarse que los instrumentos que se usan en la Geodesia son de mayores dimensiones, de graduacion mas delicada y de telescopios mas poderosos. Un teodolito cuyo limbo tenga de 0^m30 á 0^m40 de diámetro es suficiente para las triangulaciones mas esmeradas por lo tocante á la exactitud que puede proporcionar en la lectura de las divisiones; pero lo que es de la mayor importancia y debe fijar mas la atencion del ingeniero es el poder y la claridad de los telescopios, sin lo cual no es posible formar grandes triángulos como conviene á la velocidad de los trabajos, á la economía de gastos y de tiempo y á la precision de los resultados.

Se recordará que el principio de la repeticion, aplicado á los instrumentos angulares, tiene por principal objeto disminuir los errores de la graduacion; mas como últimamente ha llegado el arte de dividir á tan alto grado de perfeccion, han perdido los instrumentos repetidores gran parte de su importancia primitiva, y se usan en el dia instrumentos pórtátiles no repetidores, cuyos resultados en nada ceden á los que suministran los primeros. Los ingenieros franceses son partidarios del teodolito, alegando en su favor todas las ventajas teóricas del principio de la repeticion; miéntras que los geógra-

fos ingleses y americanos dan la preferencia á los instrumentos no repetidores, fundados en la exactitud con que se ejecutan hoy las divisiones, y sobre todo, en la mayor estabilidad y solidez de estos últimos, que no necesitan la complicacion de movimientos y todo el juego de tornillos que el teodolito. Sin intentar decidir esta cuestion, solo asentarémos como un hecho que en los observatorios astronómicos y para toda clase de operaciones delicadas que demandan firmeza en los aparatos, no se emplean actualmente instrumentos repetidores.

Describirémos el *altazimut* llamado tambien *universal*, que puede tomarse por tipo de los instrumentos no repetidores, y cuya importancia no es menor para las operaciones astronómicas que para las geodésicas. El altazimut (fig. 13ª) consiste en un círculo azimutal dividido G, G' firmemente unido á un tripié provisto de tornillos T, T' para nivelar. En el centro de este círculo se eleva un eje ligeramente cónico que sostiene otro círculo A concéntrico al primero, sobre el cual gira libremente, y cuyo movimiento puede paralizarse con un tornillo de presion que fija el círculo superior al inferior. El tornillo de aproximacion permite, sin embargo, comunicar pequeños movimientos al círculo ó placa superior. Esta última es la que sostiene todo el resto del instrumento por medio de dos fuertes columnas B, B' en cuya extremidad superior están los apoyos en que descansa el eje horizontal del telescopio. El círculo vertical está invariablemente unido al telescopio, y se compone de dos limbos reunidos entre sí por pequeñas y numerosas columnas metálicas, que proporcionan la firmeza necesaria sin aumentar mucho el peso del aparato. Uno de estos círculos es el que lleva la graduacion, y constituye al limbo vertical propiamente dicho.

El instrumento tiene tres niveles: uno fijo en el círculo azimutal; otro colocado paralelamente al círculo vertical y sostenido por las piezas C, C' en cuyas extremidades hay dos microscopios D, D' destinados á apreciar las fracciones de la graduacion, como verémos despues; y el tercero, es un nivel movible que puede colocarse sobre el eje horizontal del telescopio para establecer su perfecta horizontalidad. En cada una de las columnas B, B' está tambien fijo un microscopio que tiene por objeto la lectura y aproximacion de las divisiones del círculo azimutal.

Este limbo está numerado desde 0° hasta 360°; pero el círculo

vertical lo está por cuadrantes numerados á continuacion uno de otro desde 0° hasta 90°; disposicion que, segun dijimos (Tomo I, pág. 425), permite obtener distancias zenitales en una posicion del instrumento, y alturas en la posicion inversa.

De esta rápida descripcion se deduce que son dos los movimientos generales del altazimut: el primero al derredor del eje vertical, hace girar la placa superior del círculo azimutal, y por consiguiente á todo el instrumento. El segundo se verifica al derredor del eje horizontal del telescopio y hace girar solamente al círculo ó limbo vertical con el telescopio unido á él. Ambos movimientos permiten dar una revolucion entera á los círculos al derredor de sus ejes respectivos.

La retícula del telescopio consta de cinco hilos horizontales y cinco verticales equidistantes, cuyo uso mas bien que á la Geodesia pertenece á la Astronomía; porque el altazimut se aplica á las mismas observaciones celestes que el instrumento astronómico llamado *telescopio de tránsitos*. En las operaciones geodésicas se toman los ángulos sirviéndose del punto de interseccion de los dos hilos centrales, vertical y horizontal, que es el que debe colocarse en el eje óptico, lo mismo que sucede en el teodolito comun.

44.—Antes de exponer las rectificaciones del altazimut, describiré los microscopios micrométricos que sirven para hacer las lecturas angulares tanto en el círculo vertical como en el horizontal, y que remplazan ventajosamente al vernier. Se ha dado ya una idea de estos aparatos (Tom. I, pág. 272) al hablar de la estadia; pero no será inútil recordar aquí su mecanismo.

En frente de la graduacion de los limbos vertical y azimutal están firmemente colocados dos ó mas microscopios NN' (fig. 14ª) sostenidos por la pieza P que los une á las columnas verticales del altazimut. Dos tuercas g y g' los fijan á esta pieza, teniendo por tornillo una parte del tubo mismo del microscopio, y sirven para variar la distancia de este á la graduacion. En el cuerpo del tubo hay otra pieza rectangular q, en cuyo interior y en coincidencia con el foco comun del objetivo h y del ocular d, se halla el micrómetro, cuyo corte está representado aparte en el rectángulo FE, que manifiesta tambien la apariencia del campo del instrumento, tal como se ve al través del ocular d, con algunas divisiones a, b, c del limbo graduado, amplificadas por el microscopio. Unida á la armadura ó tubo

del aparato hay una pequeña lámina metálica *B C* una de cuyas orillas está cortada en forma de sierra. En la pieza rectangular *E F*, fija tambien al tubo, y que contiene todo el mecanismo micrométrico, se mueve otro rectángulo de metal *G H*, cuyos lados mayores están en contacto con la caja *E F* y á los que va unido un hilo muy delgado *m n*, el cual por el movimiento de la pieza *G H* puede ponerse en coincidencia con cualquiera de las divisiones *a*, *b*, *c* del limbo. El movimiento se le comunica desde el exterior por medio de un tornillo muy fino *K L*, que se atornilla en el rectángulo *G H*. Estando fijo este tornillo á la caja *E F*, es claro que al girar obliga al rectángulo interior *G H* á moverse á lo largo de la misma caja, contribuyendo á hacer suave y uniforme este movimiento los dos resortes *G* y *J* colocados entre las dos piezas. Al tornillo micrométrico está unido un círculo graduado *M*, y en la caja va fija la pequeña lámina *F*, la cual tiene grabada una línea que sirve de índice con el que van coincidiendo las divisiones de la cabeza *M* del tornillo cuando este gira. El tornillo y la sierra *B C* están construidos de manera que al dar aquel una vuelta completa, el hilo *m n* recorre precisamente el espacio que hay de un diente á otro de la sierra, en cuyo medio está el *cero* ó punto de partida, que por lo comun se indica con un círculo pequeño como lo representa la figura.

Para comprender el uso del micrómetro, supongamos que estando el índice *F* en coincidencia con el cero del círculo *M*, tambien esté el hilo *m n* coincidiendo con el cero de la sierra. Si en este estado de cosas se quiere medir el espacio comprendido entre este último punto y la imágen *a* de una de las divisiones del limbo, no habrá mas que mover el tornillo hasta que el hilo coincida exactamente con la division *a*, y entónces el número de vueltas enteras del micrómetro y la fraccion de vuelta darán la medida del espacio que se busca. El número de revoluciones enteras quedará indicado por los dientes de la sierra, y la fraccion por la division del círculo *M* que coincida con el índice *F*. Si, pues, hay algun medio de averiguar el valor angular de una revolucion del tornillo, y en consecuencia el de una division de su cabeza *M*, podrémos apreciar en medidas angulares con este instrumento los espacios mas pequeños del limbo.

El valor de una revolucion del micrómetro se determina haciendo coincidir el hilo sucesivamente con dos divisiones contiguas *b* y *c* del limbo, y contando el número *N* de vueltas que ha sido necesario dar

al tornillo para pasar de una posicion á la otra. Si llamamos D el valor angular de cada division del limbo, el del micrómetro será:

$$v = \frac{D}{N} \quad \ldots\ldots (1)$$

Por lo regular en los instrumentos que tienen micrómetros, está dividido el grado en 12 partes, por lo que $D = 5' = 300''$, y el tornillo está construido de manera que dé exactamente 5 vueltas en el espacio de dos divisiones consecutivas, de lo cual resulta..... $v = 1' = 60''$. Ademas de esto, la cabeza del micrómetro tiene 60 divisiones, de donde se deduce que cada division vale $1''$, cantidad que constituye en tal caso la aproximacion que da directamente el instrumento, aunque por apreciacion pueden estimarse medias divisiones, ó sea espacios angulares de $0.''5$.

Al ajustar las diversas partes del aparato micrométrico, puede hacerse de manera que el índice exterior F señale el cero de las divisiones del círculo M, siempre que el hilo coincida con el cero de la sierra, y en general con cualquiera de los intervalos de sus dientes, cada uno de los cuales representa una revolucion del tornillo, segun se ha dicho; pero se comprenderá fácilmente que no es indispensable esa precision en el ajuste, si se hace la lectura del micrómetro que corresponda á la coincidencia del hilo con el cero de la sierra; porque entónces esta lectura se considerará como error inicial del instrumento que se llevará en cuenta para aplicarlo como correccion á cualquiera otra lectura. En general, la diferencia algebraica de dos lecturas del micrómetro mide el espacio que ha recorrido el hilo para trasladarse de una á otra de las dos posiciones en que aquellas se hayan hecho.

De las explicaciones precedentes se deduce que el microscopio micrométrico sirve para medir las pequeñas fracciones de la graduacion del limbo. En cuanto á las divisiones enteras, se aprecian por medio de un índice colocado cerca de la graduacion, y en el plano que pasa por el eje óptico del microscopio y el cero de la sierra. Para obtener, pues, la indicacion completa que corresponda á una posicion determinada de los círculos del altazimut, se leen por el exterior con un lente comun los grados y las divisiones enteras de $5'$, aplicando en seguida la vista al microscopio y haciendo mover el tornillo, en el sentido de la numeracion de su cabeza, hasta que

el hilo coincida con la division mas inmediata al cero de la sierra. La lectura que se obtenga, corregida por el error inicial si lo hubiere, se añade á la de los grados y divisiones enteras de 5′, siendo la suma la indicacion correspondiente á la posicion del círculo.

45.—Las rectificaciones de los microscopios micrométricos consisten en hacer de manera que se vean con igual claridad en el foco del objetivo el hilo y las imágenes de las divisiones del limbo; así como que cinco revoluciones del tornillo hagan trasladar exactamente al primero de una division á otra del segundo. Para practicar la primera rectificacion se saca el ocular *d* hasta que se vea con entera precision el hilo, y si entónces se ven igualmente bien definidas las divisiones, y no se nota que estas se muevan respecto de aquel cuando la vista se hace variar ligeramente de posicion, existe la condicion de que las imágenes de las divisiones se formen en el plano focal que contiene al hilo. Si por el contrario, cuando se ve el hilo con claridad, no sucede lo mismo con las divisiones, ó que al ménos cambien estas aparentemente de lugar respecto de aquel al mover un poco la vista hácia un lado ú otro del ocular, se tiene la prueba de que las imágenes no se forman en el plano focal que pasa por el hilo, y es preciso variar la distancia del microscopio al limbo aflojando uno de los tornillos *g* y apretando el otro. Despues de algunos tanteos se consigue la vision perfecta, tanto del hilo como de las divisiones sin movimiento relativo aparente, y entónces se afirman los tornillos *g* para que no se altere de nuevo la distancia. Para comprobar la segunda condicion se mueve el tornillo micrométrico de una division á otra, y si las dos lecturas que se obtienen dan exactamente 5 revoluciones enteras por diferencia, existe el perfecto ajuste del micrómetro; pero si no sucede así, es á causa de que la imágen del espacio comprendido entre las divisiones es demasiado pequeña ó demasiado grande. Si para pasar de una línea á la inmediata ha sido preciso dar al tornillo mas de cinco revoluciones, las imágenes son demasiado grandes; y en el caso contrario, demasiado pequeñas. Cuando se verifica lo primero, se hará la correccion alejando el objetivo *h* del plano del limbo, con cuyo fin se atornilla la rosca que lo une al tubo. Si la imágen es muy pequeña se acerca un poco el objetivo al limbo desatornillando la misma rosca. Hecha esta variacion la imágen ya no se formará en el plano del hilo, sino en un punto mas inmediato al objetivo ó mas distante de él, segun que este se haya alejado ó se

haya acercado al limbo; pero se reproducirá la vision perfecta volviendo á variar la distancia de todo el microscopio por medio de los tornillos g.

En general, es bastante difícil hacer con entera precision estas correcciones, y solo se consigue despues de diversos ensayos practicados con mucho esmero. Comunmente los fabricantes arreglan con bastante cuidado las diversas partes del micrómetro, y á ménos de que hayan sufrido un desarreglo notable, es acaso preferible comprobar solamente la condicion relativa á la claridad de las imágenes, y determinar el error llamado *error de curso* del tornillo, á fin de llevarlo en cuenta para corregir las lecturas angulares, mas bien que intentar destruirlo completamente por medios mecánicos. Por otra parte, aun cuando llegue á nulificarse por lo pronto, no permanece mucho tiempo rectificado el instrumento, en razon de los pequeños movimientos que se producen, aunque no sea por otra causa mas que por los cambios de temperatura, que dilatan desigualmente las diversas partes del aparato.

46.—El error de curso se determina midiendo en revoluciones enteras y fracciones del micrómetro el espacio comprendido entre las divisiones. Sea N el número de revoluciones enteras que debian medir exactamente ese espacio, y $N \pm e$ el que las mide en realidad, siendo e una fraccion de revolucion. En tal caso la ecuacion (1) dará por valor angular del tornillo:

$$v' = \frac{D}{N \pm e} = \frac{D}{N\left(1 \pm \frac{e}{N}\right)} = \frac{D}{N}\left(1 \mp \frac{e}{N} + \frac{e^2}{N^2}\right)$$

Como se tiene $v = \frac{D}{N}$, resultará sustituyendo y estimando solo hasta la primera potencia de e, en atencion á que esta cantidad es siempre muy pequeña en un instrumento medianamente arreglado:

$$v' = v\left(1 \mp \frac{e}{N}\right)$$

Para tener la fraccion de vuelta e, sea n el número de divisiones de la cabeza del tornillo, y n' el número de ellas que sobran ó faltan á las N revoluciones enteras. Tendrémos $e = \frac{n'}{n}$, lo cual reduce la fórmula anterior á la siguiente:

$$v' = v\left(1 \mp \frac{n'}{Nn}\right) \quad \text{.....} \quad (2)$$

Si como sucede habitualmente, se tiene $D = 300''$, $N = 5$ y $n = 60$, resultará $v = 60''$, y en consecuencia:

$$v' = 60'' \mp 0.''2\, n' \qquad (3)$$

Supongamos, por ejemplo, que el espacio de 5′ del limbo se ha medido con cuatro revoluciones enteras, y 54 divisiones de la cabeza del micrómetro. El valor de cada revolucion seria, puesto que $n' = -6$:

$$v' = 60'' + 1.''2 = 61.''2$$

y cada division de la cabeza valdria: $d = \frac{v'}{60} = 1.''02$ próximamente, en lugar de 1″ que deberia valer si n' hubiese resultado nulo.

Tomemos por segundo ejemplo el caso en que se obtuviesen 5 revoluciones y 17 divisiones para medir el mismo espacio de 5′. Hallariamos:

$$v' = 60'' - 3.''4 = 56.''6$$

valiendo, por consiguiente, 0.″9433 en vez de 1,″ cada division del círculo micrométrico.

Para determinar bien el valor angular del micrómetro es preciso repetir muchas veces la medida de las divisiones del limbo tanto de *b* hácia *c* como en el sentido contrario, y presentando en el campo micrométrico diversas partes del limbo con el objeto de independer el resultado de los pequeños errores de la observacion y de la graduacion.

En los micrómetros sucede casi siempre que al comenzar á mover el tornillo en una direccion contraria á aquella en que se habia movido ántes, pasan algunas divisiones de su cabeza frente al índice sin que el hilo comience á moverse; y esto sucede á causa de la existencia de un *punto muerto*, ó sea una falta de ajuste exacto entre el tornillo y la tuerca, que deja el primero un pequeño juego en la segunda. Supongamos que *atornillando* el micrómetro se mueva el hilo de *b* haciendo *a* (fig. 15ª), y que en este movimiento las divisiones de su cabeza vayan pasando por el índice en el órden creciente de su numeracion. Si partiendo de *b* hacemos coincidir el hilo con la línea *a*, leemos *d* divisiones. Continuando el movimiento en el

mismo sentido podrémos llevar el hilo hasta una posicion cualquiera a', y si entónces *desatornillamos* el micrómetro para hacer retroceder al hilo, al volver este á coincidir con la línea a ya no señalará d divisiones, sino $d - u$, siendo u las divisiones que han pasado por el índice ántes de que comience á moverse el hilo. He notado que u es sensiblemente constante para cada micrómetro, y que á veces llega hasta 8 ó 10 divisiones. Por consiguiente, para eliminar el error que de esto puede originarse, lo que debe hacerse es medir los espacios angulares siempre atornillando ó siempre desatornillando el micrómetro, sin comparar nunca las lecturas que se hayan obtenido por medio de su movimiento en direcciones opuestas. Así, en el primer caso, para medir el espacio $a\,b$, se partirá de b', un poco ántes de b, y se llevará el hilo sucesivamente á b y á a leyendo las indicaciones que corresponden á las dos posiciones, cuya diferencia da el espacio $a\,b$ libre del error u. Si por el contrario, quiere medirse $a\,b$ desatornillando el micrómetro, se parte de una posicion a' mas avanzada que a para llevar el hilo á a y en seguida á b. Los mismos procedimienios deben seguirse para determinar el valor angular de las revoluciones micrométricas.

Conocido así el valor angular del micrómetro, un espacio que se hubiera medido por r revoluciones enteras y d divisiones, seria en segundos:

$$e = r\,v' + \tfrac{1}{60}\,d\,v' = v'\,(r + \tfrac{1}{60}\,d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

No es preciso contar el número r de revoluciones en la cabeza del tornillo, puesto que es igual al de dientes de la sierra que haya recorrido el hilo: basta solo anotar el punto de partida en el índice y ver la posicion del hilo al comenzar y al terminar el movimiento.

Con el fin de facilitar la inteligencia del uso del micrómetro, he supuesto que es uno solo el hilo que se mueve con el tornillo, y esta disposicion es realmente la que se adopta en los micrómetros colocados á veces en los oculares de los telescopios para medir, dentro de su campo, pequeños espacios angulares; pero por lo comun en los microscopios destinados á la apreciacion de las fracciones de un limbo graduado, el tornillo micrométrico hace mover dos hilos que se cortan en ángulo agudo hácia el centro del campo, y las coincidencias se establecen haciendo de manera que las divisiones del limbo bisequen el ángulo de los hilos. La biseccion, en efecto, se aprecia con

mas precision que la simple superposicion de un solo hilo á la imágen de las divisiones. Se comprende que esta diversa disposicion no constituye una diferencia real en la teoría y el uso del micrómetro.

47.—Ocupémonos ahora de las rectificaciones del altazimut. Este instrumento debe reunir las condiciones siguientes. 1ª El eje del círculo azimutal á cuyo derredor se mueve la parte superior del aparato, debe ser perfectamente vertical: 2ª El eje del círculo vertical y del telescopio debe ser horizontal. 3ª Los micrómetros del círculo vertical deben estar á la altura necesaria para que correspondan á los extremos de uno de sus diámetros. 4ª Los hilos de la retícula deben ser verticales los unos y horizontales los otros. 5ª La línea de colimacion del telescopio debe ser perpendicular á su eje de rotacion.

Para examinar la primera condicion se hace uso del nivel fijo en el círculo azimutal, ó mejor aún, del que es paralelo al circulo vertical; porque generalmente este es mas sensible que aquel. Muévase el instrumento en azimut hasta que el nivel quede colocado en la direccion de dos de los tornillos del tripié, y por el movimiento simultáneo de estos, llévese la burbuja al medio del tubo de modo que sus dos extremidades señalen divisiones iguales. En seguida hágase girar el instrumento 180° al derredor de su mismo eje vertical, y si se ha desviado la burbuja, vuélvase á conducir al centro dividiendo la correccion en dos partes iguales, de las que una se hace por medio de los dos tornillos del tripié, y la otra subiendo ó bajando uno de los extremos del nivel con los tornillos de que al efecto está provisto. Si se ha practicado bien la correccion, y si ademas el eje no está muy inclinado en una direccion perpendiculnr á la de los dos tornillos, deberá permanecer la burbuja en el medio del tubo al llevar el instrumento á su primera posicion. Si no sucede así, se vuelve á hacer la correccion, siempre por mitad, con los tornillos del tripié y con el del nivel mismo, repitiendo la operacion cuantas veces sea necesario hasta que en las dos posiciones opuestas y paralelas del círculo vertical, permanezca la burbuja en el centro del nivel.

En seguida se hace girar el instrumento 90° en azimut respecto de la posicion que ocupaba, quedando por consiguiente el nivel en una direccion paralela á la del tercer tornillo, con el cual se hace la correccion en caso de que la burbuja se desvíe. En esta nueva posicion no deben ya tocarse los tornillos del nivel, pues este ha quedado corregido en la operacion precedente, y toda la desviacion de la

burbuja proviene de la inclinacion del eje vertical hácia el tercer tornillo del tripié.

Cuando al comenzar la rectificacion de que me ocupo, el eje vertical está muy inclinado en una direccion perpendicular á la de los dos tornillos del pié con los cuales se principia, es en general muy dilatada la correccion del nivel, á ménos que se pase de una posicion á la opuesta midiendo exactamente los 180° con la graduacion del círculo azimutal. Por esta razon es preferible establecer primero la verticalidad del eje de un modo aproximativo, y corregir despues el pequeño error que aun pueda existir. Para ello se hace de manera que en las dos primeras posiciones opuestas no se aleje mucho la burbuja del centro del tubo, corrigiendo su desviacion por partes iguales, como se ha dicho; y en seguida, ántes de acabar de arreglar el nivel, se lleva á la posicion perpendicular á la que ocupaba, con el objeto de destruir en su mayor parte la inclinacion del eje por medio del tercer tornillo. De este modo son ya pequeños el error de verticalidad y el del nivel, y puede volverse á comenzar la operacion ejecutando las correcciones con mas esmero, hasta conseguir que no solo en las dos posiciones rectangulares, sino en cualquiera otra intermedia, dén sensiblemente la misma indicacion ambos extremos de la burbuja. Tambien puede abreviarse mucho la operacion ejecutándola primero aproximadamente con el nivel fijo al círculo azimutal, el que siempre es ménos sensible que el paralelo al limbo vertical; y despues de reducir así á una pequeña cantidad la inclinacion del eje, se acaba de establecer su verticalidad con este último nivel, corrigiéndolo al mismo tiempo.

Para hacer perfectamente horizontal el eje á cuyo derredor se mueve el telescopio con el círculo vertical, se hace uso del nivel movible que se mencionó al principio y que generalmente se llama nivel *montante*. Este se apoya por medio de los piés de igual longitud de que está provisto, sobre los extremos del eje del telescopio, debiendo hacerse pasar entre dos de los radios del círculo vertical, con cuyo fin se inclina el anteojo lo que sea necesario. Si la burbuja se desvía del centro del tubo, se conduce á él subiendo ó bajando uno de los apoyos del eje, que tiene sus tornillos propios para este objeto. En seguida, sin tocar el instrumento, se invierte el nivel, de manera que el pié que se apoyaba en el extremo del eje que estaba á la derecha, pase á apoyarse en el extremo izquierdo y vice versa.

Generalmente la burbuja quedará desviada del medio del tubo en su nueva posicion; mas como esta desviacion indica que no son exactamente iguales los dos piés del nivel, se aumentará ó se disminuirá la longitud de uno de ellos con los tornillos que tambien tiene al efecto, hasta que se haya corregido la mitad de la desviacion observada, haciendo desaparecer la otra mitad subiendo ó bajando, segun el caso, el apoyo en que descansa el extremo del eje del telescopio que se movió al principio.

Para cerciorarse de si se ha practicado ó no con exactitud la correccion, debe volverse á invertir el nivel, colocándolo en su posicion primitiva, y en caso de que todavía se note algun error, es á causa de que no se hizo bien la correccion por partes iguales. Para acabar de rectificar tanto el eje como el nivel, se destruye el error restante dividiéndolo siempre en dos partes iguales, una de las cuales se corrige modificando de nuevo la longitud del apoyo ó pié del nivel, y la otra volviendo á subir ó bajar el apoyo de una de las extremidades del eje. Se habrá conseguido la correccion completa cuando en las dos posiciones inversas del nivel permanezca la burbuja en el medio del tubo, esto es, indicando sus dos extremos iguales guarismos de la escala.

La prueba de que tanto esta rectificacion como la de la verticalidad del eje del círculo azimutal, se han practicado con toda exactitud, consistirá en hacer mover todo el instrumento al derredor de este eje, debiendo señalar la burbuja las mismas lecturas en todo el curso del movimiento.

La tercera rectificacion tiene por objeto establecer los dos micrómetros en los extremos de un diámetro del círculo vertical. Si los micrómetros mismos son susceptibles de movimiento, se les comunica este hasta que en cualquiera posicion del círculo sean iguales las lecturas hechas con los dos microscopios. En el caso contrario será preciso subir ó bajar el círculo hasta que su centro se coloque en la línea de los micrómetros. Como tal movimiento solo puede trasmitirse por medio de los tornillos que suben ó bajan los apoyos del eje horizontal del telescopio, y al hacerlo así se destruiria su horizontalidad, lo que debe procurarse es subir ó bajar por igual los dos apoyos, para lo cual se practica esta correccion teniendo colocado el nivel montante sobre los extremos del eje, á fin de que las indicaciones de la burbuja puedan dar á conocer la igualdad del movimiento de este.

Es mas importante la horizontalidad del eje de rotacion del telescopio que la colocacion exacta de los micrómetros, por lo cual si para conseguir esta última condicion se temiese alterar notablemente la primera, no hay inconveniente en dejar algo erróneos los microscopios; porque su principal objeto es independer los ángulos que se midan del error de exentricidad del círculo, por medio de una doble lectura, y esto notoriamente se consigue aun cuando no se hallen precisamente en los extremos de un diámetro.

La retícula del telescopio consta de dos sistemas de hilos perpendiculares entre sí por construccion. En consecuencia, si uno de esos sistemas se pone exactamente vertical, el otro quedará horizontal y vice versa. Esta rectificacion se hace, pues, de dos maneras: si se dirige el telescopio á un objeto distante y se pone en coincidencia con alguno de los hilos horizontales, deberá dicho objeto ser cortado por el hilo durante el movimiento que se comunique al altazimut al derredor de su eje vertical, por medio del tornillo de aproximacion correspondiente al círculo azimutal. Si se prefiere hacer uso de los hilos verticales, se practica la misma operacion valiéndose de la rotacion del telescopio al derredor de su eje horizontal. En lugar de un objeto distante, puede servirse el observador de la retícula de otro instrumento cualquiera usado como colimador, segun se dijo en la página 432 del Tomo I.

Réstanos indicar la manera de corregir el error de colimacion de la retícula. Esta rectificacion se practica tambien visando un objeto distante ó la retícula de un colimador. Si el telescopio del altazimut es susceptible de invertirse sobre sus apoyos, despues de hacer coincidir con el punto lejano ó con el colimador la interseccion de los hilos centrales de la retícula, se levanta cuidadosamente de sus apoyos y se invierte. En caso de que en su nueva posicion, y vuelto á dirigir á la señal, no quede esta cortada por el hilo vertical del centro, se corrige la mitad de la desviacion con los tornillos de la retícula, y la otra mitad por el movimiento general del instrumento en azimut, con el fin de repetir la prueba hasta que en las dos posiciones inversas del eje pase el hilo vertical por el punto observado.

Es preferible adoptar otro método de corregir la colimacion que no tiene como el anterior el inconveniente de ocasionar á veces pequeños movimientos en el instrumento al hacer la inversion, sobre todo, cuando el telescopio y el círculo son algo pesados. Consiste

este en invertir el telescopio sin moverlo de sus apoyos, valiéndose de una semi-revolucion de los dos círculos vertical y horizontal al derredor de sus respectivos ejes. Despues de establecida la coincidencia de la señal con la interseccion de los hilos centrales, se lee la indicacion del círculo azimutal tomando el término medio de las lecturas de sus micrómetros. En seguida se hace girar el instrumento 180° al derredor de su eje ó columna vertical, fijando el círculo azimutal en la posicion en que los micrómetros señalen exactamente $180° + a$, designando por a la primera lectura. Entónces se vuelve á dirigir el telescopio á la señal por medio de su movimiento al derredor del eje horizontal, y si no la corta el hilo del centro, es porque existe el error de colimacion, cuyo valor es la mitad de la desviacion que se observe, la cual puede destruirse como ántes se ha dicho, á saber: por el movimiento de la retícula cuyo hilo central se colocará á la mitad de la distancia que lo separa aparentemente del objeto. La operacion debe repetirse hasta nulificar sensiblemente el error.

La objecion que podria hacerse al método precedente es la de que es preciso confiar en la exactitud de las divisiones, y esto en puntos del limbo diametralmente opuestos. En efecto, si las divisiones correspondientes á las lecturas no distan exactamente 180°, todo su error se combina con el de la colimacion, puesto que aquella condicion es precisamente la base del método; pero tal error, en caso de que exista, es indudablemente muy pequeño en los instrumentos de precision. Por otra parte, es posible eliminar el error de la semicircunferencia valiéndose de dos colimadores opuestos de la manera siguiente. Se pone en coincidencia el hilo central del altazimut con la interseccion de los hilos de un colimador lo mismo que en el primer procedimiento. Para facilitar la inteligencia del método, supongamos que el colimador haya quedado al Norte del altazimut, y que se trata de colocar al Sur del mismo instrumento el otro colimador de tal manera que su eje óptico se halle en la prolongacion, ó por mejor decir, en la misma direccion que el del primero. Como no podria practicarse esta operacion por la interposicion del altazimut entre ambos colimadores, se quita el telescopio de sus apoyos, y entónces ya se podrá establecer la coincidencia de la retícula del colimador del Sur con la del que ha quedado fijo en el Norte. Luego que esto se ha conseguido, la direccion de sus dos ejes ópticos es

la misma y sus retículas pueden considerarse como dos puntos infinitamente distantes entre sí, y que difieren exactamente 180° en azimut. Si, pues, se restablece el telescopio del altazimut en sus apoyos, y despues de bien arreglados los niveles se vuelve á poner en coincidencia con el colimador del Norte, y en esa posicion se fija el círculo azimutal, la línea de colimacion se habrá establecido en la direccion de los ejes ópticos de los colimadores. En consecuencia, si se lleva en seguida el telescopio hácia el colimador del Sur, valiéndose de su movimiento al derredor del eje horizontal, deberá cortar la interseccion de los hilos de este, en el caso de que sea nulo su error de colimacion. Si no se verifica así, la desviacion que se observe es doble de este error, y podrá destruirse moviendo la retícula hasta la mitad de ese espacio. Cuando se ha apreciado bien la mitad del espacio ó distancia de una retícula á otra, se hallará que volviendo á establecer la coincidencia por medio del tornillo de aproximacion del círculo azimutal, no queda error perceptible al volver á dirigir el instrumento hácia el primer colimador en virtud del movimiento del telescopio al derredor de su eje horizontal.

Corregida la colimacion del hilo vertical del centro, puede suceder que su interseccion con el horizontal no quede en la posicion necesaria para que las visuales dirigidas por ese punto resulten paralelas á la línea de los ceros del círculo vertical, y en tal caso existe una especie de colimacion en el sentido vertical. Este error, sin embargo, no tiene importancia alguna en la medida de los ángulos horizontales, y se elimina completamente en la de los verticales observándolos en las dos posiciones del círculo, segun se dijo en el número 243 de la Topografía, en donde tambien expuse el modo de determinar su magnitud para aplicarlo como correccion en el caso de observar las distancias zenitales en una sola posicion del círculo. Es igualmente posible hacerlo desaparecer moviendo la retícula en la direccion vertical hasta que el punto de interseccion coincida con la señal observada, al mismo tiempo que los micrómetros indiquen la distancia zenital verdadera obtenida por la doble observacion. La retícula de un colimador puede servir con ese objeto mejor que una señal distante, como verémos al tratar de las observaciones astronómicas.

Por la descripcion del altazimut y de sus rectificaciones, habrá tenido ocasion de notar el lector la gran semejanza de este instru-

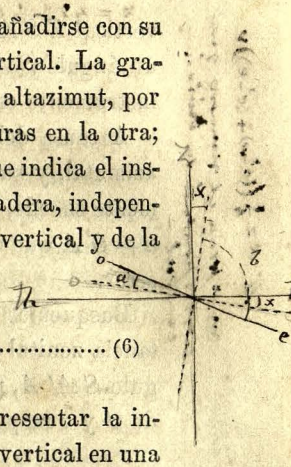
mento con el teodolito, del que solo difiere esencialmente en no ser repetidor. Hay, sin embargo, instrumentos pequeños cuya construccion participa á la vez de la del teodolito y del altazimut. Ultimamente se han construido para el Gobierno mexicano en la fábrica de Troughton & Simms algunos teodolitos, que aunque repetidores y con vernieres en lugar de micrómetros, tienen la misma disposicion que el altazimut en cuanto á la numeracion del círculo vertical, el movimiento completo del telescopio al derredor de su eje, la colocacion de los niveles, &c. Estos instrumentos cuyos círculos vertical y horizontal tienen unos 0^m26 de diámetro, y que dan una aproximacion de $10''$, ofrecen la ventaja de ser muy portátiles, y en manos expertas, bastante exactos para la ejecucion de muchas operaciones geodésicas y astronómicas.

48.—En lo que precede he indicado los procedimientos teóricos para nulificar los errores instrumentales; pero en la práctica es casi imposible conseguirlo por completo, y sobre todo, poder confiar en la permanencia de las rectificaciones. Sin hacer referencia á los niveles, cuyo estado naturalmente varia cada vez que se establece el instrumento en una estacion, y que en consecuencia demanda un continuo exámen, todas las demas correcciones están mas ó ménos sujetas á alteracion. Por esta causa lo que únicamente debe procurarse es reducir al menor valor posible todos los errores por los medios que se han enseñado, y determinar en seguida sus pequeñas magnitudes con el fin de llevarlos en cuenta como correcciones al practicar una operacion. Así, por ejemplo, al exponer la teoría de los niveles (Tom. 1º, pág. 409) vimos que siendo v el valor angular de sus divisiones, o y e las indicaciones de los extremos de la burbuja en la primera posicion, y o' y e' las que se obtienen hácia los mismos lados despues de invertir el nivel, la inclinacion que este señala es en segundos:

$$x = \tfrac{1}{4} v \left((o + o') - (e + e')\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

En el altazimut el nivel que es paralelo al círculo vertical da á conocer por la fórmula precedente la inclinacion del eje ó columna vertical á cuyo derredor se mueve el instrumento. Si convenimos en que o y o' representen las indicaciones del extremo *ocular* de la burbuja y e y e' las del extremo que queda hácia el *objetivo*, el valor de x resultará positivo cuando la columna del instrumento se incline

hácia el objeto observado; y en consecuencia deberá añadirse con su signo á las distancias zenitales que dé el círculo vertical. La graduacion de este está numerada por cuadrantes en el altazimut, por lo cual da distancias zenitales en una posicion y alturas en la otra; y así es que designando por b la distancia zenital que indica el instrumento y por a la altura, la distancia zenital verdadera, independiente á la vez del error de colimacion en el sentido vertical y de la inclinacion del eje será: (Topografía, pág. 429).



$$z = 45^\circ + \tfrac{1}{2}(b - a) + x \quad \ldots\ldots (6)$$

$$x = \tfrac{1}{4} v\,((o + o') - (e + e'))$$

Debemos advertir que la cantidad x puede no representar la inclinacion absoluta del eje, el cual acaso se desvíe de la vertical en una direccion diferente á la del objeto que se observa; pero como x representa de todas maneras el efecto de esta inclinacion en el plano vertical que pasa por el objeto, su valor es el que importa introducir como correccion en la fórmula anterior. Es evidente que el efecto de esta inclinacion de la columna no tiene influencia alguna en la medida de los ángulos horizontales, puesto que se verifica en el plano vertical que pasa por el objeto observado.

49.—La misma ecuacion (5) servirá para calcular el pequeño ángulo que forma con el horizonte el eje horizontal del telescopio, sustituyendo en ella las indicaciones del nivel montante. En este caso convengamos en representar por o y o' las lecturas del extremo de la burbuja que quedan á la izquierda del observador, y por e y e' las de la derecha; entónces x resultará positivo cuando la extremidad izquierda del eje esté mas elevada que la derecha, ó lo que es lo mismo, cuando el zenit del instrumento quede á la derecha del observador respecto del zenit verdadero.

Para distinguir el error del eje horizontal del que corresponde á la columna vertical del instrumento, designemos por d el primero, aunque calculado por la misma fórmula (5), é investiguemos su influencia en la medida de los ángulos verticales y horizontales. Sea Z (fig. 16ª) el zenit verdadero del observador, Z' el que señala el instrumento en virtud del error de horizontalidad d del eje del telescopio, y S la señal que se observa. Al visar este objeto, el círculo vertical del instrumento trazará en la esfera celeste el plano inclinado $Z'\,S\,A'$, miéntras que si no existiera el error trazaria el plano

vertical ZSA. En consecuencia, el primero forma con el horizonte un ángulo $SA'A = 90° - d$, y la distancia zenital que mide el instrumento es $z' = Z'S$, debiendo medir $z = ZS$.

A causa del mismo error, si suponemos en O el cero del círculo azimutal, y su graduacion de izquierda á derecha, como generalmente sucede, la lectura que se obtenga será $a' = OA'$, en vez de $a = OA$ que deberia corresponder á la visual sin la existencia del error.

Busquemos en primer lugar la correccion c que debe sufrir la distancia zenital observada z' para obtener la verdadera z. En el triángulo $SA'A$, puesto que SA' y SA representan los complementos de z' y z respectivamente, tendrémos:

$$\cos. z = \cos. z' \cos. d$$

Mas como he supuesto $z = z' + c$, la ecuacion anterior podrá escribirse así:

$$\cos. z' \cos. c - \text{sen. } z' \text{ sen. } c = \cos. z' \cos. d$$

la cual desde luego indica que para $z' = 0$, se tiene $c = d$; luego en el zenit la correccion es de la misma magnitud que el error del eje. Para $z' = 90$, resulta $c = 0$, ó lo que es lo mismo, que la inclinacion del eje horizontal no influye en las alturas de los objetos situados en el horizonte. Para hallar la pequeña correccion que corresponde á las distancias zenitales comprendidas entre esos límites, sustituyamos por cos. d su valor $1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} d$, y se hallará fácilmente:

$$2 \cos. z' \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} c + \text{sen. } c \text{ sen. } z' = 2 \cos. z' \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} d$$

Como solamente en el zenit se tiene $c = d$, y el error del eje es siempre muy pequeño, sustituyamos por sen. c el valor del arco en segundos, omitiendo el término de segundo órden para obtener:

$$c = \frac{2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} d \cot. z'}{\text{sen. } 1''}$$

A causa de la misma pequeñez de d tampoco hay inconveniente en tomar el arco por su seno; y entónces resulta con la exactitud necesaria:

$$c = \tfrac{1}{2} d^2 \cot. z' \text{ sen. } 1'' \quad \ldots\ldots (7)$$

$$z = z' + c$$

fórmula que permite corregir las distancias zenitales observadas en un plano ligeramente oblicuo respecto de la vertical. Nótese que para objetos situados cerca del horizonte, como lo están generalmente las señales geodésicas, el factor de d^2 es extremadamente pequeño; y por consiguiente basta nivelar el eje con alguna aproximacion para poder prescindir sin error de esta correccion al medir las distancias zenitales que entran como elementos en el cálculo de las diferencias de nivel de los puntos trigonométricos. Para $d = 10'$ y $z' = 80°$, que salen de los límites ordinarios en la práctica de la Geodesia, la correccion seria solamente $c = 0.''15$.

50.—De mucha mayor importancia es la influencia de este error en las lecturas del cícrulo azimutal. En efecto, el triángulo $S A A'$, en que el lado $A' A = a - a'$ mide el error cometido en el ángulo, se tiene:

$$\tan. (a - a') = \text{sen. } d \cot. z'$$

fórmula que indica la necesidad de nivelar con mucha exactitud el eje de rotacion, sobre todo, cuando se tiene que medir ángulos horizontales entre objetos muy elevados respecto del horizonte ó al ménos de altura muy desigual. Como de esa manera siempre es posible hacer que d sea pequeño, podrémos simplificar la expresion anterior, pues siendo z' bastante considerable no hay inconveniente en tomar los arcos por sus líneas trigonométricas para obtener:

$$a = a' + d \cot. z' \qquad (8)$$

que permite corregir las lecturas azimutales del error que produce la falta de horizontalidad del eje. Para $d = 60''$ y $z' = 80°$ resulta $a - a' = 10.''6$. Con el mismo valor de d, y $z' = 89°$, todavía excede de $1''$ el error $a - a'$; y en consecuencia es muy importante reducir el valor de d á unos cuantos segundos y llevarlo en cuenta para hacer las correcciones precedentes; porque de nada serviria una aproximacion de $1''$, ó acaso de ménos, en las lecturas del círculo azimutal, si se dejase subsistir un error que tal vez podria ser de algunos segundos.

Hay que advertir que al observar desde una estacion los ángulos horizontales, el error d determinado con el nivel montante es variable en cada direccion que se dé al telescopio, á ménos que sea perfecta-

mente vertical el eje del instrumento. El valor de d resulta, en efecto, de la combinacion de la falta de verticalidad de la columna con la falta de perpendicularidad entre esta y el eje de rotacion del telescopio; y por consiguiente aunque este último error sea constante en una revolucion azimutal del instumento, es necesariamente desigual el efecto de la inclinacion de la columna, en distintas direcciones.

De las consideraciones que preceden se deduce que para sacar todo el partido de que es susceptible un instrumento de precision, es indispensable nivelarlo muy bien y medir la inclinacion del eje horizontal en la posicion que toma al visar cada objeto. Entónces siendo a'_1 y a'_2 las lecturas que se obtengan en el círculo azimutal al observar las dos señales de la izquierda y de la derecha respectivamente; z'_1 y z'_2 sus distancias zenitales; y d_1 y d_2 las indicaciones correspondientes del nivel montante, el ángulo verdadero entre ellas será en general:

$$A = a'_2 - a'_1 + d_2 \cot. z'_2 - d_1 \cot. z'_1$$

Es claro que para efectuar las correcciones con suficiente exactitud basta tomar las distancias zenitales con aproximacion de $1'$ ó $2'$, lo cual puede hacerse anotando las indicaciones del círculo vertical cuando se visa cada una de las señales.

Debe notarse, sin embargo, que cuando se observa un mismo ángulo en las dos posiciones inversas, esto es, con el limbo vertical á la derecha y luego á la izquierda en virtud de una semirevolucion azimutal del instrumento, los errores d se presentarán con signos contrarios, puesto que el apoyo mas alto del eje horizontal queda sucesivamente á un lado y otro del observador. Segun esto, si la columna está exactamente vertical, los valores de d en la segunda posicion serán numéricamente iguales á los de la primera, produciendo por consiguiente en el ángulo una correccion igual y de distinto signo. De aquí se infiere que el promedio de los ángulos obtenidos en las dos posiciones inversas puede considerarse independiente de la falta de horizontalidad del eje, si es muy pequeña la inclinacion de la columna.

51.—Investiguemos ahora la influencia del pequeño error de colimacion que aun puede quedar despues de practicada la correccion como se ha dicho, y comencemos por determinar la magnitud de ese

pequeño error, que designaré por c expresado en segundos. Si se sigue el método de invertir el telescopio sobre sus apoyos, sea a la lectura del limbo cuando la señal que se observa ó la retícula del colimador coincide con el hilo vertical del centro. Si no existiera el error, la lectura exacta habria sido $e = a$, llamando e el verdadero valor del ángulo; cuando este error de colimacion existe:

$$e = a + c$$

Designando por a' la nueva lectura que se tiene cuando despues de invertido el eje se restablece la coincidencia, y atendiendo á que c produce un efecto contrario al de la primera posicion, resulta:

$$e = a' - c$$

Eliminando á e entre estas dos ecuaciones, se halla:

$$c = \tfrac{1}{2}(a' - a) \quad \ldots\ldots (9)$$

El signo que resulte del cálculo será el que corresponde á la primera posicion del instrumento. Supongamos, por ejemplo,..... $a = 24° 17' 31''$ y $a' = 24° 17' 25''$; con estos datos resulta: $c = -3.''0$ para la primera posicion y $c = +3.''0$ para la segunda.

Cuando se haya invertido el telescopio por medio de una semirevolucion azimutal, designando siempre por a y a' las dos lecturas que corresponden á las coincidencias, tendrémos que las indicaciones exactas serian:

$$e = a + c$$
$$180° + e = a' - c$$

y que por la eliminacion de e producen:

$$c = \tfrac{1}{2}(a' - a) - 90° \quad \ldots\ldots (10)$$

Si a' resulta menor que a es á causa de que en la media vuelta azimutal ha pasado ya el cero de la graduacion, y por tanto deben añadirse 360° á la segunda lectura, como en el ejemplo siguiente, en que se halló $a = 253° 41' 22.''7$, $a' = 73° 41' 18.''3$

$$\begin{aligned} 360° + a' &= 433° 41' 18.''3 \\ a &= 253\ 41\ 22.\ 7 \\ \hline 180° + \tfrac{1}{2}(a' - a) &= 89° 59' 57.''8 \\ -90 & \\ \hline c = & \quad -2.''2 \end{aligned}$$

Para la segunda posicion deberia tomarse $c = + 2.''2$

Finalmente, si se usan dos colimadores opuestos, se tiene como en el primer caso $c = \frac{1}{2}(a' - a)$, puesto que las lecturas se hacen en dos puntos de la graduacion cuya distancia angular es $2c$. Por todo lo que precede se ve que he supuesto positiva la colimacion cuando el hilo central de la retícula se desvía á la izquierda del eje óptico del telescopio, ó lo que es lo mismo, cuando la imágen invertida del objeto que se observa llega á la coincidencia con el hilo ántes de llegar al eje óptico al mover el telescopio de izquierda á derecha, órden en que supongo numerada la graduacion.

Puesto que c representa la distancia angular de la línea de colimacion al eje óptico, es claro que cuando se tenga horizontal el telescopio, el arco del horizonte comprendido entre aquellas dos líneas será precisamente igual á c. Esta pequeña distancia permanece sensiblemente horizontal á cualquiera altura en que se establezca el telescopio, de manera que las distancias zenitales de los objetos que se observen en la interseccion de los hilos serán las mismas que si se hubieran observado en la interseccion del hilo horizontal con el eje óptico. Segun esto, la colimacion del hilo vertical del centro no afecta de un modo perceptible la medida de los ángulos verticales.

52.—No sucede lo mismo en la medida do los ángulos azimutales, puesto que la distancia constante c abraza en la esfera arcos de amplitud creciente al paso que disminuyen las distancias zenitales de los objetos. En efecto, al girar el instrumento horizontalmente con el telescopio inclinado hácia una region de la esfera cuya distancia zenital sea z', describe la línea de colimacion una superficie cónica que tiene por base un círculo menor paralelo al horizonte y cuyo radio es el seno de la distancia zenital. Como las amplitudes de los arcos de igual extension son inversamente proporcionales á sus radios, tendrémos que los círculos verticales que pasan por el eje óptico y por la línea de colimacion, interceptarán en el horizonte el arco C que resulta de la proporcion sen. $z' : 1 :: c : C$, de la cual se obtiene:

$$C = \frac{c}{\text{sen. } z'} \qquad (11)$$

Esta fórmula da á conocer que la influencia del error de colimacion es muy grande cerca del zenit, y de ménos importancia cerca del horizonte, á causa de que sen. z' llega á su *maximum* en ese

plano. Cuando los objetos que se observan tienen poca altura el valor de C es casi constante, puesto que apenas difieren entre sí los senos de los ángulos muy próximos á 90°.

Tomando en cuenta el efecto de la colimacion, vemos que la expresion mas general del ángulo formado por dos señales, es:

$$A = a'_2 - a'_1 + (d_2 \cot. z'_2 - d_1 \cot. z'_1) + \left(\frac{1}{\text{sen. } z'_2} - \frac{1}{\text{sen. } z'_1}\right) c \ldots \quad (12)$$

en la que designo con índices numéricos los elementos que se refieren á los dos objetos, siendo a' la lectura angular del círculo azimutal, d la indicacion del nivel montante, e el error de colimacion y z' la distancia zenital aproximativa. Las lecturas a' se suponen ya corregidas por el error de curso de los micrómetros, si es que existe, las inclinaciones d se calculan por la fórmula (5) y la colimacion por la (9) ó la (10) segun el caso.

La ecuacion (12) indica que cuando se observe el mismo ángulo en las dos posiciones inversas del instrumento, la colimacion producirá efectos contrarios y numéricamente iguales, por lo cual el promedio de los dos resultados es independiente de este error. Lo mismo se verifica, segun dijimos, respecto de la correccion por el estado del nivel en el caso de ser la columna sensiblemente vertical; y esto se conoce desde luego por el nivel paralelo al círculo vertical, que debe dar la misma lectura en todo el curso de una revolucion, ó por el nivel montante que denunciará inclinaciones numéricamente iguales y de signos contrarios en las dos posiciones inversas del altazimut.

53.—Una vez bien comprendida la construccion del altazimut, nada de nuevo hay que añadir á lo que se dijo en la Topografía respecto del modo de medir los ángulos. La única diferencia consiste en que no siendo repetidor este instrumento, permanece fijo el limbo horizontal, y se dirigen las visuales valiéndose del movimiento general de su parte superior, que lleva consigo los micrómetros. Todas las instrucciones dadas allí son aplicables con mas razon á la Geodesia, cuyas operaciones deben ofrecer un tipo de precision, y que en consecuencia demandan todo género de precauciones que tiendan á garantizar la exactitud de los resultados.

La reduccion al centro de estacion, cuando sea preciso aplicarla, se calcula por las mismas fórmulas que expuse en el Tomo I, así

como la resolucion del problema de los tres vértices, &c., con las modificaciones que se indicarán en el Capítulo relativo á la resolucion de los triángulos geodésicos, y que se reducen á hacer las correcciones de los ángulos por el exceso esférico; pero los procedimientos del terreno son absolutamente iguales, y los mismos tambien los datos que deben tomarse para poder aplicar la resolucion correspondiente.

Los partidarios de los instrumentos repetidores atribuyen al teodolito, respecto del altazimut, la ventaja de prestarse á medir un mismo ángulo con distintas partes de la graduacion; pero atendiendo á la perfeccion á que ha llegado el arte de dividir, creo que esta ventaja no es por sí sola bastante grande para compensar la que proporciona la mayor exactitud que se alcanza con la sustitucion del micrómetro al vernier, y la condicion de estabilidad, que abogan en favor del altazimut. Por otra parte, se mide tambien con el altazimut el mismo ángulo en diversas partes de su limbo, haciendo uso de un tripié, llamado *repetidor*, cuya meseta es susceptible de movimiento al derredor de un eje vertical. De ese modo, terminada la medida del ángulo en la posicion que tenia el altazimut, se comunica un movimiento angular arbitrario á la meseta, á fin de que una nueva parte de la graduacion sirva para volver á medir el ángulo. No he tenido ocasion de emplear tripiés de esta clase; pero temo que con ellos se disminuya la firmeza del aparato, que es una de sus condiciones mas esenciales: y si se quiere dar mucha importancia á la ventaja de variar el arco del limbo que mide un ángulo, me pareceria preferible cambiar la posicion del altazimut mismo, lo cual solo demandaria un nuevo exámen de los niveles para volver á establecer la verticalidad y la horizontalidad de los ejes. Esta operacion es muy breve teniendo ya corregidos los niveles.

Midiendo ángulos con un altazimut, he seguido un método que, si no tiene la ventaja de que ántes se ha hablado, sí permite disminuir los pequeños errores de observacion, de graduacion y de lectura. Consiste en visar cada señal con cada uno de los 5 hilos verticales de la retícula en sus puntos de interseccion con el horizontal del centro. Para evitar confusion al aplicar este procedimiento, designaré con el nombre de posicion primera ó directa del instrumento aquella en que el círculo vertical mida distancias zenitales; y con el de posicion segunda ó inversa aquella en que mida alturas. La primera corresponde generalmente al caso en que el círculo vertical

queda á la derecha del observador. Asentado esto, admitamos que se haya asignado un número á cada hilo de izquierda á derecha, que es el órden que generalmente sigue la numeracion del limbo; y de esa manera, si se hace coincidir con el primer hilo la imágen invertida de una señal, se tiene una indicacion menor que si se hace coincidir con el segundo ó con cualquiera de los demas.

Supongamos ahora que al medir un ángulo se vise la señal de la izquierda con cada uno de los hilos en el órden de su numeracion, leyendo siempre los dos micrómetros del círculo horizontal, y sean a, b, c, d y e los cinco promedios obtenidos. Llamando m su medio aritmético, tendrémos:

$$m = \tfrac{1}{5}(a + b + c + d + e)$$

y podrá considerarse á m como la indicacion correspondiente á un hilo imaginario, que para distinguirlo del tercero ó central, llamaré *hilo medio*. Si los 5 hilos de la retícula fuesen exactamente equidistantes, y no hubiese error alguno de observacion ó de lectura, m deberia ser igual á c; pero no debiendo contarse en general con esa perfeccion, la indicacion m del hilo medio es digna de mas confianza que la simple lectura correspondiente al hilo central. Al llevar el telescopio á la segunda señal, hallarémos de una manera semejante:

$$m' = \tfrac{1}{5}(a' + b' + c' + d' + e')$$

y el ángulo que se busca tendrá por medida $m' - m$, en lugar de $c' - c$ que se hubiera obtenido con el tercer hilo solamente. Se ve que este procedimiento equivale á medir el ángulo en cada uno de los hilos, y á tomar el término medio, pues se tiene:

$$m' - m = \tfrac{1}{5}\left[(a' - a) + (b' - b) + (c' - c) + (d' - d) + (e' - e)\right]$$

Terminada la medida en la primera posicion, se pasa á la segunda ó inversa, en la cual los mismos hilos se presentan en órden contrario, esto es: el 5° como 1°, el 4° como 2°, &c. Designando con letras mayúsculas los resultados semejantes á los obtenidos en la primera posicion, tendrémos por valor del mismo ángulo:

$$M' - M = \tfrac{1}{5}\left[(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) + (D' - D) + (E' - E)\right]$$

y entónces el resultado definitivo será:

$$R = \tfrac{1}{2}\left((M' + m') - (M + m)\right)$$

El altazimut á que me he referido no tenia micrómetro en el círculo horizontal, sino tres vernieres distantes 120° uno de otro, de modo que para obtener los cuatro promedios que entran en la ecuacion precedente era preciso hacer 60 lecturas. Hay, pues, fundamento para creer que el resultado final queda libre de los pequeños errores accidentales de observacion, de lectura, de graduacion, &c. Aunque penoso si se quiere, es conveniente este método, porque proporciona tambien la ventaja de poder examinar y discutir por separado el resultado que provine de cada vernier y de cada hilo. Teniendo el círculo solamente dos vernieres ó micrómetros á distancia de 180°, será 40 el número total de lecturas, puesto que se hacen 20 en cada posicion del instrumento.

Cuando se aplique este procedimiento en una sola posicion del altazimut y se tema la influencia del error de colimacion, es preciso tener presente al corregir los promedios m y m' ó M y M', que estos corresponden á la indicacion del hilo medio, el cual puede no coincidir con el central á consecuencia de algun pequeño error en la equidistancia de los hilos. La colimacion del hilo medio será, por consiguiente, igual á la del central sumada con la diferencia $c - m$ ó $c' - m'$ de sus indicaciones. El valor de esta diferencia se determina por muchas observaciones de objetos lejanos situados muy cerca del horizonte, ó por las de un colimador establecido tambien horizontalmente.

54.—En las triangulaciones que se ejecutan con instrumenos repetidores se toman generalmente varias series de cada ángulo, dependiendo el número de observaciones de cada serie de la mayor ó menor concordancia que ofrezcan sus resultados individuales. Mr. Puissant considera que en circunstancias favorables es suficiente hacer 3 series de observaciones de un ángulo, teniendo cada serie unas 20 repeticiones, para alcanzar la precision necesaria.

Seria de desearse que todos los ángulos de una cadena geodésica se midiesen un mismo número de veces y en igualdad de circunstancias; pero esto casi nunca puede lograrse. Cuando se toman los ángulos desde una estacion que sea vértice comun de varios triángulos, es muy frecuente que no todas las señales se distingan con la misma claridad. Sus distancias, sus alturas, la posicion del sol respecto del observador, &c., son otras tantas causas que se oponen á la identidad de condiciones, y que por tanto hacen variar el grado

de certidumbre en la direccion de las visuales; y aun sucede á veces que alguna ó algunas señales no se perciben á la hora en que se observan las demas. Entónces el ingeniero se ve en la necesidad de proceder á la medida de sus ángulos en circunstancisa diferentes, siéndolo tambien por consiguiente el grado de confianza que deposita en los resultados parciales, al cual debe atender cuando se trata de combinar los diversos valores que haya obtenido para el mismo elemento.

El grado relativo de certidumbre puede reducirse á guarismos de un modo mas ó ménos arbitrario. Así, por ejemplo, si un observador representa con el número 10 la confianza que tiene en la direccion de una visual cuando todas las condiciones de luz, trasparencia de la atmósfera, hora del dia, &c., le son muy favorables, y con el 1 las circunstancias enteramente contrarias en las que pueda apenas distinguir vagamente la señal, podrá establecer diez grados de confianza representados por los números 1, 2, 3, ... 10. Entónces al lado de cada observacion anotará el guarismo de esta escala, equivalente á la seguridad que le atribuya; y cuando trate de combinar dos ó mas resultados individuales para deducir de ellos un promedio general, deberá tomar en cuenta el número que corresponda á cada observacion, procurando que el resultado de la combinacion se acerque mas á los parciales anotados como mas dignos de confianza. Para esto notemos que cuando dos observaciones tienen inscritos, por ejemplo, los guarismos 3 y 8, se ha querido indicar que se concede á la primera tanta confianza como á 3 observaciones de la clase inferior representada por el guarismo 1, y se juzga á la segunda equivalente á 8 de la misma clase; así es que el promedio de ambos resultados podrá estimarse con una confianza de $3+8$; porque lo consideramos equivalente, en efecto, á 11 observaciones cuyo grado de certidumbre fuese 1. Si designamos, pues, por $a+x_1$, $a+x_2$, $a+x_3$,..... $a+x_n$ los n resultados parciales que se hayan obtenido midiendo una magnitud cualquiera, y por p_1, p_2, p_3, ... p_n los guarismos que miden su certidumbre relativa, el promedio m será digno de un grado de confianza representado por $p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots p_n$, y estableceremos la ecuacion:

$$(p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots p_n)\,m=(a+x_1)p_1+(a+x_2)p_2+(a+x_3)p_3+\ldots\ldots(a+x_n)p_n$$

de la cual se obtiene:

$$m=\frac{(a+x_1)p_1+(a+x_2)p_2+(a+x_3)p_3+\ldots\ldots\ldots(a+x_n)p_n}{p_1+p_2+p_3\ldots\ldots\ldots p_n}$$

La cantidad representada por p, que expresa la seguridad relativa de un resultado, se designa generalmente con el nombre de *peso* de ese resultado. Segun esto, la fórmula anterior manifiesta que para tomar el promedio se multiplicará cada resultado individual por su peso, y la suma de los productos se dividirá por la de los pesos.

En la ecuacion precedente he supuesto que todos los resultados individuales constan de una parte comun a y otra variable x, lo cual siempre es cierto; porque basta tomar por a el menor de los resultados. Este artificio tiene por objeto simplificar el cálculo de los promedios, reduciéndolo al de cantidades mas pequeñas, pues ejecutando las operaciones indicadas en la fórmula anterior y reduciendo, se halla:

$$m = a + \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots\ldots p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots p_n} \ldots\ldots (13)$$

Se ve que el valor del promedio se compone tambien de la parte constante a y del promedio de las variables, obtenido por la aplicacion de la regla anterior.

Cuando todos los resultados se juzguen dignos de la misma confianza, harémos $p_1 = p_2 = p_3$, &c., y el valor de m será:

$$m = a + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_n}{n} \ldots\ldots (14)$$

expresion de los términos medios aritméticos comunes.

55.—El medio que he indicado para estimar el peso de cada resultado, aunque mas ó ménos vago por su misma naturaleza, es acaso el único que mas directamente expresa la idea que puede uno formarse de la bondad relativa de una observacion aislada, y por arbitrario que parezca, lo es indudablemente ménos que la igual apreciacion de todos los resultados que se obtengan en condiciones diversas. Voy á indicar otro procedimiento acaso mas libre de arbitrariedad, puesto que se funda en la concordancia y número de un conjunto de observaciones, tal como el de los diversos resultados que se obtienen en la medida de una misma línea ó de un mismo ángulo.

En el órden moral como en el físico experimentamos una tendencia irresistible, y por otra parte, muy justa, para atribuir mayor grado de probabilidad á un hecho cualquiera, miéntras mas grande es el número de pruebas que lo atestiguan, y menores son las dis-

cordancias de estas. Así, cuando se nos refiere un acontecimiento que no hemos presenciado, si hay varios testigos que lo afirman y todos ellos están poco discordes en los rasgos principales ó característicos del suceso, nos sentimos inclinados á creerlo cierto, ó al ménos lo consideramos como muy probable. Si el número de testigos es sumamente grande á la vez que no hay discrepancia alguna entre ellos respecto de todos los pormenores del hecho, entónces adquirimos una confianza tal en su veracidad, que casi iguala á la certidumbre que tendriamos si lo hubiéramos presenciado. Por el contrario, la duda crece en nuestro ánimo al paso que disminuye el número de testigos, ó que estos están mas discordes en sus respectivos relatos; y esta duda puede llegar á tal grado que absolutamente admitamos la realidad del acontecimiento. Lo mismo sucede en lo físico: si, por ejemplo, las medidas reiteradas de una línea dan cortísimas diferencias y son en número muy crecido, afirmamos que el resultado final se acerca mucho á la exactitud; y si las diferencias son nulas adquirimos la certidumbre de que la medida es exacta, por lo ménos hasta donde puede serlo con nuestros medios de experimentacion. Cuando es pequeño el número de medidas individuales, y presentan ademas fuertes discordancias, aseguramos fundadamente que el resultado es incierto, y no le concedemos confianza alguna.

Hay, pues, cierto enlace entre estos dos elementos, á saber: el número de pruebas y sus discordancias, que puede servir muy bien para medir la bondad de un resultado. Trataré de expresarlo en el lenguaje algebraico: Si $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n$ son los resultados individuales que se obtengan al medir cierta magnitud, el valor que se adopta como exacto ó al ménos como mas plausible es el promedio m de todos ellos, calculado por las fórmulas (13) ó (14). De consiguiente, los residuos $m - r_1$, $m - r_2$,..... $m - r_n$ miden las discordancias entre el valor que se considera como el verdadero y el que da cada resultado aisladamente. De estas restas unas son positivas y otras negativas, de suerte que su suma algebraica siempre es nula, y por tanto no podrémos tomar su medio aritmético; pero si se elevan al cuadrado, se suman y se divide la suma por su número, se obtendrá el cuadrado medio de las discordancias ó errores:

$$e^2 = \frac{(m-r_1)^2 + (m-r_2)^2 + \ldots\ldots (m-r_n)^2}{n}$$

y si por abreviacion representamos por el signo $\Sigma\,(m-r)^2$ la suma de los términos semejantes, y extraemos la raiz, resulta:

$$e = \sqrt{\frac{\Sigma\,(m-r)^2}{n}}$$

cantidad que puede tomarse por la discordancia ó error medio que corresponde á cada uno de los n resultados parciales.

El valor de e disminuye cuando crece n ó cuando mengua la suma de los cuadrados de los errores; y puesto que se concede á un resultado una confianza tanto mayor cuanto mas pequeño es su error medio, podrémos medir su precision relativa por una cantidad q en razon inversa de e, ó lo que es lo mismo:

$$q = \sqrt{\frac{n}{\Sigma\,(m-r)^2}} \qquad (15)$$

y aplicando esta fórmula se conseguirá asignar á cada serie de observaciones una precision relativa derivada de la concordancia y del número de sus resultados. Tomemos, como ejemplo, las dos series siguientes, que se suponen ser las diversas medidas de una misma línea:

PRIMERA SERIE.	SEGUNDA SERIE.
	1974^m14
	1974. 16
1974^m10	1974. 13
1974. 18	1974. 17
1974^m14 ..... Promedios	1974^m15

He supuesto que todos los resultados se juzgaron dignos de igual confianza y por eso se han tomado los promedios por el método comun: de lo contrario se habria aplicado la fórmula (13). Tomando por parte constante $a = 1974^m10$, dispondrémos el cálculo como sigue:

$m-r$	$(m-r)^2$
$+\ 0^m04$	0.0016
$-\ 0.\ 04$	0.0016
$\Sigma\,(m-r)^2 =$	0.0032

$$q = \sqrt{\frac{2}{0.0032}} = 25.0$$

$(m-r)$	$(m-r)^2$
$+\ 0^m01$	0.0001
$-\ 0.\ 01$	0.0001
$+\ 0.\ 02$	0.0004
$-\ 0.\ 02$	0.0004
$\Sigma\,(m-r)^2 =$	0.0010

$$q = \sqrt{\frac{4}{0.0010}} = 63.2$$

Si se quieren combinar ahora los dos promedios atendiendo á su mérito relativo para hallar el resultado final, aplicarémos la fórmula (13), á saber:

$$M = 1974^{m}10 + \frac{0.04 \times 25.0 + 0.05 \times 63.2}{88.2} = 1974^{m}147$$

Combinando los dos promedios sin atender á su grado de precision, se habria hallado $1974^{m}145$. La diferencia de los dos resultados es insignificante en este ejemplo, á causa de la pequeñez de todas las discordancias; pero hay muchos casos en que no es así, y entónces seria muy arbitrario asignar á todas las series el mismo grado de confianza.

En el ejemplo que sigue se ha hecho la apreciacion de la seguridad relativa de cada resultado individual al medir el mismo ángulo.

RESULTADOS.	PESOS.	RESULTADOS.	PESOS.	RESULTADOS.	PESOS.
47° 53′ 17.″3	6	47° 53′ 14.″9	4	47° 53′ 17.″9	8
,, ,, 15. 2	2	,, ,, 17. 0	7	,, ,, 18. 5	10
,, ,, 16. 8	5	,, ,, 17. 7	9	,, ,, 16. 4	9
		,, ,, 16. 1	10		
Promed: 47° 53′ 16.″8.....		47° 53′ 16.″6.....		47° 53′ 17.″6	

Los pesos de los tres promedios serian respectivamente 13, 30 y 27, de modo que de la combinacion resultaria:

$$m = 47° 53′ 16.″0 + \frac{0.8 \times 13 + 0.6 \times 30 + 1.6 \times 27}{70} = 47° 53′ 17.″02$$

Si se quiere prescindir de los pesos apreciados para calcular la precision de cada promedio por el número y la concordancia de las observaciones, tendrémos:

$m - r$	$(m-r)^2$	$m - r$	$(m-r)^2$	$m - r$	$(m-r)^2$
− 0.″5	0.25	+ 1.″7	2.89	− 0.″3	0.09
+ 1. 6	2.56	− 0. 4	0.16	− 0. 9	0.81
0. 0	0.00	− 1. 1	1.21	+ 1. 2	1.44
		+ 0. 5	0.25		
	2.81		4.51		2.34
$q = 1.03$		$q = 0.94$		$q = 1.13$	

$$m = 47° 53′ 16.″0 + \frac{0.8 \times 1.03 + 0.6 \times 0.94 + 1.6 \times 1.13}{3.10} = 47° 53′ 17.″03$$

Se ve que aunque el resultado final es casi el mismo, este último procedimiento asigna mayor mérito á la tercera serie; miéntras que la apreciacion del observador atribuyó mas confianza á la segunda.

La fórmula (15) manifiesta que para valores iguales de $m - r$, las precisiones son proporcionales á la raiz cuadrada del número de observaciones. Así es que cuando las discordancias sean poco mas ó ménos las mismas podrá multiplicarse cada promedio por $\sqrt{n}$ para hacer la combinacion. Esto es lo que debe practicarse cuando se miden los ángulos con un instrumento repetidor; porque lo que se obtiene es ya un promedio de n repeticiones, cuyas discordancias pueden suponerse comprendidas dentro de los mismos límites, si es que todas las observaciones se han ejecutado en circunstancias semejantes. Tomemos por ejemplo las tres series siguientes obtenidas con un teodolito.

RESULTADOS.	n	$\sqrt{n}$
65° 34′ 42.″7	5	2.24
,, ,, 45. 0	10	3.16
,, ,, 44. 1	15	3.87
		9.27

$$m = 65° 34' 42.''0 + \frac{0.7 \times 2.24 + 3.0 \times 3.16 + 2.1 \times 3.87}{9.27} = 65° 34' 44.''07$$

56.—Cuando se toma un término medio aritmético por el método comun, siempre es sensiblemente nula la suma algebraica $\Sigma (m - r)$ de las discordancias; pero si prescindimos de sus diversos signos para no considerar mas que sus valores numéricos, podrá calcularse con mas facilidad una discordancia media, que no es otra cosa mas que la suma de los valores numéricos de las $m - r$, dividida por su número. Designando por $S (m - r)$ esta suma, la discordancia media y la precision derivada de ella, serán respectivamente:

$$e = \frac{S (m - r)}{n} \qquad \pi = \frac{n}{S (m - r)} \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

El valor de π podrá emplearse en lugar del de q que suministra la fórmula (15). Así en el ejemplo relativo á las medidas de la misma línea, las dos series dan:

$$\pi = \frac{2}{0.08} = 25.0 \qquad \pi = \frac{4}{0.06} = 66.7$$

y el promedio final será por consiguiente:

$$m = 1974^{m}10 + \frac{0.04 \times 25.0 + 0.05 \times 66.7}{91.7} = 1974^{m}147$$

y en el primer ejemplo que se refiere á las medidas angulares, se obtiene por las tres series:

$$\pi = \frac{3}{2.1} = 1.42 \qquad \pi = \frac{4}{3.7} = 1.08 \qquad \pi = \frac{3}{2.4} = 1.25$$

$$m = 47^\circ\ 53'\ 16.''0 + \frac{0.8 \times 1.42 + 0.6 \times 1.08 + 1.6 \times 1.25}{3.75} = 47^\circ\ 53'\ 17.''01$$

En las expresiones (15) y (16) he procurado formular de una manera sencilla las indicaciones del buen sentido para combinar diversas observaciones mas ó ménos discordes, y creo que el método expuesto es propio para llenar todas las exigencias de la práctica. Sin embargo, la teoría matemática de las probabilidades conduce á las siguientes fórmulas para calcular el mérito relativo de las observaciones. Segun que se haga uso de la suma de los cuadrados de los residuos, ó bien de los residuos mismos con abstraccion de sus signos, el error medio de una sola observacion es:

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma (m-r)^2}{n-1}} \qquad E = 1.2533 \frac{S(m-r)}{n}$$

y entónces se tiene:

Error medio del promedio..... $e = \frac{E}{\sqrt{n}}$

Error probable de una observ^n ... $R = 0.6745 \sqrt{\frac{\Sigma (m-r)^2}{n-1}} = 0.8453 \frac{S(m-r)}{\sqrt{n(n-1)}}$

Error probable del promedio..... $r = \frac{R}{\sqrt{n}}$

Precision de una observacion.... $P = \frac{0.4769}{R}$

Precision del promedio..... $p = P\sqrt{n}$

En cuanto á los *pesos*, se consideran proporcionales á los cuadrados de las precisiones, ó sea inversamente proporcionales á los cuadrados de los errores medios de las observaciones.

57.—Seria dilatado y de poca utilidad hacer el desarollo de estas últimas fórmulas, por exigir la exposicion previa de los principios en que se funda el cálculo de las probabilidades. Solo indicaré el sentido en que debe tomarse el error probable. Entre los errores que pueden influir en el resultado de una observacion, es preciso distin-

guir los constantes de los accidentales. Los primeros son aquellos que en igualdad de circunstancias adquieren la misma magnitud, y tambien por lo regular el mismo signo; ó que al ménos están sujetos á leyes regulares y conocidas. Los errores accidentales no están sujetos en la apariencia á leyes fijas, y obran de una manera variable aun en igualdad de circunstancias. A los errores constantes pertenecen los que pueden provenir de una teoría inexacta, de la omision de algun elemento importante en la observacion ó en el cálculo, del uso de un instrumento incorrecto ó defectuoso, &c., y todos ellos pueden convertirse en correcciones luego que se conoce su magnitud y su influencia. Entre los errores accidentales deben clasificarse los que se originan de la imperfeccion de nuestros sentidos, que necesariamente tienen un límite de percepcion; los que son producidos por causas exteriores que no es fácil prever ni tomar en cuenta, como los pequeños movimientos que experimentan las diversas partes de un instrumento por la accion de la elasticidad de su materia, de los cambios de temperatura, de la direccion en que obra la gravedad, &c.

A medida que se ensanchan los límites de nuestros conocimientos es natural que vaya disminuyendo el número de los errores accidentales, en atencion á que van comprendiéndose sus causas ó las leyes que los rigen; pero aunque en la actualidad no se pueda juzgar con acierto acerca del modo de obrar de cada uno de ellos en particular, sí se conocen experimentalmente algunas leyes generales á que está sujeto su conjunto, como son las siguientes: 1ª Los errores accidentales de igual magnitud se producen por exceso con la misma frecuencia que por defecto, al ménos en una serie numerosa de observaciones. 2ª Para cada clase de observaciones existe cierto límite del que nunca exceden los errores accidentales. 3ª La frecuencia con que se producen no es la misma para todos los valores de que sea susceptible el error, sino que, por el contrario, son mas frecuentes los pequeños que los grandes.

Estas tres leyes generales, especialmente la última, sirven de base para el cálculo de las probabilidades en sus investigaciones respecto de los errores accidentales, partiendo de la condicion de que la frecuencia ó sea la probabilidad de un error, es una funcion dependiente de su magnitud. De esta manera se llega al desarrollo de las fórmulas que ántes se han expuesto, y cuyo objeto es la comparacion de diversas series de observaciones; comparacion que se hace por la mag-

nitud de sus errores medios, por la de sus precisiones relativas, ó por la de sus errores probables. Si todos los errores de que sea susceptible una observacion se suponen arreglados en el órden de sus magnitudes, el que ocupa el medio de la serie es el que se designa con el nombre de *error probable*. La probabilidad de este error se dice que es $\frac{1}{2}$, lo cual significa que hay tanta probabilidad de que el error efectivo sea mayor como la que hay de que sea menor que el llamado probable. Se comprende segun esto, que la comparacion de dos ó mas series de observaciones puede reducirse á la de sus respectivos errores probables, en atencion á que estos ocupan el mismo lugar entre los errores posibles de cada serie.

Para que el error probable tenga realmente la significacion que se ha explicado, es indispensable que ántes de calcularlo se hayan destruido todos los errores constantes de que sea susceptible el resultado de una observacion. Por esta causa para comparar por este método dos ó mas resultados, no deben omitirse las correcciones instrumentales, y las que demande una teoría inexacta, aplicando en general todos aquellos procedimientos que hagan variar las circunstancias de una observacion ó que tiendan á eliminar las causas de error constante.

58.—Esta es la ocasion de indicar otro error que suele influir en las observaciones angulares, y que debe llevarse en cuenta especialmente cuando se emplee un instrumento de precision cuyas lecturas se puedan aproximar hasta los segundos. Si los gruesos de las señales geodésicas se ven bajo un ángulo apreciable, suele suceder que por la posicion del sol respecto de ellas, una sola de sus partes se presenta iluminada al observador, el cual en este caso dirige su visual hácia la mitad de la parte iluminada, que es la que distingue. Sucederá entónces por lo regular que la visual no pasa por el centro de la señal, y se producirá un pequeño error angular en la indicacion del instrumento, llamado *error de fase*. Veamos el modo de determinarlo, á fin de corregir la lectura del círculo azimutal.

Supongamos que sea rectangular la seccion de la señal, y $m\ n$ (fig. 17ª) su cara iluminada. El observador en C al medir el ángulo entre un punto A y el centro O de la señal, visa próximamente hácia el medio D de $m\ n$, dividiendo en dos partes sensiblemente iguales al ángulo $m\ C\ n$ bajo el cual distingue la parte alumbrada $m\ n$. El error de fase que comete es por consiguiente el pequeño ángulo

$x = D\,C\,O$. Designando por r la distancia $O\,D$, tendrémos en el triángulo $O\,D\,C$:

$$\text{sen. } x = \frac{r \text{ sen. } D\,O\,C}{D\,C}$$

Como los lados geodésicos son inmensamente grandes respecto de las dimensiones de las señales, podrá tomarse sin error perceptible el lado $O\,C = k$, por $D\,C$. Llamando O el ángulo $D\,O\,C$, y expresando en segundos la pequeña correccion x, resultará:

$$x = \frac{r \text{ sen. } O}{k \text{ sen. } 1''} \qquad \text{(17)}$$

El lado k se obtiene por una resolucion aproximativa de los triángulos y el ángulo O se mide con suficiente exactitud al estacionar en la misma señal.

Cuando se hace uso de señales cilíndricas ó cónicas, tendrán circular su seccion, como lo indica la figura 18ª Si $S\,O$ representa la direccion de los rayos del sol, resulta que el semicírculo $H\,F\,D\,G$ representará la parte iluminada, la cual ve el observador bajo el ángulo $F\,C\,G$, y al dirigir su visual dividiendo en partes iguales ese pequeño espacio, observa el punto D en lugar del centro O, y comete por tanto el error $x = D\,C\,O$. Designemos por s el ángulo..... $D\,C\,G = D\,C\,F$, y entónces se tendrá: $F\,C\,O = s + x$; $O\,C\,G = s - x$; y los triángulos $F\,C\,O$, $O\,C\,G$, el primero de los cuales es rectángulo, darán respectivamente, llamando r el radio de la señal y k el lado $O\,C$, que es sensiblemente igual á $C\,F$ y á $C\,G$:

$$\text{sen. } (s + x) = \frac{r}{k} \qquad \text{sen. } (s - x) = \frac{r}{k} \text{ sen. } O$$

Como los ángulos $s + x$ y $s - x$ son en todos casos extremadamente pequeños, pueden tomarse en lugar de sus senos, y expresados en segundos serán:

$$(s + x) \text{ sen. } 1'' = \frac{r}{k} \qquad (s - x) \text{ sen. } 1'' = \frac{r}{k} \text{ sen. } O$$

Restando una de otra estas ecuaciones, se obtiene:

$$2\,x \text{ sen. } 1'' = \frac{r}{k}\,(1 - \text{sen. } O)$$

El ángulo $O = C\ O\ G$ puede expresarse en funcion del ángulo $S'\ C\ O = U$ formado en C por la direccion del sol con la de la señal. Para esto notemos que en virtud del paralelismo de $S\ O$ y $S'\ C$, se tiene: $S\ O\ C = 180° - U$; pero tambien $S\ O\ C = 90° - O$; luego resultará: $O = U - 90°$, ó bien sen. $O = -$ cos. U. Sustituyendo en la fórmula precedente y recordando que $1 +$ cos. $U = 2$ cos.$^2 \frac{1}{2} U$, se hallará en último resultado:

$$x = \frac{r \cos.^2 \frac{1}{2} U}{k \text{ sen. } 1''} \qquad (18)$$

Dirigiendo una visual al sol y otra á la señal se tendrá el ángulo U entre los dos objetos; pero como el azimut del sol varia continuamente, deberá medirse ese ángulo al principio y al fin de la serie de observaciones angulares, con el objeto de adoptar el término medio por valor de U. Es claro que no se necesita mucha precision en este dato, y así es que al visar el sol se procurará únicamente que su disco quede dividido en dos partes casi iguales por el hilo vertical del centro.

La correccion x será aditiva al ángulo $A\ C\ D$, siempre que la señal A y el sol se hallen hácia el mismo lado respecto del observador, y sustractiva en el caso contrario, como se comprende desde luego por la figura.

Despues de practicadas esta y todas las demas correcciones, de que sucesivamente me he ocupado, es cuando deben compararse los resultados de las medidas angulares, cuyas discordancias serán en tal caso debidas únicamente á los errores fortuitos ó accidentales.

Los errores de observacion se determinan comparando la suma de los tres ángulos de cada triángulo con la que teóricamente debian producir, como se indicó en la Topografía; pero como no son planos los triángulos geodésicos, la suma de sus tres ángulos en lugar de ser de 180°, será igual á $180° + e$, siendo e el *exceso esférico* que aprenderémos á calcular en el Capítulo siguiente. En consecuencia, si designamos por A, B y C los ángulos observados, la suma de sus correcciones será:

$$\varepsilon = 180° + e - (A + B + C)$$

la cual debe distribuirse por partes iguales entre los tres ángulos.

Para terminar lo relativo á las medidas angulares solo falta añadir que al ocupar cada estacion deben tomarse las distancias zenitales de todos los vértices visibles desde ella, á fin de obtener el elemento necesario para determinar sus diferencias de nivel por el método trigonométrico expuesto en la página 452 y siguientes del primer Tomo.

CAPITULO VI.

CÁLCULO DE LOS TRIÁNGULOS.

59.—Se ha demostrado en el Capítulo II que los triángulos geodésicos pueden considerarse como trazados en la superficie de una esfera, y por tanto les serán directamente aplicables los métodos de resolucion que enseña la trigonometría esférica. Sin embargo, la circunstancia de tener siempre lados de muy poca amplitud conduce en ciertos casos á modificaciones y simplificaciones de los procedimientos ordinarios, las que me propongo desarrollar en este Capítulo.

Por tres métodos diferentes puede resolverse un triángulo geodésico. El primero consiste en aplicarle inmediatamente las fórmulas usuales de la Trigonometría esférica mas ó ménos modificadas. El segundo, conocido con el nombre de método de Delambre, sustituye al triángulo esférico el formado por las cuerdas correspondientes á los lados de aquel, lo cual equivale á suponer inscrito en la superficie curva del elipsoide un poliedro de caras planas y triangulares. Este poliedro no sirve mas que de auxiliar ó intermedio para la ejecucion de los cálculos, y se pasa en seguida á reponer las cosas en su estado verdadero, reduciendo de nuevo los resultados á la superficie del elipsoide. El tercer método está fundado en un teorema

muy notable, demostrado por Legendre, que permite la sustitucion de un triángulo rectilíneo al triángulo esférico, sin mas modificacion que la de hacer ligeras correcciones á los ángulos de este último. Por su extremada sencillez el método de Legendre es el único que se aplica hoy; mas daré á conocer tambien los dos primeros, porque se han aplicado á varios trabajos geodésicos de mucha importancia.

60.—**Primer método de resolucion.**—La medida directa de la base ó el cálculo de los triángulos anteriores al que se considera, hace que en cualquiera de ellos se conozca un lado y los tres ángulos, por lo cual la fórmula que debe emplearse es:

$$\text{sen. } c = \text{sen. } b \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B} \quad \ldots\ldots (1)$$

Como la base, ó en general el lado conocido b, lo está en unidades lineales, deberémos comenzar por reducirlo á segundos por la fórmula:

$$b = \frac{k}{R' \text{ sen. } 1''} \quad \ldots\ldots (2)$$

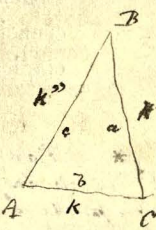
en la que k expresa la extension lineal de b, y R' el radio de la esfera osculatriz en el punto cuya latitud es φ. (pág. 47 y 48). Teniendo ya la base convertida en arco, se toma su seno para aplicar la ecuacion (1). Del cálculo resulta el lado c tambien en arco; pero luego se determina su extension k' en metros por la relacion:

$$k' = c\, R' \text{ sen. } 1'' \quad \ldots\ldots (3)$$

Como el valor de R' varia con la latitud, no deberá ser el mismo para el lado c que para b; pero se puede adoptar para cada triángulo un valor medio de R', tal como el que corresponde al término medio de las latitudes de sus tres vértices. Tomemos por ejemplo los siguientes datos en que supongo los ángulos ya corregidos por los pequeños errores de observacion:

$k = 39512^{m}41$

$A = 64°\ 16'\ 49.''26$
$B = 47\ \ 53\ \ 15.\ \ 03$
$C = 67\ \ 50\ \ 00.\ \ 17$
exceso esférico . . . $e = \quad 4.46$



siendo la latitud media del triángulo, $\phi = 19° \; 51' \; 40''$.

en metros	k........	4.5967335	sen. b.....	7.7932113	c...............	3.2039899 en segundos
	R'	—6.8035192 *	sen. C.....	9.9666534	R'	6.8035192
	sen. $1''$	—4.6855749	sen. B.....	—9.8703042	sen. $1''$......	4.6855749
en segundos	b........	3.1076394	sen. c.....	7.8895605	k'	4.6930840 en metros

$b = 00° \; 21' \; 21.''266$ $\qquad c = 00° \; 26' \; 39.''521$ $\qquad k' = 49326^{m}.92$

61.—En lugar de proceder de esta manera, y atendiendo á que los arcos b y c son de muy poca amplitud, podriamos desarrollar sus senos por la ecuacion:

$$\text{sen. } x = x - \tfrac{1}{6} x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = x \left(1 - \tfrac{1}{6} x^2\right)$$

siendo suficientes esos dos términos de la serie. Aplicándola al arco b, y teniendo presente que b en partes del radio es igual á $\frac{k}{R'}$, se tendrá:

$$\text{sen. } k = k \left(1 - \tfrac{1}{6} \frac{k^2}{R'^2}\right)$$

ó bien tomando los logaritmos, resulta fácilmente:

$$\text{log. sen. } k = \text{log. } k - \frac{M \, k^2}{6 \, R'^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

La segunda potencia de R' hace tan pequeño el último término, que no se produce error perceptible introduciendo en él un valor medio de R', como el que conviene á la latitud media de 45°, ó mejor á la latitud media del país en que se trabaja. Para la República podria adoptarse $\phi = 23° \; 30'$ por latitud media, y entónces se obtiene:

$$\text{log. sen. } k = \text{log. } k - (5.25234) \, k^2$$

Con este valor logarítmico puede ya procederse al cálculo de la ecuacion (1), que dará el log. sen. k', y para pasar de este al de k', emplearémos la série:

$$x = \text{sen. } x + \tfrac{1}{6} \text{ sen.}^3 \, x - \ldots\ldots\ldots$$

* Por equivoco está tomado aquí para el valor de R' el de la normal mayor á 19°21'40" = 19°21.'67 en vez de la que corresponde á 19°51'40" = 19°51.'67 y ademas con la dif. por 1° entre 19°30' y 20°, como se ve aquí

N á 19°.. 6.804 7972
dif. por 21.'7 ...
2.7 por 1'.. + 58
N.. 6.804 8030

0.5... 9.698 9700
e²... + 7.824 4057
cos 19°51'40.. + 9.973 3675
+ 9.973 3675
½ e² cos² φ... 7.470 1107
núm... 0.002 952

(1 − ½ e² cos² φ) = 0.997048... 9.998 7162
N... + 6.804 8030
R'... 6.803 5192

que aplicada al lado en cuestion será:

$$k' = \text{sen. } k' \left(1 + \tfrac{1}{6} \frac{\text{sen.}^2 k'}{R'^2}\right)$$

y de aquí se obtiene:

$$\log. k' = \log. \text{sen. } k' + \frac{M \text{ sen.}^2 k'}{6 R'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Calculando el coeficiente del último término para la latitud media de nuestro país, se encontrará:

$$\log. k' = \log. \text{sen. } k' + (5.25234) \text{ sen.}^2 k'$$

A fin de que se comprenda mejor la marcha del cálculo, lo aplicaré al mismo ejemplo anterior:

k^2	9.19347			
Const.....	5.25234	k.....	4.5967335	en metros
	4.44581.....	Correccion.....	—0.0000028	
		sen. k.....	4.5967307	referido al radio R'
		sen. C.....	9.9666534	
sen.^{2} k'.....	9.38616	sen. B.....	—9.8703042	
Cons.....	5.25234	sen. k'.....	4.6930799	referido al radio R'
	5.63850.....	Correccion.....	+0.0000044	
		k'.....	4.6930843	en metros

$$k' = 49326^{m}95$$

Nótese que auuque sen. k y sen. b pertenecen al mismo arco, que es el número de segundos que abraza la base, no son iguales sus logaritmos; porque el primero está referido á una esfera cuyo radio es R', y por consiguiente está expresado en metros; miéntras que el segundo se refiere á la unidad trigonométrica que, como se sabe, se supone dividida en diez millones de partes.

62.—Puede todavía resolverse el triángulo por medio de las series de este modo: desarrollando el sen. b hasta el término de tercer órden, tendrémos en la ecuacion (1):

$$\text{sen. } c = (b - \tfrac{1}{6} b^3) \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B}$$

Pero como tambien se tiene: $c = \text{sen. } c + \frac{1}{6} \text{ sen.}^3 c$, resulta por la sustitucion:

$$c = (b - \tfrac{1}{6} b^3) \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B} + \tfrac{1}{6} (b - \tfrac{1}{6} b^3) \frac{^3 \text{sen.}^3 C}{\text{sen.}^3 B}$$

Haciendo las operaciones indicadas con omision de los términos de órden superior al tercero, se obtiene:

$$c = b\,\frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B} + \tfrac{1}{6}\,b^3\left(\frac{\text{sen.}^3\,C}{\text{sen.}^3\,B} - \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B}\right)$$

y poniendo por b y c sus valores $\frac{k}{R'}$ y $\frac{k'}{R'}$, se halla por último:

$$k' = k\,\frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B} + \frac{k^3}{6\,R'^2}\left(\frac{\text{sen.}^3\,C}{\text{sen.}^3\,B} - \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

En atencion á la pequeñez del último término puede emplearse un valor medio ó constante de R'. El primer término representa la resolucion del triángulo considerado como rectilíneo; de manera que el siguiente debe verse como la correccion que proviene de la curvatura de los lados, ó de la esfericidad supuesta al elemento terrestre en que está trazado el triángulo. Calculemos por este método el mismo ejemplo precedente.

k.....	4.5967335			k^3.....	3.79020
sen. C.....	9.9666534			sen. C.....	9.96665
sen. B.....	—9.8703042	$6\,R'^2$.....	—4.38544.....		—4.38544
	4.6930827.....	cubo.....	4.07925	sen. B.....	—9.87030
			9.69381		9.50111

Primer término = 49326m773
Segundo ,, = +0. 494
Tercer ,, = —0. 317

k' = 49326m95

63.—**Segundo método de resolucion.**—En este procedimiento se reduce el triángulo esférico al que forman las cuerdas de sus lados. Veamos primero cómo se reduce la base k á su cuerda q. Designando como ántes por b la amplitud de la base, tendrémos:

$$q = 2\,R'\,\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,b = 2\,R'\,\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\frac{k}{R'}$$

y desarrollando el seno del pequeño arco $\frac{1}{2}\,b$, resulta:

$$q = 2\,R'\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{k}{R'} - \tfrac{1}{48}\,\frac{k^3}{R'^3}\right)$$

cuya reduccion da por último:

$$q = k - \tfrac{1}{24}\,\frac{k^3}{R'^2}$$

lo cual indica que para obtener la cuerda basta restar del lado la 24ª parte de su cubo dividido por el cuadrado del radio. En este, como en todos los casos en que entra como divisor de una línea geodésica la segunda potencia de R', no es preciso usar mas que un valor aproximativo de esta cantidad. Si se quiere, puede determinarse desde luego el logaritmo de q, pues la ecuacion anterior da:

$$\log. q = \log. k - \frac{M}{24 R'^{2}} k^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

que para la latitud media de este país, es:

$$\log. q = \log. k - (4.65028)\, k^{2}$$

$\log \frac{M}{6R'^{2}} = 5.252\,34$

$\log 4 \ldots \; -0.602\,06$

$4.650\,28$

De este modo tenemos ya conocida la base del triángulo rectilíneo formado por las cuerdas. Para deducir sus ángulos sea $A\,B\,C$ (fig. 19^{a}) el triángulo geodésico y O el centro de la esfera osculatriz. Si desde A como centro trazamos otra esfera cuyo radio sea la unidad, sus intersecciones con $B\,A\,O$, $C\,A\,O$ y con el plano $m\,A\,n$ de las cuerdas, determinará un triángulo esférico $m\,n\,p$, cuyo ángulo p es igual á A, y cuyo lado $m\,n$ mide el ángulo de las cuerdas..... $m\,A\,n = A'$.

Tirando ademas la tangente $A\,D$ al lado b, se tiene:

$$m\,p = O\,A\,C = 90^{\circ} - D\,A\,C = 90^{\circ} - \tfrac{1}{2}\,b$$

y de la misma manera hallariamos: $n\,p = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\,c$.

Con los valores precedentes, el triángulo $m\,n\,p$ suministra la ecuacion:

$$\text{cos. } m\,n = \text{cos. } A' = \text{sen. } \tfrac{1}{2}\,b \text{ sen. } \tfrac{1}{2}\,c + \text{cos. } \tfrac{1}{2}\,b \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\,c \text{ cos. } A$$

y puesto que b y c son lados geodésicos expresados en arco, desarrollarémos los senos y cosenos de sus mitades hasta los términos de segundo órden, de lo que resulta:

$$\text{cos. } A' = \text{cos. } A + \tfrac{1}{4}\,b\,c - \tfrac{1}{8}\,(b^{2} + c^{2}) \text{ cos. } A$$

Por la forma de esta ecuacion se comprende que A y A' difieren muy poco: designando por x su pequeña diferencia, tendrémos.....

$A' = A - x$, y en el desarrollo del coseno de $A - x$ no habrá inconveniente en tomar el arco x por su seno y la unidad por su coseno para obtener:

$$\text{cos. } A' = \text{cos. } A + x \text{ sen. } A$$

Igualando esta ecuacion con la precedente hallarémos que el valor de x es:

$$x = \frac{\frac{1}{8}\left(2bc - (b^2 + c^2)\text{ cos. } A\right)}{\text{sen. } A}$$

Para hacer mas fácilmente calculable por logaritmos este valor, multipliquemos el primer término de su numerador por la unidad bajo la forma de sen.^{2} $\frac{1}{2} A$ + cos.^{2} $\frac{1}{2} A$, y sustituyamos ..... cos.^{2} $\frac{1}{2} A$ — sen.^{2} $\frac{1}{2} A$ por cos. A, así como 2 sen. $\frac{1}{2} A$ cos. $\frac{1}{2} A$ por sen. A, de todo lo cual resultará sucesivamente:

$$x = \frac{\frac{1}{8}\left((b^2 + 2bc + c^2)\text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A - (b^2 - 2bc + c^2)\text{ cos.}^2 \frac{1}{2} A\right)}{2 \text{ sen. } \frac{1}{2} A \text{ cos. } \frac{1}{2} A}$$

$$= \frac{(b+c)^2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A - (b-c)^2 \text{ cos.}^2 \frac{1}{2} A}{16 \text{ sen. } \frac{1}{2} A \text{ cos. } \frac{1}{2} A}$$

$$= \left(\frac{b+c}{4}\right)^2 \text{tan. } \frac{1}{2} A - \left(\frac{b-c}{4}\right)^2 \text{cot. } \frac{1}{2} A$$

Los arcos b, c y x están hasta ahora expresados en partes del radio trigonométrico, y así es que para que la reduccion x resulte en segundos, es necesario introducir los lados b y c tambien en segundos, con lo cual se tiene por último:

$$x = \left(\frac{b+c}{4}\right)^2 \text{tan. } \frac{1}{2} A \text{ sen. } 1'' - \left(\frac{b-c}{4}\right)^2 \text{cot. } \frac{1}{2} A \text{ sen. } 1'' \text{.....} \quad (8)$$

64.—El cálculo de esta fórmula demanda una resolucion aproximativa del triángulo geodésico, la cual se hace considerándolo como rectilíneo, esto es; reduciendo á 180° la suma de los ángulos observados, por medio de la adicion ó la sustraccion á cada uno de ellos, de la tercera parte de la diferencia que se encuentre respecto de 180°. La base k en metros se reduce á segundos por la ecuacion (2) para

obtener el arco equivalente b, lo mismo que los otros lados calculados aproximadamente, que darán los valores de a y c. En seguida se calcula la ecuacion precedente para determinar la correccion x de cada ángulo, con lo que resultan los del triángulo formado por las cuerdas. Finalmente, se reduce la base k á su cuerda por la fórmula (7), y de esta manera se tiene ya lo bastante para calcular exactamente los lados del triángulo plano, ó sea las cuerdas de los lados geodésicos. Para reducir despues las cuerdas á sus arcos, ó lo que es lo mismo, para obtener las líneas geodésicas, la propia ecuacion (7) da:

$$\log. k' = \log. q' + \frac{M}{24 R'^2} q'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

pues k' y q' difieren tan poco, que puede tomarse una por otra en la pequeña correccion logarítmica.

Todo el método se comprenderá mejor aplicándolo al mismo triángulo que hemos calculado ántes. Para el cálculo aproximativo tomaré los ángulos tales como resultaron de la observacion, á saber:

$A_1 = 64° 16' 51.''25$
$B_1 = 47\ 53\ 17.\ 03$
$C_1 = 67\ 50\ 2.\ 15$
$10.''43$

metros	k	4.59673			
	R' sen. $1''$...	—1.48909			
en segundos	b	3.10764			
	sen. B_1	—9·87030		$a = 1558.''2$	$\frac{1}{2}A = 32° 8' 25''$
		3.23734	3.23734	$b = 1281.\ 3$	$\frac{1}{2}B = 23\ 56\ 38$
	sen. A_1	9.95469	sen. C_1 .. 9.96665	$c = 1599.\ 6$	$\frac{1}{2}C = 33\ 55\ 1$
en segundos	a	3.19203	c ... 3.20399	en segundos	

Procedamos ahora al cálculo de las reducciones de los ángulos.

en segundos	$\frac{1}{2}(b+c)$ 2.8574	$\frac{1}{2}(b-c)$ 1.9009	en segundos	— 1.''580
	,, ... 2.8574	,, ... 1.9009		+ 0. 049
	tan. $\frac{1}{2}A$ 9.7982	cot. $\frac{1}{2}A$ 0.2018	$x =$	— 1.''53
	sen. $1''$ 4.6856	..... 4.6856	$A = 64° 16' 51.''25$	
	0.1926	8.6892	$A' = 64° 16' 49.''72$	

$\frac{1}{4}(a+c)$	2.8973	$\frac{1}{4}(a-c)$	1.0128	— 1.″341
,, ...	2,8973	,, ...	1.0128	+ 0. 001
tan, $\frac{1}{2}B$	9.6474	cot. $\frac{1}{2}B$	0.3525	$x =$ — 1.″34
sen. ″	4.6856	.....	4.6856	$B = 47°\ 53'\ 17.''03$
	0.1276		7.0637	$B' = 47°\ 53'\ 15.''69$

$\frac{1}{4}(a+b)$	2.8512	$\frac{1}{4}(a-b)$	1.8401	— 1.″643
,, ...	2.8512	,, ...	1.8401	+ 0. 034
tan. $\frac{1}{2}C$	9.8276	cot. $\frac{1}{2}C$	0.1724	$x =$ — 1.″61
sen. 1″	4.6856	.....	4.6856	$C = 67°\ 50'\ 2.''15$
	0.2156		8.5382	$C' = 67°\ 50'\ 00.''54$

La suma de los tres ángulos de las cuerdas excede 5.″95 de 180°. Este exceso proviene de los errores de observacion, por lo cual restarémos 1.″983 de cada ángulo, y entónces los corregidos para aplicar la resolucion serán:

$$A' = 64°\ 16'\ 47.''74$$
$$B' = 47\ \ 53\ \ 13.\ \ 71$$
$$C' = 67\ \ 49\ \ 58.\ \ 55$$
$$180°\ 00'\ 00.''00$$

Resolvamos ahora este triángulo de las cuerdas, comenzando por reducir la base k por la fórmula (7).

		Const.....	4.6503	.....	4.6503	.....	4.6503
k.....	4.5967335	k^2.....	9.1935	q'^2.....	9.3622	q''^2...	9.3862
Correc...	—0.0000007	.....	3.8438		4.0125		4.0365
q.....	4.5967328						
sen. B'...	—9.8703017						
	4.7264311	.....	4.7264311				
sen. A'...	9.9546887	sen. C'.....	9.9666520				
q'.....	4.6811198	q''.....	4.6930831				
	+0.0000010	Correc....	+0.0000011				
k'.....	4.6811208	k''.....	4.6930842				
	$k' = 47986^m69$		$k'' = 49326^m94$				

Tal es el método de Delambre: aunque sus cálculos preparatorios

solo demandan el uso de logaritmos de cuatro ó cinco cifras decimales, es, sin embargo, en su conjunto, mas laborioso que cualquiera de las variedades que he expuesto del primer procedimiento.

65.—**Tercer método de resolucion.**—El teorema de Legendre que sirve de fundamento á este método, puede enunciarse así, dividiéndolo en dos proposiciones:

1ª—*Si se tienen un triángulo esférico de lados muy poco curvos, y un triángulo rectilíneo cuyos lados sean respectivamente iguales en extension á los del esférico, los ángulos de uno y otro diferirán una misma cantidad.*

2ª—*Esta diferencia constante es igual á la tercera parte del exceso esférico, esto es: á la tercera parte del exceso que sobre 180° tiene la suma de los tres ángulos del triángulo esférico.*

Para demostrar la primera, sean A, B, C los ángulos del triángulo esférico; A', B', C' los del rectilíneo, y a, b, c los lados comunes á ambos. Supondré ademas por lo pronto y para mayor sencillez, que el primero pertenece á una esfera que tiene la unidad por radio. El triángulo rectilíneo da la ecuacion:

$$\text{cos. } A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \qquad (M)$$

y puesto que $\text{sen.}^2 A' = 1 - \text{cos.}^2 A'$, se deduce la siguiente:

$$\text{sen.}^2 A' = \frac{4\,b^2\,c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2\,c^2}$$

que desarrollada y reducida adquiere esta otra forma:

$$\text{sen.}^2 A' = \frac{2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4\,b^2\,c^2} \qquad (N)$$

El triángulo esférico proporciona la siguiente ecuacion:

$$\text{cos. } A = \frac{\text{cos. } a - \text{cos. } b \text{ cos. } c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

Como por el supuesto son de poca curvatura los lados de este triángulo, sustituyamos los desarrollos de sus senos y cosenos lle-

vando la aproximacion hasta los términos de cuarto órden, y se tendrá:

$$\cos. A = \frac{1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}a^4 - (1 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{24}b^4)(1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{24}c^4)}{(b - \frac{1}{6}b^3)(c - \frac{1}{6}c^3)}$$

Efectuando las multiplicaciones siempre hasta los términos de cuarto órden, resulta:

$$\cos. A = \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - \frac{1}{24}(b^4 + c^4 - a^4) - \frac{1}{4}b^2c^2}{bc\left(1 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2)\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - \frac{1}{24}(b^4 + c^4 - a^4 + 6b^2c^2)}{bc}\left(1 + \frac{1}{6}(b^2 + c^2)\right)$$

Debería haber el término $-\frac{1}{36}(b^4 + c^4)$, pero como daría en el producto términos superiores al 4º orden, hago en adelante

Para ejecutar la multiplicacion del quebrado por el binomio que he trasladado al numerador, nótese que como nos propusimos no apreciar mas allá de los términos de cuarto órden, la segunda parte del binomio por la segunda del quebrado dará términos de órden superior al cuarto, y por tanto, despreciables; así es que solo deberá multiplicarse por la primera parte del quebrado, y resultará:

$$\cos. A = \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{12}(b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - a^2c^2 - a^2b^2) - \frac{1}{24}(b^4 + c^4 - a^4 + 6b^2c^2)}{bc}$$

y haciendo las reducciones se obtiene:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{24bc}$$

La primera parte de este valor es idéntica á la ecuacion (M), y el numerador de la segunda parte es el mismo de la relacion (N); por lo cual se tendrá sustituyendo:

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{1}{6}bc \operatorname{sen}.^2 A'$$

La forma de esta funcion indica que los ángulos A y A' difieren muy poco, puesto que la diferencia de sus cosenos está representada por un producto de fracciones, de las que b y c son siempre muy pequeñas respecto del radio. De esto se deduce que si designamos por x la pequeña diferencia entre A y A', estamos autorizados para to-

mar en el desarrollo de cos. $(A' + x)$ la unidad por cos. x y el arco x por su seno. Haciéndolo así, en efecto, resultará:

$$\cos. A = \cos. (A' + x) = \cos. A' - x \text{ sen. } A'$$

é igualando este valor con el precedente, se obtiene:

$$x = \tfrac{1}{6}\, b\, c \text{ sen. } A'$$

Si llamamos ahora s la superficie del triángulo rectilíneo, se tendrá:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \text{ sen. } A'$$

por lo que el valor de x es:

$$x = A - A' = \tfrac{1}{3}\, s$$

Hasta aquí se ha calculado en el supuesto de que el triángulo esférico estaba trazado sobre una esfera cuyo radio fuese la unidad: si llamamos S la superficie de otro triángulo semejante á aquel, pero trazado sobre una esfera de radio R', tendrémos: $s = \frac{S}{R'^2}$, y sustituyendo en el valor de x se tendrá finalmente:

$$A - A' = \frac{S}{3\, R'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (O)$$

De igual manera hallariamos:

$$\left.\begin{aligned} B - B' &= \frac{S}{3\, R'^2} \\ C - C' &= \frac{S}{3\, R'^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (P)$$

de donde se deduce que $A - A' = B - B' = C - C'$, lo cual demuestra la primera proposicion.

66.—Veamos ahora cómo esta diferencia constante es la tercera parte del exceso esférico. Designándolo por e, se tiene segun su definicion:

$$A + B + C = 180^\circ + e$$

Sumando las ecuaciones (O) y (P), y teniendo presente que A' B' y C' pertenecen á un triángulo rectilíneo, resulta:

$$A + B + C = 180^\circ + \frac{S}{R'^2}$$

de donde se infiere que $\frac{S}{R'^2} = 3\,x = e$ ó bien que

$$x = \tfrac{1}{3}\,e$$

lo cual demuestra la segunda parte del teorema de Legendre.

El pequeño arco x tomado por su seno, está por consiguiente expresado en partes del radio; para que exprese segundos es preciso multiplicarlo por sen. $1''$, y despejando, se obtiene:

$$e = 3\,x = \frac{S}{R'^2 \text{ sen. } 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

ecuacion que nos da el valor del exceso esférico. En razon de la pequeñez de e, es evidente que para calcularlo será indiferente tomar por S la superficie del triángulo rectilíneo ó la del esférico que difieren muy poco, y aun en muchos casos es bastante emplear un valor aproximativo de ese elemento, tal como el que resultaria de medir gráficamente la base y la altura del triángulo representado en un cróquis, con tal que no fuese muy pequeña la escala de la construccion. Por otra parte, aun ántes de ocuparse de la resolucion de un triángulo geodésico, siempre se conoce uno de sus lados y sus tres ángulos, por lo que se tendrá:

$$S = \tfrac{1}{2}\,b^2\,\frac{\text{sen. } A \text{ sen. } C}{\text{sen. } B}$$

Calculo de e para la lat. 23°30'

$2R'^2$ sen 1'' ... + 1.406 09
sen A ... + 9.954 69
sen C ... + 9.966 65
sen B ... − 9.870 30
0.650 60 ... e = 4''.473

Apliquemos el cálculo de la fórmula (10) al triángulo que se ha considerado en los ejemplos anteriores.

0.5	9.69897
k^2	9.19347
sen. A	9.95469
sen. C	9.96665
sen. B	− 9.87030
S	8.94348
R'^2 sen. $1''$	− 8.29261
e	0.65087

pag. 118 ... R' ... 6.803 5192
sen 1'' ... 4.685 5749
R'^2 sen 1'' ... 8.292 6133

$e = 4.''48$ $\quad x = 1''493$

Calculo del radio R' del círculo osculador á la latitud $\varphi = 23°30'$ media de la Republica mexicana:

0.5 ... 9.698 9700
pag. 10 ... e^2 ... + 7.824 4057
cos 23°30' ... + 9.962 3978
" ... + 9.962 3978
7.448 1713
$\frac{1}{2}e^2\cos^2\varphi$ ... 0.002 8065

$1 - \frac{1}{2}e^2\cos^2\varphi = 0.9971935$ ... 9.998 7794
pag. 34 ... N á 23°30' .. + 6.804 8741
R' ... 6.803 6535 vease pag 48
á 23°30' ... R'^2 sen 1'' .. log. 8.292 8819
" ... $1 \div 2\,R'^2$ sen 1'' .. log. 1.406 0881

67.—La consecuencia inmediata del teorema de Legendre es esta. Como la resolucion de los triángulos geodésicos tiene por objeto hallar la magnitud de los lados, si se resta de cada uno de los ángulos el tercio del exceso esférico que corresponde al triángulo á que pertenecen, obtenemos un triángulo plano de lados iguales á los del esférico; y por consiguiente la resolucion de este queda reducida á la simple aplicacion de las reglas de la trigonometría plana. El método de Legendre presenta ademas otra gran ventaja, y es la de no ser indispensable el cálculo del exceso esférico mas que cuando se desea saber á cuánto ascienden los errores de observacion; porque cuando no se tiene tal interes, tanto estos como el exceso esférico se distribuyen por partes iguales entre los tres ángulos sin ocuparse del valor absoluto de las dos causas que hacen diferir de 180° la suma de los ángulos. En el triángulo que nos ha servido de ejemplo, la suma de los tres ángulos observados da 10.″43 de mas sobre 180°, cantidad que proviene del exceso esférico y de los errores de observacion. Restando de ella el exceso esférico, que se ha hallado ser de 4.″48, quedan 5.″95 de errores de observacion. Para reducir el triángulo al equivalente rectilíneo, tenemos que restar 1.″4933 de cada ángulo, y como los errores de observacion tambien deben distribuirse por igual en atencion á que es preciso admitir que provienen de causas semejantes en cada ángulo, tendrémos que quitarles ademas 1.″9833, lo cual equivale á restarles de una sola vez 3.″477, tercera parte de la diferencia total 10.″43. Esta ventaja no existe en los otros métodos que he dado á conocer; porque para aplicarlos es preciso conocer el exceso esférico á fin de corregir el triángulo por los errores de observacion.

Calculemos nuestro triángulo por el procedimiento de Legendre.

ÁNGULOS OBSERVADOS.		ÁNGULOS CORREGIDOS.	
$A_1 =$	64° 16′ 51.″25	$A =$	64° 16′ 47.″77
$B_1 =$	47 53 17. 03	$B =$	47 53 13. 55
$C_1 =$	67 50 2. 15	$C =$	67 49 58. 68
	180° 00′ 10.″43	Suma.....	180° 00′ 00.″00

k.....	4.5967335		
sen. B.....	—9.8703014		
	4.7264321		4.7264321
sen. A.....	9.9546887	sen. C.....	9.9666522
k'.....	4.6811208	k''.....	4.6930843
	$k' = 47986^m39$		$k'' = 49326^m95$

Se ve, pues, que el procedimiento es absolutamente el mismo que si se tratára de un triángulo topográfico.

68.—Aunque para la resolucion de los triángulos no sea indispensable el cálculo del exceso esférico segun lo que se ha dicho, sí es muy conveniente para formarse idea del monto del error en las medidas angulares, y necesario en algunos casos que indicaré despues. La fórmula (10) que da su valor es bastante sencilla; pero cuando no se desea una rigurosa exactitud, puede procederse así: sea s la superficie que debe tener un triángulo para que su exceso esférico sea de $1''$, condicion que equivale á $s = R'^2$ sen. $1''$, y de la cual se deduce, eliminando á R'^2 sen. $1''$ entre esta y la ecuacion (10):

$$\epsilon = \frac{S}{s} \qquad (11)$$

Como en la expresion de s entra el radio R', sus valores varian lentamente con la latitud. Expresando á s en miriaras, se encuentran los resultados siguientes para las latitudes de nuestro país:

LAT.	s
16°	196M03
21	196. 20
27	196. 40
33	196. 64

y para su latitud media, $s = 196^M3$, que puede adoptarse como constante para toda la República, obteniéndose entónces con la precision necesaria:

$$\epsilon = \frac{S}{196.3}$$

La superficie S del triángulo podrá medirse en un cróquis, tomando la base y la altura en kilómetros á fin de que S resulte tambien en miriaras como s. Por ejemplo en nuestro triángulo se halla..... $S = 878$ miriaras, por lo cual su exceso esférico será:

$$\epsilon = \frac{878.0}{196.3} = 4.''47$$

valor casi idéntico al encontrado por el cálculo de la fórmula (10).

69.—La exposicion de los tres métodos principales para resolver

los triángulos geodésicos, espero que habrá dado á conocer la inmensa superioridad que sobre los otros dos tiene el de Legendre. Es en efecto, el único que se sigue hoy, y debe notarse que para demostrar el teorema que le sirve de fundamento, hemos llevado la aproximacion hasta los términos de cuarto órden, circunstancia que desde luego manifiesta que el procedimiento es exacto aun respecto de los mayores triángulos que es posible formar sobre la tierra.

El modo de guiar los cálculos de una cadena trigonométrica con el objeto de evitar la acumulacion de pequeños errores, se ha explicado ya con suficiente extension en el Cápitulo VI de la Topografía, y por lo mismo juzgo inútil repetirlo aquí. Es raro, sin embargo, que una triangulacion geodésica se extienda en todos sentidos ó cubra del todo un país, aun cuando su objeto sea el de servir de apoyo á grandes operaciones topográficas; pues por lo regular solo se establecen cadenas paralelas de Norte á Sur y de Oriente á Poniente ligadas entre sí para que formen un conjunto bien enlazado. El calculador debe proceder de manera que se procure comprobaciones en aquellos lados que sean comunes á dos cadenas contiguas, atendiendo siempre á las condiciones geométricas de la figura.(*)

La fórmula que he desarrollado (Tomo I, pág. 125) para hacer concordar dos bases, ó en general, los cálculos que se refieren á un mismo lado, se aplica tambien á la Geodesia con el mismo objeto. Igualmente es aplicable á una triangulacion geodésica el procedimiento que expuse para corregir los cálculos preliminares y los que hayan partido de una base errónea (Tomo I, páginas 127 y 129).

Tambien importa advertir que siempre que se ofrezca combinar los ángulos de una cadena geodésica, deben corregirse por la tercera parte del exceso esférico del triángulo á que pertenezcan; pues hemos visto que esta es la condicion indispensable, segun el teorema de Legendre, para ejecutar los cálculos como si se tratase de trián-

(*) Las personas que deseen mas amplia instruccion respecto del mejor modo de satisfacer simultáneamente las diversas condiciones geométricas de una figura, pueden consultar la obra de Gauss titulada: «*Suplementum theoriæ combinationis, &c.,*» Gottingen, 1828. Galloway en las «*Memoirs of the Astronomical Society for 1844*» ha presentado aplicaciones muy interesantes de esta materia á la triangulacion de Inglaterra. En la publicacion que anualmente se hace en los Estados-Unidos con el título de «*Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey,*» en el volúmen correspondiente á 1854 consta detalladamente esa teoría con numerosas aplicaciones. Por desgracia la extension de la materia no permite su exposicion en una obra elemental.

gulos planos. Así, para reducir á la línea recta una base, que se haya medido en dos ó mas segmentos que formen entre sí ángulos muy obtusos (Tomo I, pág. 19); para determinar la posicion de un punto por medio de la observacion de los ángulos entre tres ó mas vértices (Tomo I, páginas 82 y 144), &c.; es preciso calcular el exceso esférico del triángulo de que forme parte cada uno de los ángulos que han de entrar en la combinacion, y ántes de hacerla, restarles la tercera parte de esa cantidad.

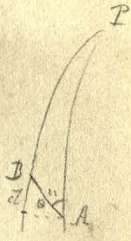
CAPITULO VII.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE LOS VÉRTICES.

70.—El conocimiento de las coordenadas geográficas de las estaciones trigonométricas suministra los medios de asignar á la cadena la posicion que realmente ocupa sobre el globo. La determinacion de la latitud y de la longitud de un punto, así como la del azimut de una línea, constituyen las aplicaciones mas importantes de la Astronomía á la Geodesia; pero se comprende fácilmente que no es necesaria la medida directa de esos elementos para cada uno de los vértices; porque conocida la posicion geográfica de uno solo y el azimut de un lado, es posible situar las demas estaciones y orientar la cadena, por el enlace íntimo que existe entre todas sus partes. Sin embargo, como es interesante conocer la posicion geográfica de cada uno de los vértices trigonométricos para poderlos fijar en la carta independientemente unos de otros, y seria muy dilatada y casi impracticable la medida directa de todas ellas por procedimientos astronómicos, vamos á exponer el método que debe segirse para cal-

cular las posiciones, conociendo la de un punto por lo ménos y el azimut de un lado, datos que suponemos obtenidos por observaciones astronómicas directas, y de las cuales me ocuparé en la última parte de este libro.

Diferencias de latitud.—Sea $A\,B = k$ (fig. 20[3]) un lado de la triangulacion, P el polo de la tierra y $P\,A$, $P\,B$ los meridianos de las estaciones A y B. Supongamos conocida la longitud L del punto A y su latitud ϕ, cuyo complemento llamado *colatitud*, es el arco $P\,A$ de su meridiano. Tambien suponemos conocido el azimut de B, que es $u = P\,A\,B$, admitiendo como en la Topografía que los azimutes se cuentan desde 0° hasta 360° partiendo del Norte hácia el Oeste. Con estos datos vamos á determinar la longitud L' y la latitud ϕ' de B, así como el azimut inverso u' que es el de A tal como se observaria en B.



Llamando θ la amplitud del lado k, y suponiendo por ahora que el triángulo $P\,A\,B$ pertenece á una esfera cuyo radio es la unidad, se tiene:

$$\cos.\ P\,B = \text{sen.}\ \phi\ \cos.\ \theta + \cos.\ \phi\ \text{sen.}\ \theta\ \cos.\ u$$

Si designamos por d la diferencia de latitud $\phi' - \phi$ de los puntos B y A, tendrémos tambien:

$$\cos.\ P\,B = \cos.\ (90° - \phi') = \cos.\ \big(90° - (\phi + d)\big) = \text{sen.}\ (\phi + d)$$

por lo que igualando, se obtiene:

$$\text{sen.}\ (\phi + d) = \text{sen.}\ \phi\ \cos.\ \theta + \cos.\ \phi\ \text{sen.}\ \theta\ \cos.\ u$$

La amplitud θ por pertenecer á una línea geodésica, y por ser d la diferencia de latitud de sus extremos, son arcos muy pequeños; así es que podrémos sustituir las series de sus senos y cosenos hasta la tercera potencia al desarrollar la ecuacion anterior, que en consecuencia dará:

$$\text{sen}\,\phi - \tfrac{1}{2}\,d^2\,\text{sen}\,\phi + d\,\cos\phi - \tfrac{1}{6}\,d^3\cos\phi = \text{sen}\,\phi - \tfrac{1}{2}\,\theta^2\,\text{sen}\,\phi + \theta\,\cos\phi\,\cos u - \tfrac{1}{6}\,\theta^3\cos\phi\,\cos u$$

Aunque esta ecuacion es de tercer grado, como d y θ son muy

pequeños, vamos á resolverla por aproximaciones sucesivas, despejando primero á la primera potencia de d, para obtener:

$$d = \theta \cos. u - \tfrac{1}{2}(\theta^2 - d^2) \tan. \phi - \tfrac{1}{6}(\theta^3 \cos. u - d^3)$$

Desechando los términos de segundo y tercer órden, tendrémos por primera aproximacion:

$$d = \theta \cos. u$$

Sustituyendo este valor aproximativo en el término de segundo órden y desechando el de tercero, resulta por segunda aproximacion:

$$d = \theta \cos. u - \tfrac{1}{2}\theta^2 \text{sen.}^2 u \tan. \phi$$

Finalmente, introduciendo este valor mas exacto en los términos de segundo y tercer órden sin apreciar mas que hasta la tercera potencia de θ, se obtiene:

$$d = \theta \cos. u - \tfrac{1}{2}\theta^2 \text{sen.}^2 u \tan. \phi - \tfrac{1}{2}\theta^3 \cos. u \text{ sen.}^2 u \tan.^2 \phi - \tfrac{1}{6}\theta^3 \cos. u \text{ sen.}^2 u$$

ó bien:

$$d = \theta \cos. u - \tfrac{1}{2}\theta^2 \text{sen.}^2 u \tan. \phi - \tfrac{1}{6}\theta^3 \cos. u \text{ sen.}^2 u \,(1 + 3 \tan.^2 \phi)$$

Para pasar de la esfera que tiene la unidad por radio á la osculatriz al elipsoide cuyo radio es R', sabemos que $\theta = \frac{k}{R'}$, y se tendrá sustituyendo:

$$d = \frac{k \cos. u}{R'} - \frac{k^2 \text{sen.}^2 u \tan. \phi}{2 R'^2} - \frac{k^3 \cos. u \text{ sen.}^2 u}{6 R'^3}(1 + 3 \tan.^2 \phi)$$

Esta fórmula daria la diferencia de latitud sobre una esfera; pero como este arco debe contarse en el meridiano, cuyo radio de curvatura es ρ, para que convenga al elipsoide terrestre tendrémos que multiplicar por $\frac{R'}{\rho}$, segun lo que se demostró en la pág. 48; y expresando por último en segundos el arco d, resulta:

$$\phi' - \phi = d = \frac{k \cos. u}{\rho \text{ sen. } 1''} - \frac{k^2 \text{sen.}^2 u \tan. \phi}{2 R' \rho \text{ sen. } 1''} - \frac{k^3 \cos. u \text{ sen.}^2 u}{6 R'^2 \rho \text{ sen. } 1''}(1 + 3 \tan.^2 \phi) \ldots (1)$$

Esta ecuacion suministra la diferencia de paralelos con cuanta

exactitud se necesita aun para lados geodésicos muy grandes; pero el último término tiene un valor casi insensible para las líneas geodésicas comunes, especialmente en las bajas latitudes. Suponiendo $k = 100000^m$, $u = 45°$ y $\phi = 30°$, el tercer término da un valor que no llega á 0.″1; y así es que podrá desecharse en la mayor parte de los casos, bastando solo con la segunda aproximacion, á saber:

$$\phi' = \phi + \frac{k \cos. u}{\rho \text{ sen. } 1''} - \frac{k^2 \text{ sen.}^2 u \tan. \phi}{2 R' \rho \text{ sen. } 1''}$$

Tambien se puede tomar la normal N por R' en el segundo término que es siempre pequeño, y haciendo:

$$A = \frac{1}{\rho \text{ sen. } 1''} \qquad B = \frac{0.5 \tan. \phi}{N \rho \text{ sen. } 1''}$$

tendrémos en último resultado:

$$\phi' = \phi + A k \cos. u - B k^2 \text{ sen.}^2 u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(K está espresado en metros, en esta fórmula)

En la Tabla que va en una de las páginas siguientes constan los logaritmos de A y B, que he calculado para las latitudes de la República, y presenta tambien sus diferencias por 1′ á fin de facilitar las interpolaciones para cualquiera latitud intermedia, por ser este elemento el argumento de la Tabla.

Al aplicar la fórmula debe atenderse al signo de cos. u, segun el valor que tenga el azimut. El término $A k$ cos. u será positivo cuando u corresponda á los cuadrantes primero y cuarto, ó lo que es lo mismo, cuando su valor esté comprendido entre 0° y 90°, ó entre 270° y 360°; y negativo en los otros dos cuadrantes, lo que, por otra parte, puede verse en la figura haciendo variar la posicion del punto B. El último término no varia de signo, al ménos en nuestras latitudes septentrionales.

Ejemplos.—En el triángulo que ha servido de ejercicio para los diversos métodos de resolucion, supongamos que la latitud de A (fig. 21ª) es $\phi = 19° 53' 42.''3$; y que para el azimut de B se encontró $u = 289° 40' 22.''2$, habiendo dado el cálculo para el lado AB, $k = 49326^m95$. Tomando en la Tabla de los logaritmos de los fac-

tores A y B que entran en la fórmula, sus valores para la latitud ϕ, se hallará: log. $A = 8.5121862$ y log. $B = 0.9649$. Para calcular la latitud ϕ' del punto B se tiene:

A..... 8.512186	B..... 0.9649	Primer término.....	+	9′ 00.″07
k..... 4.693084	k^2..... 9.3862	Segundo ,, ...	—	1. 99
cos. u..... 9.527177+	sen.^{2} u..... 9.9477			
2.732447+	0.2988	$d =$	+	8′ 58.″07
		$\phi =$		19 53 42. 30
+ 540.″07	—1.″99	$\phi' =$		20° 2′ 40.″37

Como segundo ejemplo, calculemos la latitud de C, tercer vértice de nuestro triángulo. Para deducir el azimut del lado $A\,C$ tendrémos:

Az. $A\,B =$ 289° 40′ 22.″2
Angulo $A =$ —64 16 49. 3
Az. $A\,C =$ 225° 23′ 32.″9 $= u$

A = angulo medido, corregido de los errores de observaciones, pero comprendiendo el exceso esférico

El ángulo A del triángulo está ya corregido por los errores de observacion, lo cual ha demandado el cálculo previo del exceso esférico que corresponde al triángulo. Este es uno de los casos en que es indispensable determinarlo, á fin de no incluir en él el error que proviene puramente de las observaciones.

Los logaritmos de A y B son los mismos que ántes, porque se refieren á la latitud del mismo punto de partida. El cálculo será en consecuencia:

A..... 8.512186	B..... 0.9649	Primer término.....	—	15′ 2.″42
k..... 4.596733	k^2..... 9.1935	Segundo ,, ...	—	0. 73
cos. u..... 9.846490—	sen.^{2} u..... 9.7049			
2.955409—	9.8633	$d =$	—	15′ 3.″15
		$\phi =$		19 53 42. 30
—902.″42	—0.″73	$\phi' =$		19° 38′ 39.″15

Es claro que en este último ejemplo se ha tomado por k la longitud y por u el azimut del lado $A\,C$.

De una manera idéntica se prosiguen los cálculos para todos los demas vértices, teniendo cuidado de deducir los azimutes de los la-

dos combinando el del lado que se tome por punto de partida con los ángulos de la cadena, despues de corregidos por los errores de observacion, con el objeto de que no contengan mas que el exceso esférico.

71.—**Diferencias de longitud.**—Llamando D la diferencia de meridianos $L' - L = A\,P\,B$ (fig. 20ª), el triángulo da:

$$\text{cos. } \phi' : \text{sen. } u :: \text{sen. } \theta : \text{sen. } D$$

de donde resulta:

$$\text{sen. } D = \frac{\text{sen. } \theta \text{ sen. } u}{\text{cos. } \phi'}$$

Atendiendo á la pequeñez de D y θ, podrémos obtener directamente el ángulo D por la fórmula $D = \text{sen. } D + \frac{1}{6} \text{ sen.}^3 D$, é introduciendo el desarrollo de sen. θ tambien hasta el término de tercer órden, se obtiene:

$$D = \frac{\theta \text{ sen. } u}{\text{cos. } \phi'} - \frac{1}{6}\theta^3 \left(\frac{\text{sen. } u}{\text{cos. } \phi'} - \frac{\text{sen.}^3 u}{\text{cos.}^3 \phi'} \right)$$

Sustituyendo por θ su valor $\frac{k}{R'}$, á fin de pasar de la esfera cuyo radio es la unidad á la que tiene R' por radio, hallarémos:

$$D = \frac{k \text{ sen. } u}{R' \text{ cos. } \phi'} - \frac{k^3}{6\,R'^3} \left(\frac{\text{sen. } u}{\text{cos. } \phi'} - \frac{\text{sen.}^3 u}{\text{cos.}^3 \phi'} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

El último término de esta fórmula tiene un valor tan inapreciable á causa del cubo del radio que entra en su denominador, que siempre puede desecharse sin error sensible. Ademas de esto, se emplea generalmente la normal N en lugar de R', considerando que á causa de la gran distancia del polo P á los puntos A y B, el ángulo que forman los dos meridianos es sensiblemente el mismo que formarian en una esfera de radio N.

Para que el valor de D exprese segundos, será preciso dividirlo por sen $1''$, y haciendo por abreviacion:

$$C = \frac{1}{N \text{ sen. } 1''}$$

podrémos calcular la diferencia de meridianos por la fórmula:..... $D = \frac{Ck \text{ sen. } u}{\cos. \phi'}$, ó bien:

$$L' = L + \frac{Ck \text{ sen. } u}{\cos. \phi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Los logaritmos de C constan tambien en la Tabla que pondré á continuacion.

El signo de D será el mismo de sen. u, de modo que la diferencia de longitud será positiva cuando el valor del azimut esté comprendido entre 0° y 180°, ó sea en el primero y segundo cuadrantes. Se ve que ese modo de contar los azimutes concuerda perfectamente con la convencion establecida de considerar como positivas las longitudes occidentales y negativas las orientales.

Calculemos la longitud del vértice B de nuestro triángulo $A\,B\,C$ (fig. 21ª), suponiendo que la del punto A contada desde el meridiano de México sea $L = +\ 0°\ 23'\ 37.''4$, y recordando que se tenia $u = 289°\ 40'\ 22.''2$.

C.....	8.509614		
k.....	4.693084		
sen. u.....	9.973880—	$L = +$	0° 23′ 37.″40
cos. ϕ'.....	—9.972883	$D = -$	26 38. 51
D.....	3.203715—	$L' = -$	0° 3′ 1.″11

El signo de L' asigna al vértice B una posicion oriental respecto del meridiano de México. Para el azimut del lado $A\,C$ hallamos ántes $u = 225°\ 23'\ 32.''9$, y por tanto la longitud de C será:

C.....	8.509614		
k.....	4.596733		
sen. u.....	9.852440—	$L = +$	0° 23′ 37.″40
cos. ϕ'.....	—9.973958	$D = -$	16 5. 67
D.....	2.984829—	$L' = +$	0° 7′ 31.″73

Si se quisieran expresar en tiempo las longitudes de estos puntos, se multiplicarian por $\frac{4}{60}$ las expresadas en arco, segun la regla de la pág. 40, y obtendriamos que la de A es $+1^m\ 34^s.49$, la de B —$0^m\ 12^s.07$ y la de C + $0^m\ 30^s.12$.

LOGARITMOS DE LOS FACTORES *A*, *B* Y *C*

PARA EL CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS.

LATITUD.	LOG. *A*	Dif. por 1′	LOG. *B*	Dif. por 1′	LOG. *C*	Dif. por 1′
15° 00′	8.5123984	6.4	0.8347	5.0	8.5096844	2.1
15 30	3792	6.6	.8496	4.8	6780	2.2
16 00	3594	6.8	.8641	4.7	6714	2.3
16 30	3390	6.9	.8781	4.6	6646	2.3
17 00	3182	7.2	.8919	4.4	6577	2.4
17 30	2967	7.3	.9052	4.3	6505	2.4
18 00	2747	7.6	.9182	4.2	6432	2.5
18 30	2520	7.7	.9309	4.1	6356	2.6
19 00	2288	7.9	.9434	4.0	6279	2.6
19 30	2052	8.0	.9555	4.0	6200	2.7
20 00	1812	8.3	.9674	3.9	6120	2.8
20 30	1563	8.4	.9790	3.8	6037	2.8
21 00	8.5121311	8.5	0.9904	3.7	8.5095953	2.8
21 30	1056	8.7	1.0016	3.7	5868	2.9
22 00	0795	8.8	.0126	3.6	5781	2.9
22 30	0530	9.1	.0234	3.5	5693	3.0
23 00	8.5120258	9.2	.0340	3.5	5602	3.1
23 30	8.5119982	9.3	.0444	3.4	5510	3.1
24 00	9702	9.5	.0546	3.4	5417	3.2
24 30	9418	9.6	.0647	3.3	5322	3.2
25 00	9129	9.8	.0746	3.3	5226	3.3
25 30	8835	9.9	.0844	3.2	5128	3.3
26 00	8538	10.1	.0941	3.2	5029	3.4
26 30	8236	10.1	.1036	3.1	4928	3.4
27 00	8.5117933	10.3	1.1130	3.1	8.5094827	3.4
27 30	7624	10.5	.1222	3.0	4724	3.5
28 00	7309	10.6	.1314	3.0	4619	3.5
28 30	6991	10.7	.1404	3.0	4513	3.6
29 00	6670	10.8	.1494	2.9	4406	3.6
29 30	6346	10.9	.1582	2.9	4298	3.6
30 00	6019	11.0	.1670	2.9	4189	3.7
30 30	5689	11.1	.1757	2.9	4079	3.7
31 00	5356	11.2	.1842	2.8	3968	3.7
31 30	5019	11.4	.1927	2.8	3856	3.8
32 00	4678	11.4	.2012	2.8	3742	3.8
32 30	4335	11.6	.2095	2.8	3628	3.9
33 00	8.5113987		1.2178		8.5093512	

72.—**Azimutes inversos.**—Para determinar los azimutes de todos los lados de una cadena se combinan los ángulos con el azimut conocido del primer lado, que es lo que se ha hecho para calcular el azimut de $A\,C$ en nuestro triángulo; pero si se desea el azimut de $B\,C$, por ejemplo, seria necesario combinar el ángulo B con el de $B\,A$, el cual no es otra cosa mas que el azimut inverso de $A\,B$. Vimos que en la Topografía se reduce comunmente esta deduccion á tomar ángulos suplementarios, á causa de la suposicion del paralelismo de todos los meridianos; pero en la Geodesia no es admisible esta hipótesis, y la deduccion de los azimutes inversos no es tan sencilla, porque hay que llevar en cuenta la *convergencia de los meridianos.*

En la fig. 20ª he llamado u el azimut de $A\,B$, que es el ángulo $P\,A\,B$. Si los meridianos de A y B fuesen paralelos, el azimut inverso seria $u' = 180° + u$; pero puesto que convergen hácia el polo P, deberá ser u' un poco mayor que $180° + u$, y designando por c el efecto de la convergencia, tendrémos:

$$u' = 180° + u + c$$

Para calcular el pequeño ángulo c apliquemos al triángulo $P\,A\,B$ la fórmula trigonométrica:

$$\tan.\ \tfrac{1}{2}\,(A + B) = \cot.\ \tfrac{1}{2}\,C\,\frac{\cos.\ \frac{1}{2}\,(a - b)}{\cos.\ \frac{1}{2}\,(a + b)}$$

siendo en nuestro caso $A = u$; $B = 360° - u' = 180° - (u + c)$; y $C = D$, diferencia de meridianos. De aquí se deduce que..... $\frac{1}{2}\,(A + B) = 90° - \frac{1}{2}\,c$. Ademas, los valores de los lados son: $a = 90° - \phi'$; $b = 90° - \phi$; de donde resulta..... $\frac{1}{2}\,(a - b) = \frac{1}{2}\,(\phi - \phi')$ y $\frac{1}{2}\,(a + b) = 90° - \frac{1}{2}\,(\phi + \phi')$. Haciendo, pues, la sustitucion se tendrá:

$$\cot.\ \tfrac{1}{2}\,c = \cot.\ \tfrac{1}{2}\,D\,\frac{\cos.\ \frac{1}{2}\,(\phi - \phi')}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\,(\phi + \phi')}$$

ó bien:

$$\tan.\ \tfrac{1}{2}\,c = \tan.\ \tfrac{1}{2}\,D\,\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\,(\phi + \phi')}{\cos.\ \frac{1}{2}\,(\phi - \phi')}$$

Como los ángulos D y c son siempre muy pequeños, es suficientemente exacto tomar los arcos por sus tangentes, y se obtendrá en segundos:

$$c = D\,\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\,(\phi + \phi')}{\cos.\ \frac{1}{2}\,(\phi - \phi')} \quad \text{.....} \quad (5)$$

La diferencia de latitud de los extremos de una línea geodésica es por lo general tan poco considerable, que el coseno de su mitad se confunde sensiblemente con la unidad, por lo cual se suprime comunmente el divisor de la fórmula precedente para adoptar la mas sencilla $c = D \text{ sen. } \frac{1}{2}(\phi + \phi')$ Con este valor el de u' será:

$$u' = 180° + u + D \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(\phi + \phi') \ldots\ldots (6)$$

Calculemos en nuestro triángulo el azimut de $B\,A$, ó sea el de A tomado en el horizonte de B, recordando que el de $A\,B$ era..... $u = 289° 40' 22.''2$. Se hallará que la latitud media de A y B es $\frac{1}{2}(\phi + \phi') = 19° 58' 11.''3$.

D..... 3.20372—
sen. $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$..... 9.53342
c..... 2.73714—

$c = -545.''93$

$180° + u - 360° = 109° 40' 22.''2$
$c = \quad -\ 9\ \ 5.\ \ 93$
$u' = 109° 31' 16.''3$

Siempre que u sea mayor que 180°, como sucede en este caso, deben restarse 360° de $180° + u$, ó bien tomar por fórmula general del azimut inverso: $u' = u \pm 180° + c$. Se adopta el signo superior cuando u sea menor que 180°, y el inferior cuando sea mayor. En cuanto al signo de la convergencia c es el mismo de D, al ménos en nuestras latitudes septentrionales, que se suponen siempre positivas.

Si á u' le agregamos el ángulo B del triángulo, resultará el azimut de $B\,C$. Los ángulos que entren en la combinacion deben corregirse ántes por el pequeño error de las observaciones, para lo cual se necesita calcular el exceso esférico, segun se ha dicho. En nuestro ejemplo, el ángulo B corregido es de 47° 53′ 15.″0; y así hallarémos que el azimut de $B\,C$ es de 157° 24′ 31.″3.

Como segundo ejercicio calculemos el azimut inverso de $A\,C$, siendo el directo $u = 225° 23' 32.''9$ y $\frac{1}{2}(\phi + \phi') = 19° 46' 40''$.

D..... 2.89483—
sen. $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$..... 9.52939
c..... 2.51422—

$c = -326.''75$

$u - 180° = 45° 23' 32.''9$
$c = \quad -\ 5\ \ 26.\ \ 7$
$u' = 45° 18' 6.''2$

De una manera análoga se procede en cada triángulo, y para evi-

tar un error al hacer las combinaciones, es conveniente servirse de un cróquis de la triangulacion.

El modo de cerciorarse de que no ha habido equivocacion en los cálculos, consiste en determinar la latitud y la longitud de un mismo punto por medio de distintos lados, pues es claro que deberán concordar sensiblemente los resultados. Por último ejercicio, y para presentar un ejemplo del modo de arreglar todos los cálculos que se refieren á un mismo vértice, determinarémos la posicion de C valiéndonos de los datos calculados para el punto B. Se tiene..... $BC = k = 47986^{m}69$; $u = 157° 24' 31.''3$; y $\phi = 20° 2' 40.''37$.

A.....	8.512179 +	B.....	0.9684 +	C.....	8.509611
k.....	+ 4.681121 +	k^2.....	9.3622 +	k.....	4.681121
cos. u...	+ 9.965328 —	sen.^{2} u.....	9.1690 +	sen. u.....	9.584507
	3.158628 —		9.4996 +	cos. ϕ'.....	—9.973958
	+1440.''88 —		+0.''32 +	D.....	2.801281
				sen. $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$..	9.530798
				c.....	2.332079

	+24′ 00.''88 —				
	0. 32 +				
d =	—24′ 1.''2	D = +	10′ 32.''82	c = +	3′ 34.''82
ϕ = 20	2 40. 37	L = — 0	3 1. 11	180° + u =	337° 24′ 31.''3
ϕ' = 19°	38′ 39.''17	L' = + 0°	7′ 31.''71	u' =	337° 28′ 6.''12

Todos estos resultados concuerdan bien con los que se han obtenido ántes por medio de los datos primitivos referentes al punto A.

CAPITULO VIII.

CONSTRUCCION DE LAS CARTAS GEOGRÁFICAS.

73.—La superficie de la tierra no es *desarrollable* ó susceptible de extenderse de modo que coincida con un plano en todos sus puntos, como lo son, por ejemplo, la superficie de un cono que extendida en plano produce un sector, y la de un cilindro, que desarrollada

origina un cuadrilátero. De aquí resulta que para representar sobre el papel la carta geográfica de un continente, de una nacion, &c., es preciso recurrir á ciertas construcciones geométricas convencionales llamadas *proyecciones*.

Estas pueden clasificarse, en general, en dos grupos: el uno comprende las proyecciones *por desarrollo*, y el otro las proyecciones *perspectivas*. Las primeras consisten en sustituir á la superficie del globo otra superficie desarrollable; en hacer en ella la configuracion de los objetos de la tierra por medio de ciertas consideraciones geométricas; y en desarrollarla por último para que aparezca en plano la forma así obtenida. Las proyecciones perspectivas se obtienen suponiendo que desde un punto cualquiera se dirigen visuales á todos los objetos que deben figurar en la carta; cortando en seguida todas estas visuales por medio de un plano; y señalando en este el lugar preciso en que es cortado por cada una de ellas. De este modo resulta una imágen mas ó ménos fiel de la situacion relativa de los objetos.

Casi en todas las construcciones de cartas geográficas se supone esférica la tierra; porque el ligero error que trae consigo esta hipótesis, es generalmente inferior al que producen las deformaciones inevitables que provienen de la proyeccion misma, sea cual fuere el sistema que se adopte. Indicaré, sin embargo, las modificaciones que deben hacerse á las proyecciones de la tierra supuesta esférica para restituirle la forma elipsoidal, cuando la escala de la construccion sea bastante grande para que se hagan perceptibles las diferencias originadas por la esfericidad hipotética.

Las proyecciones perspectivas se adoptan por lo regular para las cartas de vastas regiones, como todo un continente; y con especialidad para la construccion del *Mapa-Mundi*, que es la representacion de la tierra entera, dividida en dos hemisferios. Para las cartas de superficies ménos extensas se emplean de preferencia las proyecciones por desarrollo, de las que voy á ocuparme únicamente á causa de la mayor frecuencia de su uso, remitiendo al lector que desee instruirse en la construccion de las perspectivas, á los tratados de Geodesia de Mr. Francœur y de Mr. Salneuve, ó al Manual de construccion y dibujo de cartas geográficas de Mr. Perrot. (Coleccion de Manuales de Roret).

74.—**Proyecciones cónicas.**—Sean bb' y cc' (fig. 22ª) los para-

lelos de las latitudes extremas del país cuya carta se va á construir, y $A\,A'$ el paralelo medio. Si consideramos una superficie cónica $A\;V\;A'$ originada por la tangente en A, esta superficie envolverá á la tierra tocándola en todos los puntos del paralelo $A\,A'$, y se acercará á la del globo lo suficiente en una zona $b\,c$ de algunos grados, para que no resulte gran error al configurar en la zona cónica correspondiente los detalles de la esférica. Desarrollando despues la primera tendrémos una representacion bastante fiel de lo que contiene la segunda. Fácilmente se comprende que seria muy complicado, y ademas innecesario, hacer la proyeccion de cada uno de los puntos del terreno; pero si conseguimos proyectar únicamente los meridianos y los paralelos terrestres que pasen por ciertos lugares no muy distantes entre sí, todos los demas objetos se podrán representar en seguida por medio de sus posiciones geográficas, que aprendimos á calcular en el Capítulo precedente, y que como se recordará, se refieren á meridianos y paralelos. No me ocuparé, pues, por ahora mas que de las proyecciones de los meridianos y los paralelos, que supondré equidistantes en el terreno por proyecctar, de grado en grado, por ejemplo.

Segun esto, si suponemos prolongado el plano de un meridiano cualquiera $P\,D$, su interseccion con la superficie del cono tangente será una de sus generatrices $V\,D$, la cual tomarémos por proyeccion de aquel plano y de igual manera obtendrémos las de los demas, que estarán equidistantes entre sí, puesto que admitimos que lo están los meridianos que representan. Antes de indicar el modo de proyectar los paralelos, demos una idea de la manera de desarrollar el cono. Con un radio proporcional á $V\,A$, cuyo valor daré despues, trácese un arco de círculo $A'\,a$ (fig. 23ª) que representará el paralelo medio sin alteracion en cuanto á su tamaño, porque es comun tanto al globo terrestre como al cono tangente. Tomando, pues, $A'\,a$ proporcional á la extension lineal del arco del paralelo medio en la tierra, y dividiéndolo en tantas partes iguales como grados de longitud abraza el país que se va á representar, se tendrán otros tantos puntos comunes al paralelo medio y á las proyecciones de los meridianos cuyos planos forman entre sí ángulos de un grado, ó lo que es lo mismo, distantes un grado en longitud. Como estas proyecciones deben pasar tambien por el vértice del cono, puesto que son generatrices suyas, para obtenerlas no se necesitará mas que

trazar radios desde el centro V á cada uno de los puntos de division del paralelo medio $A'a$.

Para calcular el radio VA de la proyeccion tenemos que en el triángulo rectángulo VAC (fig. 22ª) llamando ϕ la latitud del paralelo en que el cono es tangente á la esfera, el ángulo $AVC = ACE$ es por consiguiente ϕ, y resulta:

$$VA = \gamma = R \cot. \phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Puede tomarse por R el radio medio de la tierra para disminuir el error que proviene de la supuesta esfericidad del globo terrestre.

75.—Veamos ahora la manera de proyectar los paralelos. Si suponemos prolongado el plano del paralelo bb', quedará cortada la superficie cónica segun un círculo que tiene BN por radio, y que puede tomarse por proyeccion del paralelo. Entónces el arco Ab del meridiano se proyectará en AB.

Puede hacerse tambien la proyeccion suponiendo que la cuerda $E'b$ gira al derredor del eje de la tierra, manteniendo siempre su extremo E' en el ecuador y el punto b sobre el paralelo. Describirá así una superficie cónica cuya interseccion con el cono tangente será un círculo, y el arco Ab se proyectará en AB'.

Otra manera de proyectar los paralelos consiste en imaginarse que el radio Cb gira al derredor del eje apoyándose siempre en la circunferencia del paralelo, con lo que tambien engendra un cono que proyecta el arco Ab en AB''.

Vamos á examinar cada uno de estos tres métodos. Desde luego cualquiera de ellos proyecta el paralelo de contacto AA' en su verdadero tamaño; pero no sucede lo mismo con los demas, ni con los arcos de meridiano, tales como Ab, comprendidos entre ellos. Designando siempre por ϕ la latitud del paralelo medio, que es el del contacto, por ϕ' la de otro cualquiera bb', y por k el tamaño de la proyeccion del arco $Ab = \phi' - \phi$, tendrémos en el primer método:

$$AB = k = \frac{MN}{\cos. \phi} = \frac{NC - MC}{\cos. \phi}$$

Siendo $NC = R$ sen. ϕ' y $MC = R$ sen. ϕ, resulta $k = \frac{R(\text{sen. } \phi' - \text{sen. } \phi)}{\cos. \phi}$ y por último:

$$k = 2R \frac{\cos. \frac{1}{2}(\phi' + \phi)}{\cos. \phi} \text{ sen. } \frac{1}{2}(\phi' - \phi) \ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

En el segundo método k será igual á $A\,B'$, y en el triángulo $A\,B'\,E'$ los valores de los ángulos son:

$B' = \frac{1}{2}(180^\circ + \varphi) - \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$

$$A = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,\phi \qquad B' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,\phi' + \phi \qquad E' = \tfrac{1}{2}\,(\phi' - \phi)$$

Tenemos ademas: $k = A\,E'\,\frac{\text{sen. } E'}{\text{sen. } B'}$; y como la cuerda es:..... $A\,E' = 2\,R \cos.\,\frac{1}{2}\,\phi$, resultará sustituyendo:

$$k = 2\,R\,\frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,\phi}{\cos.\,(\frac{1}{2}\,\phi' - \phi)}\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(\phi' - \phi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

Finalmente, para el tercer método en que $k = A\,B''$, el triángulo rectángulo $A\,B''\,C$ da:

$$k = R \tan.\,(\phi' - \phi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (R)$$

Si para comparar los valores obtenidos en los tres casos, hacemos $\phi' - \phi = \delta$, podrémos escribirlos así:

$$\left.\begin{aligned} k &= 2\,R\,\frac{\cos.\,(\phi + \frac{1}{2}\,\delta)}{\cos.\,\phi}\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,\delta \\ k &= 2\,R\,\frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,\phi}{\cos.\,\frac{1}{2}\,(\phi - \delta)}\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,\delta \;\# \\ k &= R \tan.\,\delta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Expresando á δ en partes del radio, la verdadera extension del arco $A\,b$ es $R\,\delta$. Ademas, la relacion $2\,R$ sen. $\frac{1}{2}\,\delta$ es siempre un poco menor que $R\,\delta$, por lo cual si δ es positiva, esto es: si ϕ' es mayor que ϕ, el factor de $2\,R$ sen. $\frac{1}{2}\,\delta$ en la primera fórmula es menor que la unidad; y por consiguiente la proyeccion k será mas pequeña que el arco $A\,b = R\,\delta$. Lo mismo sucede en el segundo método, aunque el error es ménos considerable puesto que los cosenos de ángulos pequeños varian con lentitud, y se ve que en la fórmula entran cos. $\frac{1}{2}\,\phi$ y cos. $\frac{1}{2}\,(\phi - \delta)$. El tercer método da la proyeccion mas grande que el arco porque el incremento de las tangentes es mayor que el de los ángulos; pero en este caso el error, ó por mejor decir, la diferencia entre el arco y su proyeccion, es en general mas pequeña que en los otros dos procedimientos, á causa de que la fórmula no contiene otro factor que contribuya á aumentarla.

No convengo sino para cerca del cenador.

Si ϕ' es menor que ϕ, δ es negativa; y entónces las tres fórmulas

El denominador de esta formula resulta $= \cos\frac{1}{2}(\delta - \varphi)$ que es $= \cos\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$

darán en general proyecciones numéricamente mayores que los arcos del meridiano que representan; pero los incrementos serán por lo regular menores y mas uniformes usando la última.

Comparando ahora los tres métodos bajo el aspecto del error que ocasionan en la extension de los arcos del paralelo, verémos que todos ellos aumentan el tamaño de los grados, puesto que el radio de la seccion del cono es siempre mayor que Nb, radio del paralelo; pero el tercer procedimiento es el que produce ménos error; porque de las tres proyecciones de b, el punto B'' es el mas inmediato al eje del cono; y por consiguiente la seccion que pasa por ese punto tiene un radio que es el que mas se acerca á Nb.

76.—De estas consideraciones se deduce que la proyeccion de los paralelos hecha desde el centro de la esfera es la que altera ménos las extensiones de los arcos del meridiano y de los paralelos, y por tanto, la que origina menor deformacion en las posiciones relativas de los objetos situados en la superficie de la tierra.

Presentemos un ejemplo numérico de los cálculos suponiendo que la latitud del paralelo medio es $\phi = 23° 30'$, la de otro, $\phi' = 29° 00'$ y la escala con que se va á construir la proyeccion de $\frac{1}{1000000}$. El radio medio de la tierra es $R = 6366738^m$.

$\phi' =$	$29° 00'$			$\frac{R}{00000}$ 0 80392
$\phi =$	$23\ 30$			arco 1° 8.24188
$\phi' + \phi =$	$52\ 30$	$\frac{1}{2}(\phi' + \phi) =$	$26° 15'$	5.°5 ..... 0.74036
$\phi' - \phi =$	$+\ 5\ 30$	$\frac{1}{2}(\phi' - \phi) =$	$+\ 2\ 45$	$R\,\delta$ 9.78616
$\phi - \delta =$	$18\ 00$	$\frac{1}{2}(\phi - \delta) =$	$9\ 00$	

$R\,\delta = 0^m6112$

$\frac{R}{1000000}$...	0.80392	.....	0.80392	.....	0.80392
2.....	0.30103	.....	0.30103	tan. δ.....	8.98358+
cos. $\frac{1}{2}(\phi' + \phi)$...	9.95273	cos. $\frac{1}{2}\phi$.....	9.99080	k.....	9.78550+
sen. $\frac{1}{2}\delta$...	8.68104+	.....	8.68104+		
cos. ϕ.....	—9.96240	cos. $\frac{1}{2}(\phi - \delta)$...	—9.99462		
k.....	9.77632	k.....	9.78217+		
	$k = 0^m5975$		$k = 0^m6056$		$k = 0^m6131$

Comparando cada resultado con el valor $R\,\delta$ del arco, vemos que el primer método produce 0^m0137 de error, el segundo 0^m0056 ambos por defecto, y el tercero solo 0^m0019 por exceso. Si suponemos

$\phi' = 18° 00'$ á fin de que δ sea numéricamente la misma que en el caso anterior, se obtendrán los resultados:

$$k = -0^m.6230 \qquad k = -0^m.6178 \qquad k = -0^m.6131$$

cuyos errores son respectivamente $0^m.0108$, $0^m.0056$ y $0^m.0019$. Se ve, pues, que á pesar de ser la escala bastante grande para una carta geográfica, y δ de 5.°5, no llega á $0^m.002$ el error que produce el tercer método.

77.—Sea cual fuere el sistema de proyeccion que se adopte, al desarrollar la superficie cónica resultan circulares los paralelos; y como el radio con que debe trazarse el paralelo medio es $\gamma = R \cot. \phi$, el radio de la proyeccion de otro paralelo cualquiera de latitud ϕ', será:

$$\gamma' = R \cot. \phi - k = \gamma - k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

puesto que esta ecuacion expresa la distancia de la proyeccion B, B' ó B'' al vértice del cono.

Falta ahora conocer el ángulo que forman en el vértice del cono ya desarrollado las generatrices que representan las proyecciones de los meridianos. Designando por $2\,L$ el número de grados de longitud que abraza el país cuya carta se va á construir, tendrémos que en el paralelo medio cuyo radio es $A\,M = R$ cos. ϕ, la extension de $2\,L$ grados es:

$$S = \frac{\pi}{90°} L\,R \text{ cos. } \phi$$

Pero como el paralelo medio queda representado en la proyeccion de su verdadero tamaño, aunque trazado con otro radio que es..... $\gamma = R$ cot. ϕ, si designamos por $2\,V$ el ángulo formado por las proyecciones de los meridianos extremos, se tendrá este otro valor:

$$S = \frac{\pi}{90°} V\,R \text{ cot. } \phi$$

de donde eliminando á S se obtiene:

$$V = L \text{ sen. } \phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Con estos datos veamos el modo de construir la proyeccion. Al

explicar la manera de hacer el desarrollo de la superficie cónica, se dijo cómo podia trazarse el paralelo medio, y nada seria mas fácil que trazar los demas de igual manera, puesto que se conocen sus radios $\gamma' = \gamma - k$; pero este método gráfico raras veces puede aplicarse, porque la escala casi nunca será tan pequeña que permita describir arcos de círculos desde un punto V (fig. 23ª), que está tanto mas distante cuanto menor sea la latitud de los paralelos. Voy á indicar otro procedimiento.

Siendo $\frac{1}{r}$ la escala que se haya adoptado, los valores de γ' deben dividirse por r, ó mejor al hacer los cálculos se dividirá por r el radio R de la tierra, con el cual todos los demas valores resultarán ya reducidos á la escala. En el punto A (fig. 24ª), que supongo ser el centro del papel, trácense las dos rectas CE y FF' perpendiculares entre sí. La primera representa la proyeccion del meridiano medio ó central, y la segunda es una tangente á la del paralelo medio, que va á servirnos para trazar esta curva.

Tómese una distancia AF, cuyo valor, como lo indica la figura, se calcula por medio de la ecuacion: $X = VA \text{ tan. } AVF = \gamma \text{ tan. } V$, la cual atendiendo á la expresion (4), dará para AF:

$$X = \gamma \text{ tan. } (L \text{ sen. } \phi)$$

y en el punto F así determinado, fórmese por medio de una tabla de cuerdas el ángulo $AFV = 90° - V = 90° - L \text{ sen. } \phi$. La misma construccion se hará hácia la parte oriental del meridiano medio para trazar por F' la proyeccion del otro meridiano extremo. En general, todo lo que se diga respecto de la region occidental debe aplicarse á la oriental por ser la construccion simétrica de uno y otro lado de CE, de suerte que cada línea tendrá su correspondiente, que se establece con los mismos valores numéricos.

Para situar el punto G del paralelo medio, llamando Y la distancia FG, se tiene:

$$Y = VF - \gamma = \frac{\gamma}{\text{cos. } V} - \gamma = \frac{\gamma(1 - \text{cos. } V)}{\text{cos. } V} = \frac{2\gamma \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} V}{\text{cos. } V}$$

ó si se quiere, introduciendo el valor de X, resulta:

$$Y = X \text{ tan. } \tfrac{1}{2} V$$

$$Y = \frac{2\gamma \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} V}{\cos V} = \frac{2X}{\tan V} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} V}{\cos V} = \frac{2X \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} V}{\operatorname{sen} V} = \frac{2X \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} V}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} V \cos \frac{1}{2} V} = X \tan \frac{1}{2} V$$

Los demas puntos del mismo paralelo, de grado en grado de longitud, por ejemplo, se establecen haciendo sucesivamente $L = 1°$, $2°$, $3°$, &c., en la fórmula (4) y se tendrán los correspondientes de V formados por las proyecciones de los meridianos distantes $1°$ en longitud, con el meridiano medio. En seguida se calcula la $X = AM$ y la $Y = MN$ para cada punto N, por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} X &= \gamma \text{ tan. } V \\ Y &= \gamma \text{ tan. } V \text{ tan. } \tfrac{1}{2} V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

formando ántes en M el ángulo $90° - V$. De este modo se obtienen tantos puntos como se quiera, los cuales unidos despues por rectas formarán una línea poligonal que se confunde con el arco de círculo con tanto ménos error cuanto mas pequeño es L. Creo que $L = 1°$ es en todos casos lo suficiente para que la serie de puntos establecidos presenten la apariencia de un arco perfecto. Si la escala de la construccion es excepcionalmente grande, puede reducirse la equidistancia en longitud L de los meridianos á $30'$, á $15'$, &c., que es lo conveniente cuando la carta comprende una extension comparativamente pequeña.

Cualquiera otro paralelo de latitud ϕ' se establece tomando sobre los meridianos las distancias AB, AC, AD, AE, &c., iguales á los valores de k dados por aquella de las ecuaciones (2) que corresponda al método de proyeccion que se haya adoptado, y que comunmente es el tercero.

78.—Si se teme que la construccion de los ángulos complementarios de V en los extremos de las X produzca algun error por ser muy grande la escala de la carta, es preferible proceder de esta otra manera. Llamemos como ántes ϕ la latitud media, ϕ' la del paralelo C mas septentrional y ϕ'' la del mas meridional E. Despues de establecido el punto A en el centro de la carta y el meridiano medio CE, tómense las distancias AC y AE, que no son otra cosa mas que los valores de k correspondientes á ϕ' y ϕ''. En los puntos C y E levántense las perpendiculares PP' y QQ', sobre las que se tomarán:

$$CP = (\gamma - k) \text{ tan. } V$$
$$EQ = (\gamma - k') \text{ tan. } V$$

y uniendo los puntos P y Q se obtendrá la proyeccion de uno de los meridianos paralelos extremos. Lo mismo se hace para cada uno de los demas empleando el valor de V correspondiente. Finalmente, uno de los paralelos extremos E se traza como ya se ha dicho, y los otros por medio de los valores de k que correspondan á sus latitudes.

Se podria emplear tambien el valor de γ, radio de la proyeccion del paralelo medio, en la ecuacion de este círculo referido á su centro V, la cual da:

$$x = \pm \sqrt{(\gamma + y)(\gamma - y)}$$

Atribuyendo á y diversos valores comprendidos entre γ y $\gamma \cos. V$, el primero de los cuales corresponde al punto A y el segundo al extremo G, se tendrian cuantos puntos intermedios se quisiesen.

79.—Demos ahora un método general para construir por puntos los meridianos y los paralelos. Sea A (fig. 25ª) el centro de la carta, y tomemos por ejes de coordenadas las líneas $A\ V$ y $A\ F$. Llamando x é y las coordenadas de un punto M cuya longitud sea L y cuya latitud sea ϕ', tendrémos:

$$A\ B = k \qquad A\ V\ M = V = L \text{ sen. } \phi$$
$$\gamma = R \text{ cot. } \phi \qquad M\ V = \gamma - k$$

y entónces los valores de $A\ P = C\ M = x$ y de $M\ P = y$, serán:

$$x = (\gamma - k) \text{ sen. } V$$
$$y = k + B\ C = k + 2(\gamma - k) \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} V$$

Introduciendo el valor de x en el de y con el fin de evitar el cuadrado de sen. $\frac{1}{2}\ V$, las coordenadas son:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\gamma - k) \text{ sen. } V \\ y &= k + x \text{ tan. } \tfrac{1}{2} V \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Las cantidades que entran en estas fórmulas dependen de la longitud y de la latitud de M, por lo cual este punto representa la proyeccion de la interseccion del meridiano de longitud L con el paralelo de latitud ϕ'. Así es que para el mismo valor de ϕ', haciendo variar á L de grado en grado se tendrán puntos del mismo paralelo. Adoptando en seguida otros valores de ϕ' y haciendo variar de nuevo

á L resultarán otros paralelos divididos tambien de grado en grado. En consecuencia solo faltará unir por líneas rectas los puntos de igual latitud para obtener los paralelos, y los de igual longitud para trazar los meridianos.

Para una carta de México, que está próximamente comprendido entre los paralelos de 15° y 33°, tomarémos $\phi = 23°$ y $30'$ por latitud media, y propongámonos calcular las coordenadas de la interseccion del meridiano de 1° con el paralelo de 18°, suponiendo que la escala adoptada sea de $\frac{1}{1000000}$.

$\phi' =$ 18° 00′	$L = 1°$ 0.00000		
$\phi =$ 23 30	sen. ϕ 9.60070		
$\delta = -$ 5° 30′	V 9.60070	$V = 0.°3987 = 0°\ 23'\ 55.''3$	
$\frac{R}{1000000}$... 0.80392	..... 0.80392	$\gamma =$ 14^{m}642	
tan. δ..... 8.98358—	cot. ϕ... 0.36170	$k =$ —0. 6131	
k..... 9.78750—	γ..... 1.16562	$\gamma - k =$ 15^{m}255	

$\gamma - k$..... 1.18341
sen. V..... 7.84252

x..... 9.02593
tan. $\frac{1}{2} V$... 7.54170

6.56763 ..... 0^{m}00037

$y = -0.6131 + 0^m00037 = -0^m6127$

$x =$ 0^{m}1061

A causa de la pequeñez de las latitudes, se ve en este ejemplo que el radio de la proyeccion de un paralelo excede de 15^m, y en consecuencia seria casi siempre imposible trazar el arco por movimiento continuo, á no ser que fuese sumamente pequeña la escala de la carta.

Si L hubiera sido de $-1°$ se habrian hallado los mismos valores numéricos para x é y, aunque x de distinto signo; porque como se ha dicho, cada cálculo da las coordenadas de los puntos de interseccion del paralelo de latitud ϕ' con los meridianos de $+L$ y de $-L$ grados de longitud. Parece inútil advertir que para facilitar y hacer con mas exactitud la construccion de la proyeccion, es conveniente trazar cuidadosamente una cuadrícula arreglada á la escala, y tomar en sus lados las coordenadas de cada punto, lo mismo que se ha enseñado en la Topografía.

Las proyecciones cónicas, segun se ve en la fig. 24ª, se componen de un conjunto de cuadriláteros mixtilíneos, que se consideran equivalentes á los esféricos formados en la tierra por los meridianos y los paralelos. En cada uno de ellos deben configurarse todos los objetos contenidos en el cuadrilátero terrestre correspondiente, situando por sus coordenadas los puntos principales, ya sea por una simple operacion gráfica, puesto que se conoce la posicion de cada interseccion de meridianos y paralelos, ó ya calculando sus coordenadas por las fórmulas (6), aunque casi siempre basta el primer procedimiento. Todos los demas detalles referidos á los puntos trigonométricos se configuran como se explicó en la Topografía.

80.—La principal ventaja de las proyecciones cónicas consiste en que todos los meridianos y los paralelos ó sus elementos se cortan en ángulo recto, como se verifica en la tierra; pero con excepcion del paralelo medio, todas las demas líneas resultan ligeramente alteradas en sus dimensiones. En una esfera los grados de longitud, contados en diversos paralelos, tienen extensiones proporcionales á los cosenos de sus latitudes, puesto que los radios de estos círculos son de la forma $R \cos. \phi$; miéntras que en la proyeccion sus variaciones son proporcionales á las de $\gamma - k$. La cantidad γ se considera como constante, y el valor de k varia con cada uno de los sistemas de proyeccion; pero en general asigna á los grados de paralelo un decremento que sigue una ley diversa que en la tierra. Estas alteraciones, lo mismo que las de los grados de latitud, ó sea de meridiano, y que ya he considerado, crecen ó se hacen mas sensibles á medida que aumentan las diferencias de latitud; y por estos inconvenientes la proyeccion cónica se aplica de preferencia á la construccion de las cartas de aquellos países que se extienden mas en el sentido de la longitud que de Norte á Sur. Un país que solo abrace 8° ó 10° de latitud, por ejemplo, quedará muy bien representado en una carta cónica; porque en una zona de 4° ó 5° al Norte y al Sur del paralelo medio, la superficie del cono tangente se aleja tan poco de la tierra, que casi serán imperceptibles las deformaciones que origine la proyeccion.

De los tres medios que he dado á conocer para proyectar los paralelos, vimos que el segundo, que supone la proyeccion hecha desde el extremo del diámetro ecuatorial, da generalmente distancias un poco menores que los arcos del meridiano correspondientes; miéntras

que el tercer método, que las supone hechas desde el centro de la esfera, las produce algo mayores. Segun esto, se comprende fácilmente que seria posible determinar en el plano del ecuador un punto tal, que proyectando desde él un arco del meridiano sobre la superficie cónica, la proyeccion resultase igual en extension al arco mismo, ó en general, que guardase con este una relacion dada.(*) No desarrollo los cálculos, porque son largos y no ofrecen interes práctico: basta solamente concebir la posibilidad de determinar ese punto proyectante de cada paralelo para tener hasta cierto punto el fundamento de una modificacion de la proyeccion cónica, que se ha tenido hasta ahora por arbitraria; pero que en rigor deja de serlo resolviendo el problema bajo el punto de vista en que lo he considerado.

Esta modificacion consiste en dar á los grados del meridiano sus verdaderas extensiones en la proyeccion. Si la tierra se supone esférica, las extensiones serán las mismas para iguales diferencias de latitud, y se calcularán por la fórmula siguiente en que δ expresa grados.

$$m = \text{arco } 1^\circ \times R\,\delta = (8.2418774)\,R\,\delta$$

El factor es la extension del arco de 1° = 3600 "en l"

Entónces se empleará m en lugar de k en las ecuaciones (3) ó (6), que sirven para calcular los radios de las proyecciones de los paralelos ó las coordenadas de sus intersecciones con los meridianos. Si se hace la construccion por el método del núm. 74, deberá dividirse el meridiano medio en partes iguales á m reducidas á la escala, y por los puntos de division se trazarán los paralelos como se dijo allí.

(*) Designando por x la distancia del centro de la esfera al punto en cuestion, he hallado que la relacion que liga las cantidades k, ϕ, ϕ' y x está representada en la ecuacion siguiente:

$$k = R\,\frac{R\,\text{sen. }\delta + x\,(\text{sen. }\phi' - \text{sen. }\phi)}{R\,\text{cos. }\delta + x\,\text{cos. }\phi}$$

Por ella se ve que los tres métodos que he considerado son casos particulares de la fórmula, que corresponden á $x = \infty$, á $x = R$ y á $x = 0$.

Si se desea que k adquiera un valor dado m, despejarémos á x con esa condicion, y resultará:

$$x = R\,\frac{R\,\text{sen. }\delta - m\,\text{cos. }\delta}{m\,\text{cos. }\phi - R\,(\text{sen. }\phi' - \text{sen. }\phi)}$$

La cantidad δ es la diferencia de latitud $\phi' - \phi$ de los extremos del arco cuya extension es k ó m.

Cuando la escala de la construccion se presta á ello, si se quiere restituir á la tierra su verdadera forma, consideremos que desde el momento en que el meridiano se supone elíptico, la generatriz del cono tangente ya no es perpendicular al radio central, sino á la normal que corresponde á la latitud ϕ del contacto. Así, pues, la distancia de este paralelo al vértice del cono, ó lo que es lo mismo, el radio de su proyeccion, ya no se calculará por la fórmula (1), sino por la siguiente:

$$\gamma = N \cot. \phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Los valores de m tampoco serán iguales entre sí, y deberán calcularse por la ecuacion (19) del Capitulo I. La Tabla III, que termina el mismo Capítulo, los da para $\delta = 1°$. Estas cantidades son las que deben sustituir á k en la construccion, ó en el cálculo de las coordenadas.

Con esta modificacion quedan destruidos los errores de las distancias de Norte á Sur, y la proyeccion consta de trapecios mixtilíneos de alturas iguales si se supone la tierra esférica, ó crecientes si se lleva en cuenta su elipticidad.

81.—Otra modificacion que se ha hecho á la proyeccion cónica consiste en dar su verdadero tamaño á los grados de todos los paralelos; porque en el sistema que hasta ahora se ha explicado solo el paralelo medio no sufre alteracion por ser el del contacto. Basta para esto determinar los ángulos que he designado por V, no solo para el paralelo medio, sino para todos los demas, con la condicion de que el arco desarrollado tenga igual extension á la que abraza en la tierra. Siendo como ántes γ el radio de la proyeccion del paralelo medio calculado por la fórmula (7), y m la extension del arco de meridiano $\phi' - \phi$, el radio de la proyeccion del paralelo cuya latitud es ϕ' será $\gamma - m$. La extension del arco de este paralelo que comprende $2L$ grados de longitud, tiene por expresion:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ} L N \cos. \phi'$$

y en la proyeccion cuyo radio es $\gamma - m$, será:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ} V(\gamma - m)$$

de donde se obtiene por la eliminacion de S:

$$V = L \frac{N \cos. \phi'}{\gamma - m}$$

que representa el ángulo formado en el vértice del cono por los dos meridianos que á la latitud ϕ' abrazan L grados de longitud.

Se ve, pues, que adoptando esta modificacion es preciso calcular el valor de V para cada paralelo, introduciendo la normal que corresponde á su latitud y el valor de m contado desde el paralelo medio. Hasta cierto punto esto equivale á suponer un cono tangente á la tierra en cada paralelo, y por esa razon á veces se denomina *policónica* esta proyeccion modificada, aunque con mas generalidad se llama proyeccion *francesa;* porque para la construccion de la carta de Francia emplearon ese sistema los geógrafos de aquella nacion.

Como los valores de V van variando de una latitud á otra, aun para los mismos valores de L, resulta que los meridianos no quedan ya rectilíneos, sino ligeramente curvos; pero la construccion no por eso es mas difícil, pues fijando por sus coordenadas las intersecciones de meridianos y paralelos, se unen por pequeñas rectas todos los puntos de igual longitud en los diversos paralelos, y se obtienen así líneas poligonales con apariencia de curvas perfectas, las cuales representan las proyecciones de los meridianos. La fig. 26ª manifiesta la proyeccion para una carta de la República construida de esa manera.

Este sistema se usa mucho en el dia, porque no produce deformacion sensible en la carta. Para facilitar sus aplicaciones reunamos todas las fórmulas que sirven para calcular las coordenadas de los puntos de interseccion de los meridianos y los paralelos, ó si se quiere, las coordenadas de un punto cuya latitud sea ϕ' y cuya longitud sea L.

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= N_0 \cot. \phi \\ V &= L \frac{N \cos. \phi'}{\gamma - m} \\ x &= (\gamma - m) \text{ sen. } V \\ y &= m + x \tan. \tfrac{1}{2} V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

En ellas N_0 designa la normal que corresponde á la latitud media ϕ, y N la correspondiente á cualquiera otra latitud ϕ'.

Por estas fórmulas calculé las tablas que corren impresas y sirvieron al Sr. García y Cubas para dibujar la carta de la República que publicó hace algunos años. Para facilitarle el trabajo tomé por unidad la sexta parte de la distancia contada en el meridiano entre los paralelos de 15° y de 33°, á fin de referir los valores de x é y al tamaño que quisiera darse al dibujo. (Vease la memoria que acompaña á la carta general de la República).

82.—**Proyecciones cilíndricas.**—Si se supone nula la cantidad designada por ϕ, que segun se recordará, representaba la latitud del paralelo de contacto de la superficie cónica con la de la tierra, el radio de la proyeccion, suministrado por la fórmula (1) ó la primera de las (8) darán $\gamma = \infty$, lo cual indica que el cono se convierte en un cilindro. Este resultado se comprende desde luego, puesto que la condicion $\phi = 0$ expresa que el contacto tiene lugar en el ecuador, y en consecuencia las generatrices de la superficie circunscrita á la tierra, debiendo ser perpendiculares á los radios ecuatoriales, serán paralelos al eje polar del globo y determinarán una superficie cilíndrica de base circular. Desarrollando esta superficie, quedarán representadas las proyecciones de los meridianos por líneas rectas paralelas y equidistantes; y la de los paralelos al ecuador por líneas perpendiculares á estas últimas, á distancias variables entre sí segun el sistema de proyeccion que se adopte. El dibujo ofrecerá, pues, un conjunto de rectángulos de bases iguales y alturas desiguales.

Las tres maneras de proyectar los paralelos, que están representadas en las fórmulas (2), dan respectivamente, atendiendo á que en este caso se tiene $\delta = \phi'$:

$$k = R \text{ sen. } \phi'$$
$$k = 2R \text{ tan. } \tfrac{1}{2}\phi'$$
$$k = R \text{ tan. } \phi'$$

Por estas expresiones se ve que los tres métodos alteran poco las dimensiones de los arcos del meridiano cuando es pequeña la latitud; pero que sucede lo contrario cuando ϕ' se acerca á valer 90°, en cuyo caso el primer método da proyecciones demasiado pequeñas, el segundo demasiado grandes, aunque no tanto como el tercero, que para $\phi' = 90°$, produce $k = \infty$. De aquí se deduce que la proyeccion cilíndrica solo puede servir para configurar con alguna aproximacion una estrecha zona á un lado y otro del ecuador. Por lo general se

aplica este sistema á la construccion de las cartas celestes para representar las constelaciones ecuatoriales y zodiacales.

A pesar de los inconvenientes que ofrece la proyeccion cilíndrica en cuanto á la deformacion que produce en las altas latitudes, es la mas usada por los marinos para la construccion de sus cartas. La razon de esta preferencia proviene de que quedando representados los meridianos por líneas rectas y paralelas, el derrotero de un navío se podrá representar tambien por una línea recta. En efecto, la direccion en que se navega se determina por medio de la brújula, moviendo el timon de manera que aquel instrumento indique cierto azimut calculado de antemano y dependiente de las posiciones del punto de partida y del término del viaje; por consiguiente la senda de la embarcacion forma una curva llamada *loxodromia*, caracterizada por la propiedad de formar un mismo ángulo con todos los meridianos. Si, pues, las proyecciones de estos planos son líneas rectas, la de la loxodromia será tambien una recta trazada con el azimut deducido de las indicaciones de la brújula.

83.—En una esfera los grados de longitud contados sobre distintos paralelos tienen extensiones proporcionales á los cosenos de sus latitudes, puesto que su expresion es: $p = \text{arco } 1° \times R \cos. \phi$. La extension de un grado del meridiano es: $m = \text{arco } 1° \times R$, y por tanto la relacion de estas extensiones será: $\frac{p}{m} = \cos. \phi$. En la proyeccion cilíndrica el paralelismo de los meridianos hace invariables los grados de longitud sea cual fuere la latitud del paralelo en que se cuenten; mas para conservar la relacion $\frac{p}{m} = \cos. \phi$ en que p es constante, el geógrafo inglés Mercator tuvo la idea de hacer variar los arcos del meridiano en razon inversa de los cosenos de las latitudes. Así, pues, dividiendo el valor de m por cos. ϕ se obtienen los grados crecientes de latitud para construir la proyeccion cilíndrica de Mercator representada en la fig. 27ª, y en la cual la relacion de los grados de latitud, con los de longitud es la misma que en una esfera. La modificacion de Mercator se adopta comunmente para las cartas marinas y para los *planisferios* que representan toda la tierra con excepcion de los países muy inmediatos á los polos; pero ademas de las deformaciones tiene el inconveniente de demandar una escala diferente para apreciar las distancias en cada zona.

Otra modificacion de la proyeccion cilíndrica consiste en suponer iguales los grados de los meridianos y de los paralelos con la exten-

sion que tienen los primeros á la latitud media del país que se desea representar. Entónces la proyeccion consta de una serie de cuadrados iguales como las cuadrículas que sirven para construir los planos topográficos; pero este sistema solo puede aplicarse sin error notable para formar las cartas de países muy poco extensos, que no excedan, por ejemplo, de 2° ó 3° de longitud y latitud.

84.—Consideremos ahora un sistema de proyeccion muy fácil de construir y muy conveniente á mi juicio en las bajas latitudes, sobre todo para la representacion de países mas extensos de Norte á Sur que de Oriente á Poniente. Para esto concibamos un cilindro tangente á la tierra en el meridiano medio del país que va á representarse, y supongamos prolongados los planos de los meridianos y los paralelos. Los primeros determinarán en el cilindro intersecciones elípticas cuyos ejes menores serán iguales al diámetro polar, y los segundos secciones terminadas por generatrices de la superficie cilíndrica. Luego que esta se desarrolla, el meridiano medio quedará representado por una línea recta de una extension igual á la que realmente tiene en la tierra; los demas meridianos por curvas que se construyen fácilmente puesto que puede determinarse la distancia de cualquiera de sus puntos al meridiano medio; y por último, los paralelos por rectas perpendiculares á esta última línea.

Sea $A\ O\ M\ E$ (fig. 28ª) el plano de un paralelo de latitud ϕ, y $A\ B$ la generatriz correspondiente del cilindro, interseccion de su superficie con la del paralelo prolongado. Para proyectar un arco $A\ b$ que abrace L grados de este círculo, podrá emplearse cualquiera de los métodos que se han expuesto al hablar de las proyecciones cónicas, tomando un punto de $A\ M$, que es la interseccion del paralelo con el meridiano principal al cual es tangente el cilindro, y trazando desde él una línea á la extremidad b del arco. Así, por ejemplo, si se elige el centro C del paralelo mismo para hacer la proyeccion, el arco $A\ b$ quedará proyectado en $A\ B$. Designando por N la normal terrestre á la latitud ϕ, el radio del paralelo es $N \cos.\ \phi$, y la proyeccion $A\ B$ tendrá por valor:

$$k = N \cos.\ \phi \tan.\ L$$

puesto que L es el ángulo $A\ C\ b$ ó sea la longitud geográfica del punto b contada desde el meridiano medio $A\ M$.

Adoptando este sistema, las proyecciones de los arcos de cada pa-

ralelo serán proporcionales á sus tangentes; de manera que cuando el país comprenda varios grados de longitud, los grados de los paralelos tendrán en la carta mayor extension que en la tierra, de donde resultarán deformaciones en las partes extremas del dibujo. Puede, sin embargo, escogerse en el plano del paralelo un punto D para proyectar cada arco, de tal modo que la proyeccion $A B'$ tenga una magnitud dada p. Basta para esto determinar en el triángulo rectángulo $A D B'$ el valor de $x = C D$ estableciendo la condicion:

$$p = (N \cos. \phi + x) \tan. D$$

En el triángulo $C D b$ se tiene ademas:..... x sen. $D = N$ cos. ϕ sen. $(L - D)$. Desarrollando esta ecuacion y dividiéndola por cos. D, suministra esta otra:

$$\tan. D = \frac{N \cos. \phi \text{ sen. } L}{N \cos. \phi \cos. L + x}$$

valor que sustituido en el de p produce el siguiente de x:

$$x = N \cos. \phi \frac{N \cos. \phi \text{ sen. } L - p \cos. L}{p - N \cos. \phi \text{ sen. } L}$$

Si se quiere que la proyeccion p sea precisamente igual al arco correspondiente $A b$ del paralelo, sustituirémos su valor, que tomando por unidad el arco de 1° y expresando á L en grados, es..... $p = L N$ cos. ϕ. Por la sustitucion resultará, pues:

$$x = N \cos. \phi \frac{\tan. L - L}{L - \text{sen. } L} \cos. L$$

Se comprende que en manera alguna es necesario determinar el valor de x que corresponde á cada arco de longitud L, y el cálculo anterior solo tiene por objeto demostrar la posibilidad de hacer la proyeccion de esa manera sin alterar las dimensiones de los arcos, ó si se quiere, el de indicar el fundamento de una modificacion que se hace á la proyecion cilíndrica tangente al meridiano. Esta consiste en dar sus verdaderas dimensiones á los grados de los paralelos, haciendo la construccion con la mayor facilidad de la manera que voy á exponer.

Hácia el centro del papel trácese una línea que represente el meridiano medio ó principal. Con arreglo á la escala divídase esta línea en partes proporcionales á las extensiones de los grados del meridiano correspondientes á las latitudes que abraza el país. Estos valores son los que constan en la Tabla de la pág. 36 para las latitudes de la República. Por los puntos de division levántense perpendiculares al meridiano medio, las cuales representan las proyecciones de los paralelos; y sobre cada uno tómense distancias iguales á los grados de longitud, segun sea la latitud del paralelo en que se cuenten, y que para la República constan igualmente en la Tabla citada. Finalmente, únanse los puntos de cada paralelo que correspondan á la misma longitud, y se obtendrán así las proyecciones de los demas meridianos.

La fig. 29ª presenta la proyeccion para una carta de México construida segun este sistema. Por ella se ve que en una zona de algunos grados al Oriente y al Poniente del meridiano central casi no se produce deformacion alguna, y que esta solo comienza á notarse hácia los extremos mas distantes en longitud, á causa de que los meridianos van siendo mas y mas oblicuos respecto de los paralelos, haciendo crecer por consiguiente los grados de latitud.

A la facilidad con que puede construirse la proyeccion cilíndrica tangente al meridiano, puede agregarse otra ventaja que ofrece en las bajas latitudes, cual es la de hacer poco convergentes los meridianos, y ocasionar en consecuencia ménos deformacion hácia el Este y el Oeste que la que produce cuando se aplica á la representacion de países de latitudes considerables. En efecto, el decremento de los grados de paralelo es próximamente proporcional al coseno de la latitud, puesto que los radios de estos círculos son de la forma $N \cos. \phi$; y como los cosenos de los ángulos pequeños no decrecen con mucha rapidez, resulta que las proyecciones de los meridianos laterales tienen respecto de los paralelos una oblicuidad menor que en las altas latitudes. Por las razones expuestas me parece que este sistema de proyeccion es muy propio para construir las cartas de nuestros Estados del litoral que se extienden en latitud mas que en longitud, y aun para la de toda la República, que quedaria bastante bien representada.

CAPITULO IX.

TRAZO DE LINEAS EXTENSAS.

85.—Ahora que he terminado la exposicion de las principales operaciones que demanda una triangulacion geodésica, me propongo dar á conocer en este Capítulo y en el siguiente algunas aplicaciones importantes, que aunque basadas en operaciones mas bien astronómicas que geodésicas, tienen, sin embargo, bastantes puntos de contacto con los procedimientos de la Geodesia para que me sea permitida su exposicion ántes que la de los astronómicos que les sirven de fundamento. Comencemos por el trazo de las líneas geográficas.

En la demarcacion de los límites territoriales entre dos naciones ó Estados vecinos se ofrece frecuentemente el establecimiento de grandes líneas geodésicas. Por lo regular se estipula de antemano cuáles deben ser los extremos de esas líneas, ya sea que se definan por sus posiciones geográficas ó ya por ser puntos notables bajo cualquiera otro aspecto. En el primer caso es preciso comenzar por señalar en el terreno los puntos que corresponden á las posiciones geográficas asignadas; y en el segundo determinar las de los extremos dados.

Debe advertirse desde luego que si entre los puntos así establecidos se ejecuta una triangulacion geodésica, con los elementos que esta suministre podrán determinarse la magnitud y la direccion de las líneas que los unen; y por consiguiente demarcarse estas sobre el terreno operando de una manera semejante á la que se ha indicado para el trazo de pequeñas líneas topográficas (Tomo I, pág. 175).

Este método no es, sin embargo, el mas fácil de aplicar; porque una triangulacion geodésica, ademas de mucho tiempo de trabajo, exige generalmente un numeroso personal, crecidos gastos y otros elementos de que no siempre es posible disponer. Por estas razones voy á exponer otro procedimiento comparativamente sencillo, y cuya exactitud casi no depende mas que de la precision con que se determinen las posiciones geográficas de los extremos de la línea.

Si los puntos están dados sobre el terreno, deben determinarse sus latitudes y la diferencia de sus longitudes por medio de los procedimientos astronómicos que se enseñarán en la parte tercera de este libro, ejecutando en los mismos puntos las observaciones necesarias; mas si solo lo están por sus posiciones geográficas, es preciso comenzar, segun se dijo ántes, por buscar los puntos que correspondan á las posiciones dadas. A este fin se establece el observador en un lugar inmediato al que desea señalar, lo cual siempre es fácil, bien sea por la simple apreciacion que puede hacer en una carta geográfica, ó lo que es preferible, por medio de algunas observaciones aproximativas que ejecute.

Admitamos que de este modo se haya colocado en un punto muy próximo al que tiene que demarcar en el terreno, cuya posicion dada supondré que es ϕ' en latitud y L' en longitud. Entónces el observador deberá determinar con toda precision la latitud ϕ y la longitud L de su estacion provisional, así como la direccion del meridiano astronómico que pasa por ella. Con estos datos tiene lo necesario para calcular la magnitud y la direccion de la línea que une su observatorio con el punto que desea hallar. En efecto, puesto que conoce las diferencias $\phi' - \phi$ y $L' - L$ podrá aplicar las fórmulas (2) y (4) del Capítulo VII para obtener por su combinacion el azimut u y la extension k de esa distancia. Como por el supuesto se ha colocado cerca del punto incógnito, podrá omitirse sin inconveniente el último y pequeño término de la primera de las fórmulas mencionadas, para tomar:

$$\phi' - \phi = A\,k \cos.\, u \qquad (L' - L) \cos.\, \phi' = C\,k \operatorname{sen}.\, u$$

El cociente de estas da el azimut, á saber:

$$\operatorname{tan}.\, u = \frac{A\,(L' - L)}{C\,(\phi' - \phi)} \cos.\, \phi'$$

y en seguida cualquiera de ellas la distancia

$$k = \frac{\phi' - \phi}{A \cos. u} = \frac{(L' - L) \cos. \phi'}{C \text{ sen. } u}$$

Ejemplo.—Supongamos que se tiene necesidad de señalar en el terreno el punto de la Baja-California que corresponde á la interseccion del paralelo de 27° 00′ de latitud con el meridiano de 13° 52′ 51″ al Oeste de México, y que el observador ha determinado para un punto cercano la posicion: $\phi = 27° 2' 17.''4$ y $L = 13° 51' 3.''0$. Tomando en la Tabla de la pág. 139 los logaritmos de A y C para la latitud ϕ, tendrémos:

$\phi' =$	27° 00′ 00.″0	$L' =$	13° 52′ 51.″0
$\phi =$	27 2 17. 4	$L =$	13 51 3. 0
$\phi' - \phi =$	—137.″4	$L' - L =$	+108″0

A	8.51179		
$L' - L$.....	2.03342		
cos. ϕ'.....	9.94988	$\phi' - \phi$.....	2.13799—
C	—8.50948	A	—8.51179
$\phi' - \phi$.....	—2.13799—	cos. u.....	—9.91257—
tan. u.....	9.84762—	k.....	3.71362
$u =$	144° 51′ 4″	$k =$	5171m6

Obtenidos estos resultados, se trazará uua línea que forme con el meridiano de la estacion un ángulo de 35° 8′ 56″ del Sur al Oeste, y se medirá en esa direccion la distancia k, cuyo término señala el punto que se busca. Si la medida directa presenta algun inconveniente puede establecerse la línea por uno ó dos pequeños triángulos. Para el trazo material vease la pág. 177 del primer Tomo.

86.—Demarcadas de este modo las dos extremidades de una línea geodésica, veamos cómo se determina su magnitud y su direccion. Designemos por ϕ y ϕ', L y L' las latitudes y las longitudes de esos puntos: haciendo para abreviar:

$$x = k \text{ sen. } u$$
$$y = k \cos. u$$

las fórmulas (2) y (4) del Capítulo VII, darán:

$$A y - B x^2 = \phi' - \phi$$
$$C x = (L' - L) \cos. \phi'$$

Despejando de esta última el valor de x, de la otra el de y, y dividiendo uno por otro los valores de x é y, se obtendrán sin dificultad las siguientes ecuaciones, que calculadas por su órden, contienen toda la resolucion del problema:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(L' - L)\cos.\phi'}{C} \\ y &= \frac{\phi' - \phi}{A} + \frac{B}{A}x^2 \\ \tan.u &= \frac{x}{y} \\ k &= \frac{x}{\text{sen.}\,u} = \frac{y}{\cos.u} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se recordará que u representa el azimut de la línea en el punto cuya latitud es ϕ. Para que $\phi' - \phi$ sea siempre positiva convendrémos en tomar por ϕ la menor de las dos latitudes. Es tambien importante calcular los valores de A, B y C para la latitud media $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$, especialmente si la línea es algo extensa, puesto que estas cantidades varian algo con la latitud, y podria producir algun error el considerarlas como constantes é iguales á las que correspondieran á un extremo de la distancia.

Para aplicar estas fórmulas tomemos como ejemplo los elementos que sirvieron para trazar una de las líneas divisorias entre las Repúblicas de México y de los Estados-Unidos, en virtud del tratado de 1848. Segun él, la línea limítrofe debe partir de un punto de nuestras costas occidentales (California) situado á una legua marina (5564^{m}6) al Sur del punto mas austral del puerto de San Diego, y terminar en el punto de confluencia de los rios Gila y Colorado. Para establecer el punto inicial las comisiones Mexicana y Americana midieron la legua marina en el meridiano que pasa por la parte mas meridional de aquel puerto, y situaron sus campos astronómicos á inmediaciones del punto con el fin de determinar sus coordenadas geográficas. Despues de terminadas las observaciones por el Sr. Salazar Ilarregui, como astrónomo mexicano, y por Mr. W. H. Emory, astrónomo americano, las refirieron al punto inicial de la línea limítrofe por medio de algunos triángulos pequeños, obteniendo por resultado para este último:

$\phi = 32^\circ\ 31'\ 59.''6$
$L = 117\ \ 5\ \ 16.\ \ 5$ al Oeste de Greenwich.

Una serie de operaciones análogas se ejecutaron despues para determinar el punto de union de los rios Gila y Colorado, y para fijar su posicion geográfica, que se encontró ser:

$\phi' = 32° 43' 32.''2$
$L' = 114\ 32\ 51.\ 6$ al Oeste de Greenwich.

Calculemos con estos datos la longitud y la direccion de la línea, tomando de la Tabla de la pág. 139 los valores de A, B y C para la latitud media 32° 38'.

$\phi' = 32° 43' 32.''2$ $\qquad$ $L' = 114° 32' 51.''6$
$\phi = 32\ 31\ 59.\ 6$ $\qquad$ $L = 117\ 5\ 16.\ 5$
$\phi' - \phi = +11' 32.''6$ $\qquad$ $L' - L = -2° 32' 24.''9$

$L' - L$.....	3.9611790—	$\phi' - \phi$.....	2.8404825	x^2.....	0.7535
cos. ϕ'.....	9.9249350	A.....	—8.5114242	.....	—8.5114
C.....	—8.5093597		4.3290583	B.....	1.2117
x.....	5.3767543—		21333m3		3.4538
y.....	—4.3833934		2843. 2		
tan. u.....	0.9933609—	y =	24176m5		

$u = 275° 47' 52.''7$

x.....	5.3767543—		
sen. u.....	—9.9977725—		
k.....	5.3789818	..... k =	239321m

Se ve por estos resultados que la línea de California tiene mas de 57 leguas mexicanas de largo, y que su azimut en el punto inicial es de 275° 47' 52.''7, ó si se quiere, de 84° 12' 7.''3 del Norte al Este. El azimut en el Gila se obtendrá por la fórmula (6) del Capítulo VII, á saber:

$L' - L$.....	3.96118—		
sen. $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$...	9.73175	$u - 180°$ =	95° 47' 52.''7
cos. $\frac{1}{2}(\phi' - \phi)$...	—0.00000	c = —	1 22 11. 0
c.....	3.69293—	u' =	94° 25' 41.''7

$c = -4931.''0$

De esta manera pudo trazarse la línea partiendo de uno y otro extremo.

Si se tuviese algun interes en calcular la amplitud angular de la línea geodésica, la fórmula (30) del Capítulo I, aplicada á este caso, daria: $\theta = 2° 8' 53.''8$

num 18
pag. 26.

87.—Como los únicos datos que se requieren para el trazo de una línea son las posiciones geográficas de sus extremos, se ve que el método expuesto es aplicable á un arco cualquiera con tal que pertenezca á una seccion vertical del elipsoide; pero si se trata de demarcar un arco perteneciente, por ejemplo, á un paralelo ó á cualquiera otra seccion oblicua, es preciso establecerlo por puntos apoyándose en una línea geodésica no muy distante de él. Supongamos que se quiera trazar un arco $B\,A\,B'$ (fig. 30ª) de un paralelo cuya latitud es ϕ. Lo primero que debe hacerse es determinar uno de sus puntos A; y para esto se observará la latitud de un lugar inmediato A' con el objeto de moverse en el meridiano de este punto lo que sea necesario para señalar en el terreno el punto A que tiene ϕ por latitud. Sea λ la observada en A', y ρ el radio de curvatura del meridiano que corresponde á esa latitud: se tendrá entónces que $\phi - \lambda$ representa la distancia angular de A' á A expresada en segundos, y $\frac{\phi - \lambda}{A}$ la distancia itineraria en metros, siendo $A = \frac{1}{\rho \text{ sen. } 1''}$ cuyos logaritmos constan en la Tabla de la pág. 139. Midiendo esa distancia en el meridiano se situará el punto que se desea del paralelo. La línea se medirá hácia el Sur cuando resulte λ mayor que ϕ; y si la diferencia $\phi - \lambda$ fuese muy considerable, deberán repetirse las observaciones de latitud en el punto así establecido, aplicando una nueva correccion si es necesario.

Una vez que se haya situado el punto A de latitud ϕ, sea $L' - L$ la diferencia de meridianos $A\,P\,B$ del arco $A\,C\,B$ que se quiere demarcar. Con estos elementos se pueden calcular los de la línea geodésica $A\,c\,B$, que por la apariencia que tiene en la figura, designaré para abreviar con el nombre de cuerda del paralelo, aunque no es sino otro arco pertencciente á una seccion vertical.

La magnitud y la direccion de esta cuerda se determinan por medio de las ecuaciones (1), con la única diferencia de hacer $\phi' - \phi = 0$, puesto que los extremos A y B tienen la misma latitud. En consecuencia las fórmulas aplicables á este caso serán:

$$x = \frac{(L' - L) \cos. \phi}{C}$$

$$y = \frac{B}{A} x^2$$

$$\tan. u = \frac{x}{y}$$

$$k = \frac{x}{\text{sen. } u}$$

Debe notarse que siendo comunmente pequeña la diferencia..... $L' - L$ de meridianos, el azimut u de la cuerda difiere poco de 90°; y si hacemos $u = 90° - \omega$, el pequeño ángulo ω se obtendrá por la relacion tan. $\omega = \frac{y}{x} = \frac{B(L'-L)\cos.\phi}{AC}$. Si en ella se introducen los valores $A = \frac{1}{\rho \text{ sen. } 1''}$, $B = \frac{0.5 \tan.\phi}{N\rho \text{ sen. } 1''}$ y $C = \frac{1}{N \text{ sen. } 1''}$, y ademas se toma el arco ω por su tangente, resulta en segundos: $\omega = \frac{1}{2}(L' - L)$ sen. ϕ. En virtud de esta simplificacion las fórmulas que determinan la direccion y la magnitud de la línea, son:

$$\left.\begin{aligned} u &= 90° - \tfrac{1}{2}(L' - L) \text{ sen. } \phi \\ k &= \frac{(L' - L)\cos.\phi}{C \text{ sen. } u} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

El arco del paralelo que á la latitud ϕ abraza la longitud $L' - L$, tendrá por extension lineal $p = \frac{(L'-L)\cos.\phi}{C}$, de donde se deduce: $p = k$ sen. u.

Veamos ahora cómo pueden situarse cuantos puntos intermedios del paralelo se deseen entre A y B. Sea $Ac = f$ una distancia cualquiera medida en la cuerda, y calculemos la pequeña parte $Cc = g$ del meridiano de c, comprendida entre la cuerda y el arco. Basta para esto recordar que si se designa por λ la diferencia de latitud entre A y c, ó lo que es lo mismo, entre C y c, se tiene:

$$\lambda = Af \cos. u - Bf^2 \text{ sen.}^2 u$$

y como el arco λ se convierte en medidas lineales dividiéndolo por A, hallarémos que $\frac{\lambda}{A}$ es la distancia g, y en consecuencia tendrá por valor:

$$g = f \cos. u - \frac{B}{A} f^2 \text{ sen.}^2 u$$

Atribuyendo, pues, á f diversos valores se obtendrán por esta ecuacion las distancias g de los puntos correspondientes de la línea geodésica al paralelo, las cuales medidas hácia el Sur en los meridianos respectivos darán otros tantos puntos del paralelo. Sin embargo, como por lo general es conveniente trazar esta curva por puntos equidistantes entre sí, llamando n una fraccion cualquiera que exprese la relacion entre la distancia $Ac = f$ y la cuerda total.....

$A\,c\,B = k$, se tiene $f = n\,k$, valor que introducido en la fórmula anterior produce:

$$g = n\,k\,\text{cos.}\,u - \frac{B}{A}\,n^2\,k^2\,\text{sen.}^2\,u = n\,y - \frac{B}{A}\,n^2\,x^2$$

y atendiendo al valor de y que consta arriba, se obtiene:

$$g = n\,y - n^2\,y = n\,(1-n)\,y$$

de donde resulta por último:

$$g = n\,(1-n)\,\frac{B}{A}\,k^2\,\text{sen.}^2\,u \qquad (3)$$

88.—De esta manera calculando una sola vez la parte $\frac{B}{A}\,k^2\,\text{sen}^2\,u$, comun á todas las ordenadas ó valores de g, con solo variar la fraccion n se obtendrán los coeficientes $n\,(1-n)$ que suministran con la mayor facilidad los elementos para situar muchos puntos del paralelo. Si, por ejemplo, se desea que el arco total $A\,C\,B$ quede dividido en 10 partes iguales, se hará sucesivamente n igual á 0.1, 0.2, 0.3,.....0.9, lo cual equivale evidentemente á demarcar 9 puntos equidistantes entre los extremos A y B.

No ofrece mayor dificultad la aplicacion de la fórmula cuando se desea que los espacios comprendidos entre esos puntos tengan una extension dada. Sea, en efecto, q esta equidistancia, ó la extension de los arcos parciales del paralelo: como la extension total de este es: $p = \frac{(L'-L)\,\text{cos.}\,\phi}{C}$ y está en nuestro arbitrio disponer del ángulo $L'-L$ que mide la diferencia de longitudes de los extremos de la línea geodésica auxiliar, si se desea establecer $m-1$ puntos intermedios, pondrémos la condicion $m\,q = p$, de donde resulta:

$$L'-L = \frac{C\,m\,q}{\text{cos.}\,\phi}$$

y despues de determinadas la direccion y la magnitud de la cuerda auxiliar por las fórmulas (2) con este valor de $L'-L$, se aplicará la (3) para calcular las ordenadas, haciendo sucesivamente en ella á n igual á $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$,..... $\frac{m-1}{m}$, para obtener los $m-1$ puntos intermedios, ó sea $m+1$ incluyendo los extremos.

Tampoco hay dificultad alguna cuando se quiere que todos los puntos que se fijen del paralelo resulten á intervalos iguales en longitud geográfica, por ejemplo, de 5′ en 5′; porque siendo $\triangle$ la diferencia constante de meridianos, se determinará el ángulo $L' - L$ con la condicion de que abrace m veces la cantidad $\triangle$, esto es:

$$L' - L = m \triangle$$

lo que evidentemente reduce este problema al anterior.

89.—Se ha dicho que en el término de cada distancia f contada desde el punto de partida A, se mide en el meridiano el valor de g correspondiente; pero para no verse en la necesidad de trazar astronómicamente el meridiano de cada punto c de la línea, determinemos el azimut de $c\,A$, del cual deducirémos en seguida el ángulo $A\,c\,C$, á fin de que formando este ángulo con la línea geodésica, se pueda medir desde luego la distancia g en la direccion conveniente. Como he designado por u el azimut $P\,A\,B$ de la cuerda, llamando $\triangle$ la diferencia de meridianos $A\,P\,C$ entre los puntos A y c, el azimut inverso en c será:

$$u' = 180° + u + \triangle \text{ sen. } \phi$$

En esta ecuacion he empleado ϕ en lugar de la latitud media de C y c, en atencion á la extremada pequeñez de la diferencia de las latitudes de esos puntos, la cual solo es de algunos segundos. Por la misma razon tomo la fórmula siguiente para expresar la relacion que existe entre $\triangle$ y f:

$$\triangle = \frac{C f \text{ sen. } u}{\cos. \phi} = \frac{C n k \text{ sen. } u}{\cos. \phi}$$

é introduciendo el valor de k suministrado por las ecuaciones (2), se obtiene:

$$\triangle = n\,(L' - L)$$

lo cual demuestra que las diferencias parciales de meridianos guardan con la total la misma relacion que las distancias correspondien-

tes f y k. Sustituyendo en u' el valor de $\triangle$, y el de u que dan las ecuaciones (2), resulta:

$$u' - 180^\circ = 90^\circ + (n - \tfrac{1}{2})\,(L' - L)\,\text{sen.}\,\phi$$

y como $u' - 180^\circ$ es igual al ángulo $A\,c\,C$ formado por la direccion de la línea geodésica con la de la ordenada g, si lo designamos por v se tendrá finalmente:

$$v = 90^\circ + (n - \tfrac{1}{2})\,(L' - L)\,\text{sen.}\,\phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

90.—Las fórmulas (2), (3) y (4) contienen todo el cálculo necesario para el trazo de un arco del paralelo; y debe notarse que solo el de k demanda el uso de logaritmos de siete cifras decimales, pues por la pequeñez de los otros elementos se tiene siempre la exactitud necesaria con logaritmos de cuatro ó cinco cifras. El coeficiente $n\,(1 - n)$ que entra en los valores de g llega á su *maximum* cuando $n = \frac{1}{2}$, y adquiere valores iguales para puntos equidistantes del centro de la línea geodésica, circunstancia que ofrece la ventaja de reducir á la mitad el número de cálculos respecto del de puntos que se quieran fijar en el paralelo. Una cosa análoga sucede en los valores de v, cuyo último término da resultados iguales y de signos contrarios para puntos equidistantes del medio de la cuerda. Conviene, por último, advertir que con los mismos valores puede demarcarse un arco igual del paralelo en la parte opuesta del meridiano, como seria $A\,B'$ en la figura; de suerte que por medio de cálculos sumamente sencillos se traza un arco de una amplitud igual á $2\,(L' - L)$.

Respecto de la demarcacion material, lo mas importante es determinar astronómicamente con la mayor exactitud el meridiano del punto de partida A, y con la misma precision formar el ángulo azimutal u. Las distancias $f = n\,k$ se miden despues sobre la línea, bien sea directamente ó bien por medio de una triangulacion topográfica, pues un pequeño error en ellas no produce notable error en el paralelo, como fácilmente se concibe por la inspeccion de la expresion de las ordenadas g. Finalmente, los ángulos v suministran las direcciones en que deben medirse estas ordenadas, que son siempre pequeñas.

Reunamos todas las fórmulas para hacer algunas aplicaciones.

$$u = 90° - \tfrac{1}{2}(L' - L)\,\text{sen.}\,\phi \qquad k = \frac{(L' - L)\cos.\,\phi}{C\,\text{sen.}\,u}$$

$$n = \frac{f}{k} \qquad g = n(1-n)\frac{B}{A}k^2\,\text{sen.}^2\,u \qquad v = 90° + (n - \tfrac{1}{2})(L' - L)\,\text{sen.}\,\phi \qquad \text{..... (5)}$$

Segun el tratado que celebró el gobierno de México con el de los Estados-Unidos, una de las líneas limítrofes entre las dos Repúblicas es un arco del paralelo 31° 47′ de latitud, que partiendo del punto en que corta al rio Bravo, tenga cien millas inglesas de extension. Calculemos los elementos necesarios para trazar este arco.

Como una milla inglesa tiene 1609^{m}315, las 100 millas equivaldrán á 160931^{m}5, y siendo en este caso la extension del arco el dato fundamental, calcularémos su amplitud $L' - L$ tomando de la Tabla de la pág. 36 el valor de 1°, que á la latitud de 31° 47′ se hallará ser de 94702^{m}6. Entónces por una simple proporcion tendrémos:

$$L' - L = \frac{160931^m5 \times 3600''}{94702^m6} = 1°\,41'\,57.''6$$

La direccion y la magnitud de la línea geodésica auxiliar serán, pues:

$\frac{1}{2}$ 9.69897

$L' - L$ ..... 3.78658 ..... 3.7865811

sen. ϕ ..... 9.72157 cos. ϕ 9.9294424

3.20712 C ..... —8.5093791

sen. u ..... —9.9999868

—26′ 51.″1 k 5.2066576

90 00 00. 0

$u = 89°\,33'\,8.''9$ $k = 160937^m6$

Supongamos ahora que se quisiesen puntos del paralelo á distancia de 10 millas uno de otro. Como esta es la décima parte de la

total, harémos sucesivamente $n=0.1$, $n=0.2$,..... $n=0.5$, pues la otra mitad del arco tendrá las mismas ordenadas.

	$n=0.1$	$n=0.2$	$n=0.3$	$n=0.4$	$n=0.5$
B.....	1.1975				
k^2.....	0.4133				
sen.^{2} u.....	9.9999				
A.....	—8.5115				
	3.0992.....	3.0992.....	3.0992.....	3.0992.....	3.0992
$n\,(1-n)$...	8.9542	9.2041	9.3222	9.3802	9.3979
g.....	2.0534	2.3033	2.4214	2.4794	2.4973
$g=$	113^m.1	201^m.0	263^m.9	301^m.6	314^m.1

El cálculo de los ángulos de direccion de las ordenadas será:

	$n=0.1$	$n=0.2$	$n=0.3$	$n=0.4$
$L'-L$.....	3.78658			
sen. ϕ.....	9.72157			
	3.50815.....	3.50815.....	3.50815.....	3.50815
$n-\frac{1}{2}$.....	9.60206—	9.47712—	9.30103—	9.00000
	3.11021—	2.98527—	2.80918—	2.50815
	—21′ 28.″9	—16′ 6.″7	—10′ 44.″4	—5′ 22.″2

Estos pequeños ángulos son los que deben sumarse con 90° para obtener las direcciones de las primeras ordenadas; y variándoles el signo suministrarán las de las últimas. De este modo pueden tabularse en la forma siguiente todos los elementos necesarios para fijar los 9 puntos intermedios del paralelo, con la equidistancia de 10 millas ó 16093^m.2.

ELEMENTOS PARA TRAZAR 100 MILLAS DEL PARALELO DE 31° 47′ DE LATITUD.

$k=160938^m$ $u=89°\ 33'\ 8.''9$

n	$n\,(1-n)$	f	g	v
0.1	0.09	16094^m	113.^{m}1	89° 38′ 31.″1
0.2	0.16	32187	201. 0	89 43 53. 3
0.3	0.21	48281	263. 9	89 49 15. 6
0.4	0.24	64375	301. 6	89 54 37. 8
0.5	0.25	80469	314. 1	90 00 00. 0
0.6	0.24	96563	301. 6	90 5 22. 2
0.7	0.21	112656	263. 9	90 10 44. 4
0.8	0.16	128750	201. 0	90 16 6. 7
0.9	0.09	144844	113. 1	90 21 28. 9

91.—Puede suceder que se ofrezca trazar un paralelo sin que sea posible fijar de antemano ni la extension total del arco ni la diferencia de meridianos de sus extremos. Este caso se le presentará probablemente á la Comision mexicana que tiene que demarcar en la Baja-California los paralelos de 27° y de 31° en virtud de la concesion hecha por nuestro gobierno á una Compañía de colonizacion, en la cual la faculta para establecer colonias en la zona de aquel territorio comprendida entre esos paralelos. La demarcacion de los arcos debe extenderse en consecuencia desde la costa del Pacífico hasta la del Golfo de California; pero como no se conoce con precision la anchura de la Península en esas latitudes, tampoco podrá hacerse el cálculo previo de la extension ó de la amplitud que aquellos deben abrazar. Esta circunstancia no ofrece, sin embargo, inconveniente alguno; porque no es indispensable que la cuerda auxiliar termine precisamente en las extremidades del arco, y por consiguiente puede adoptarse una amplitud ó una extension arbitrarias y con ellas hacer los trazos hasta llegar á ambos mares, si es que la Comision parte de un punto intermedio, como es natural y aun conveniente. En el caso de que me ocupo, teniendo la misma Comision que hacer el deslinde de los terrenos baldíos comprendidos en la zona de 27° á 31°, el mejor sistema que podria adoptar es el americano (Tomo I, pág. 390); y entónces utilizar en este otro trabajo el trazo de los paralelos, demarcándolos por puntos distantes 10000^{m} unos de otros, á fin de obtener así los de partida de las líneas divisorias de los lotes arreglados á las medidas decimales.

En este supuesto, los cálculos se harian de esta manera para el paralelo de 27° por ejemplo. Como á la latitud de 27° tiene $99243^{m}0$ el grado de paralelo, diez puntos que se demarcasen en él abrazan una extension de 100 kilómetros, y en consecuencia poco mas de 1°. Tomando la amplitud correspondiente á esa extension para calcular los elementos del trazo, se hallaria:

$$L' - L = \frac{3600'' \times 100^{k}}{99^{k}243} = 3627.''5$$

y aplicando las fórmulas con este dato se obtendria: $k = 100001^{m}$ y $u = 89°\ 46'\ 16.''6$.

Las absisas f expresadas en kilómetros, las ordenadas g expresa-

das en metros y los ángulos de direccion v de estas últimas, serian las que constan en la tabla siguiente:

ELEMENTOS PARA LA DEMARCACION
DEL PARALELO DE 27°.

$k = 100001^{m}$ $u = 89°\ 46'\ 16.''6$

n	f	g	v
0.1	10^{k}	35.^{m}9	89° 49′ 1.″3
0.2	20	63. 9	89 51 46. 0
0.3	30	83. 8	89 54 30. 6
0.4	40	95. 8	89 57 15. 3
0.5	50	99. 8	90 00 00. 0
0.6	60	95. 8	90 2 44. 7
0.7	70	83. 8	90 5 29. 4
0.8	80	63. 9	90 8 14. 0
0.9	90	35. 9	90 10 58. 7

Partiendo de un punto central, es evidente que con estos datos podria trazarse un arco de algo mas de 1°, tanto hácia el Este como hácia el Oeste, aun suponiendo que la Península abrazase en esa zona mas de 2°; pero si no fuese así, se señalarian los puntos que permitiese su anchura, y si se desease dejar señalados los extremos del paralelo en las playas, se calcularian los valores de n correspondientes á las distancias f de las costas al punto de partida, por la relacion $n = \frac{f}{k}$, y con estas se determinarian las últimas ordenadas. Supongamos, por ejemplo, que se llegó á la costa despues de haber demarcado el noveno punto, y que la distancia al lugar en que se comenzó el trazo es de 97600^{m}. Se tendrá: $n = 0.976$, y con este valor resulta la última ordenada $g = 9^{m}4$, y su ángulo de direccion $v = 90°\ 13'\ 3.''9$.

92.—Por las explicaciones y ejemplos que preceden se habrá comprendido que el ingeniero es dueño de escoger el valor de la amplitud $L' - L$ de una manera casi arbitraria, aunque procurando que no sea muy considerable á fin de que las distancias y las ordenadas no resulten demasiado grandes; y como el arco cuya amplitud es $L' - L$ tiene una extension $p = \frac{(L'-L)\cos.\phi}{\rho}$, y esta es igual á k sen. u, podemos deducir que hasta cierto punto tiene el operador la libertad de elegir el valor del azimut de su cuerda ó línea auxiliar. El azimut nunca deberá diferir mucho de 90° hácia el Oeste ó de 270° hácia el

Este, si quieren evitarse los inconvenientes á que acabo de referirme; y seria mejor proceder siempre de manera que fuese pequeña la diferencia $L' - L$ aun cuando se tratase de trazar un arco muy extenso. La razon de conveniencia es esta; la línea geodésica establecida en la direccion u, puede resultar con pequeñas desviaciones, no obstante la precaucion de señalar con el mayor cuidado aquellos de sus puntos solamente que sean indispensables para continuar su trazo, los cuales deberán situarse en las eminencias que vayan limitando el horizonte; y es claro que el efecto de cualquiera desviacion aumentará con la magnitud de la línea. Bajo este aspecto es sin duda preferible demarcar por partes el paralelo, escogiendo valores pequeños para $L' - L$, ó bien azimutes que se acerquen mucho á 90° para determinar las amplitudes correspondientes. Suponiendo, por ejemplo, que se deseara trazar un arco de 1° 30′ próximamente, podria hacerse la operacion en tres partes tomando para cada una $L' - L = 30'$; pues al paso que no habria que temer mucho el efecto de las desviaciones, las ordenadas resultarian muy pequeñas, y despues de fijar el último punto de cada arco parcial, podrian hacerse en él algunas observaciones de latitud para comprobar el trazo. Me parece, sin embargo, que una línea geodésica establecida por puntos á grandes distancias con un buen teodolito, debe resultar muy exacta, si se tiene cuidado de llevar en cuenta los errores de los niveles, de la colimacion, &c., cuyos efectos en los ángulos azimutales se han explicado en el Capítulo V.

93.—El mayor valor que puede darse al azimut es el de 90°, y entónces la línea geodésica será el arco $A\,B$ (fig. 31ª) del primer vertical de A. Este arco aparece en la figura como una tangente al paralelo, y por abreviacion lo llamaré así, sin olvidar lo que realmente es. Las ordenadas tales como $B\,C$ se contarán hácia el Norte partiendo de la tangente, con un ángulo de direccion $A\,B\,C$.

A fin de calcular los elementos necesarios para el trazo, tenemos que puesto que el azimut es de 90°, designando como ántes por $L' - L$ la amplitud del arco ó sea el ángulo $A\,P\,B$, la posicion geográfica del punto B se obtendrá por las fórmulas:

$$\phi' - \phi = -B\,k^2 \qquad L' - L = \frac{C\,k}{\cos.\,\phi}$$

El signo de $\phi' - \phi$ indica desde luego que la latitud ϕ' de B es

menor que la de A; pero como ya se sabe que el pequeño arco $B\,C$ ha de contarse hácia el Norte, designándolo por G expresado en metros, tendrémos que las coordenadas de C serán:

$$k = \frac{(L' - L)\cos.\,\phi}{C} \qquad G = \frac{B}{A}\,k^2$$

Para cualquiera otro punto intermedio, llamando f su absisa, g su ordenada y $\triangle$ la longitud correspondiente respecto de A, se tiene:

$$f = \frac{\Delta\cos.\,\phi}{C} \qquad g = \frac{B}{A}\,f^2$$

Pero suponiendo, como en el caso de la cuerda, que se quisiesen establecer puntos equidistantes del paralelo, designaré por n la relacion $\frac{f}{k}$ de una absisa cualquiera á la total. Sustituyendo, pues, por f su valor $n\,k$, resulta que las fórmulas necesarias son:

$$k = \frac{(L' - L)\cos.\,\phi}{C} \qquad g = \frac{B}{A}\,n^2\,k^2 = G\,n^2$$

Como se ve, las ordenadas crecen como los cuadrados de las distancias al punto de partida A, y de aquí se deduce que muy cerca de este punto casi se confunde el primer vertical ó sea la tangente con el arco del paralelo; pero que se separan rápidamente en seguida.

Si se designa por v el ángulo de direccion de las ordenadas, tendrémos: $v = 360° - u'$ y como el azimut inverso tiene por expresion: $u' = 270° + \triangle$ sen. ϕ, siendo $\triangle = n\,(L' - L)$, se hallará: $v = 90° - n\,(L' - L)$ sen. ϕ. Tambien puede expresarse v en funcion de k, pues sustituyendo por $L' - L$ su valor, resulta:

$$v = 90° - C\,n\,k\,\text{tan.}\,\phi$$

En resúmen las fórmulas que deben calcularse para trazar un arco de paralelo por medio de su tangente, son:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{(L' - L)\cos.\,\phi}{C} \\ G &= \frac{B}{A}\,k^2 \\ g &= G\,n^2 \\ v &= 90° - C\,n\,k\,\text{tan.}\,\phi = 90° - n\,(L' - L)\,\text{sen.}\,\phi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 6)$$

94.—Antes de aplicarlas hagamos notar que el valor de k es verdaderamente la extension p del arco de paralelo cuya amplitud es $L' - L$; y como si esta es muy grande podria resultar algo errónea la distancia k, busquemos un valor mas exacto. Con este fin, designando por θ la amplitud de AB, el triángulo rectángulo APB da:

$$\text{tan. } \theta = \text{tan. } (L' - L) \cos. \phi$$

Como por otra parte, se tiene $\theta = \text{tan. } \theta - \frac{1}{3} \text{tan.}^3 \theta$ &c., hallarémos:

$$\theta = \text{tan. } (L' - L) \cos. \phi - \tfrac{1}{3} \text{tan.}^3 (L' - L) \cos.^3 \phi$$

Se tiene tambien $\text{tan. } (L' - L) = (L' - L) + \frac{1}{3}(L' - L)^3$, y sustituyendo en la ecuacion anterior hasta los términos de tercer órden, resulta en segundos:

$$\theta = (L' - L) \cos. \phi + \tfrac{1}{2} \left((L' - L) \cos. \phi\right)^3 \text{tan.}^2 \phi \text{ sen.}^2 1''$$

y como $k = \frac{\theta}{C}$, se hallará por último:

$$k = \frac{(L' - L) \cos. \phi}{C} + (8.8940) \frac{\left((L' - L) \cos. \phi\right)^3 \text{tan.}^2 \phi}{C} \quad \ldots\ldots (7)$$

que es el valor que debe adoptarse cuando $L' - L$ exceda por ejemplo, de 1°, pues en otros casos es muy pequeño el último término.

Calculemos por este procedimiento los elementos para trazar las 100 millas del paralelo de 31° 47′, que forma parte de las líneas limítrofes entre México y los Estados-Unidos, recordando que su amplitud es: $L' - L = 1°\ 41'\ 57.''6$.

$L' - L$.....	3.7865811	Const.....	8.8940	B.....	1.1975		
cos. ϕ.....	9.9294424	tan.$^2\phi$.....	9.5843	k^2	0.4133	$L' - L$.....	3.78658
	3.7160235	cubo.....	1.1481	A...	— 8.5115	sen. ϕ.....	9.72157
C.....	— 8.5093791	.....	— 8.5094	G.....	3.0993		3.50815
	5.2066444		1.1170				—53′ 42.″2
				$G = 1256^m9$			90 00 00 0
1.er términº	= 160932m7					$v = 89°\ 6'\ 17.''8$	
2º id.	= +13. 1						
k	= 160945m8						

Este cálculo suministra las coordenadas extremas y el ángulo de

direccion de la última ordenada; pero si quieren establecerse, por ejemplo, otros nueve puntos intermedios del paralelo, se multiplicará sucesivamente por 0.1, 0.2,..... 0.9 el valor de $(L' - L)$ sen. ϕ; y por 0.01, 0.04,..... 0.81, cuadrados de los coeficientes anteriores, el valor de G, y de esa manera se obtendrán los elementos que siguen:

ELEMENTOS PARA TRAZAR 100 MILLAS DEL PARALELO DE 31° 47'

$k = 160946^m$ $\quad u = 90°\ 00'\ 00''$

n	n^2	f	g	v
0.1	0.01	16093	12.^{m}6	89° 54′ 37.″8
0.2	0.04	32186	50. 3	89 49 15. 6
0.3	0.09	48281	113. 1	89 43 53. 3
0.4	0.16	64373	201. 1	89 38 31. 1
0.5	0.25	80468	314. 3	89 33 8. 9
0.6	0.36	96563	452. 5	89 27 46. 7
0.7	0.49	112657	615. 9	89 22 24. 5
0.8	0.64	128754	804. 5	89 17 2. 2
0.9	0.81	144847	1018. 1	89 11 40. 0
1.0	1.00	160946	1256. 9	89 6 17. 8

La Comision americana de límites adoptó el método de la tangente para trazar este arco. No sé asertivamente qué procedimiento de cálculo aplicó Mr. Emory para determinar sus elementos; pero los que da para el punto establecido á 60 millas del de partida son los siguientes, que comparo con los que suministran las fórmulas anteriores.

	Segun mis fórmulas.	Segun Mr. Emory.
Latitud del extremo de la ordenada. $(\phi' = \phi - Bf^2)$	31° 46′ 45.″3	31° 46′ 45.″3
Ordenada extrema. (g)	452^{m}5	452^{m}4
Angulo de direccion de la ordenada. (v)	89° 27′ 46.″7	89° 27′ 47.″0

Se ve que todos estos elementos concuerdan muy bien con los del astrónomo americano.

95.—Dije ántes que nunca será prudente trazar un arco extenso por medio de una sola línea auxiliar; y esta regla es de mas importancia en el caso de seguir el método de la tangente en atencion á que las ordenadas van siendo mas y mas grandes á medida que crece la absisa. Lo mejor será trazar algunos miriámetros con la primera tangente $A\,B$ (fig. 31ª), y despues desde el último punto C trazar

otra tangente $C\,D$ para demarcar un nuevo arco, prosiguiendo así hácia un lado y otro del meridiano que pasa por el primer punto A de partida. Tambien de este modo se evita la necesidad de calcular la distancia k por la fórmula (7), pues cuando los arcos no pasan de 1°, se obtiene la exactitud suficiente por la primera de las (6).

Para ejercicio del lector pongo á continuacion los elementos necesarios para demarcar, de miriámetro en miriámetro, diez puntos del paralelo 27° á un lado y otro del meridiano, ó sea para trazar un arco de 20^{mir}, que abrazará una amplitud de 2° 00′ 55″.

ELEMENTOS PARA LA DEMARCACION
DEL PARALELO DE 27°.

$k = 100002^{m}$ $\qquad u = 90°\ 00'\ 00''$

n	f	g	v
0,1	10^{k}	4.^{m}0	89° 57′ 15.″3
0.2	20	16. 0	89 54 30. 7
0.3	30	35. 9	89 51 46. 0
0.4	40	63. 9	89 49 1. 3
0.5	50	99. 8	89 46 16. 7
0.6	60	143. 7	89 43 32. 0
0.7	70	195. 6	89 40 47. 3
0.8	80	255. 5	89 38 2. 6
0.9	90	323. 4	89 35 18. 0
1.0	100	399. 2	89 32 33. 3

Este arco podria trazarse cómodamente por medio de dos tangentes á cada lado del meridiano, cada una de las cuales tendria unos 50 kilómetros, y entónces la mayor ordenada no llegaria á 100 metros.

Al medir las coordenadas es preciso tomar en cuenta la altura de la localidad sobre el nivel del mar, pues los resultados del cálculo dan esas cantidades reducidas á la superficie del Océano. Por consiguiente siendo a la altura, la absisa que debe medirse en el terreno es:

$$F = f + f\frac{a}{R'}$$

ó bien su correccion será: $F - f = f\frac{a}{R'}$, segun lo demostrado en la pág. 69. En estas ecuaciones no hay inconveniente en tomar la normal N que corresponda á la latitud del lugar, en vez del radio R'

de la esfera osculatriz. De este modo los puntos del paralelo se obtendrán con la equidistancia que se desea, contada en la superficie del mar.

CAPITULO X.

LEVANTAMIENTO DE CARTAS GEOGRÁFICAS POR PROCEDIMIENTOS ASTRONÓMICOS.

96.—Indiqué en el Capítulo anterior las dificultades que presenta una triangulacion geodésica regular de cierta extension, tanto por el tiempo que demanda, cuanto por su costo. A causa de estas circunstancias, solamente se han emprendido trabajos geodésicos en grande escala en países comparativamente pequeños, muy poblados, y en los cuales las necesidades de la administracion han exigido operaciones exactas para la formacion de sus cartas geográficas. Nuestro país colocado en condiciones diametralmente opuestas, no tendrá en muchos años iguales exigencias; y por tanto, la experanza de que vaya formándose su Geografía no debe cifrarse en la ejecucion de grandes trabajos geodésicos que, por decirlo así, son los que vienen á perfeccionar una Geografía ya bastante avanzada, sino en la práctica de operaciones que suministren las bases de esa dilatada elaboracion, describiendo á la vez á grandes rasgos los caractéres mas prominentes de nuestro vasto territorio.

Los procedimientos astronómicos son los que llenan estas condiciones, ofreciendo al mismo tiempo respecto de los geodésicos la ventaja de ser mas económicos en atencion á que en general demandan ménos personal; la de una ejecucion comparativamente mas rápida y en consecuencia la de ser mas á propósito para los países que por su escasa poblacion, extenso territorio y pocos recursos no presentan toda la comodidad indispensable para una operacion geodésica. Otra superioridad que tienen los métodos astronómicos sobre los geodésicos consiste en que basta ejecutar ciertas observaciones en un punto cualquiera para que quede este fijado por su posicion geográfica, sin necesidad de enlazarlo con otros puntos ya dados de posicion, como se necesita en las triangulaciones. Para formar una cadena trigonométrica, ademas de la operacion larga y difícil de medir una ó mas bases, y de tener que elegir los vértices que reunan determinados requisitos, es del todo indispensable la condicion de visibilidad, quiere decir, la de que cada punto sea visible desde todos los que lo rodean; circunstancia que no se necesita en las operaciones astronómicas, á causa de la independencia absoluta con que por su medio puede fijarse la posicion de un lugar.

En cambio de estas ventajas, los procedimientos astronómicos nunca pueden presentar un enlace tan íntimo como los geodésicos, y en consecuencia, si los primeros suministran por lo general con mas exactitud las posiciones geográficas, los segundos dan mas precision en las distancias, y una vez ejecutadas las operaciones preliminares de la triangulacion, no demandan tanto trabajo como los astronómicos, cuyas observaciones son constantemente las mismas para cada punto.

Atendiendo á todas estas consideraciones, y combinando las ventajas especiales de ambos métodos, procuraré indicar un modo muy conveniente de practicar con rapidez las operaciones indispensables para la formacion de una carta geográfica con la exactitud bastante para cubrir por mucho tiempo las necesidades de nuestro país. Fundado este procedimiento en trabajos astronómicos, sus resultados no solo servirán de apoyo inmediato á las demas operaciones, sino que suministrarán bases permanentes y seguras utilizables en los futuros perfeccionamientos de nuestra Geografía.

97.—Supongamos para mayor claridad que en una extension de terreno de 20 á 25 leguas de diámetro se escoge un lugar central

desde el cual se descubra la mayor parte de los puntos que deban figurar en la carta, como poblaciones, haciendas, montañas notables, &c., y que al derredor de ese lugar y en las eminencias que limiten el horizonte se elijan otros cinco ó seis puntos que presenten las mismas condiciones que el primero. Si en cada una de esas estaciones se practican las observaciones astronómicas necesarias para determinar su posicion geográfica, se obtendrá un número considerable de bases formadas por los observatorios de dos en dos, á las cuales podrán referirse por medio de ángulos horizontales las posiciones de todos los demas puntos. Cada estacion servirá en seguida de punto central para proseguir la operacion, enlazándolo con nuevos puntos elegidos como se ha dicho, y continuando de una manera idéntica en toda la extension del territorio cuya carta se desea formar.

Como las extremidades de esas grandes bases se han determinado astronómicamente, no hay dificultad para calcular sus magnitudes y sus direcciones, aplicando las primeras fórmulas del Capítulo precedente, á saber:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(L' - L)\cos.\,\phi'}{C} \\ y &= \frac{\phi' - \phi}{A} + \frac{B}{A}x^2 \\ \tan.\,u &= \frac{x}{y} \\ k &= \frac{x}{\text{sen.}\,u} = \frac{y}{\cos.\,u} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

en las cuales ϕ, L y ϕ', L' representan respectivamente la latitud y la longitud de los extremos de la línea, siendo u su azimut y k su extension lineal. Los valores de A, B y C se toman de la Tabla de la pág. 139 para la latitud media $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$, segun se dijo en otra parte. Habiendo ya hecho alguna aplicacion de estas fórmulas, no juzgo necesario presentar en su totalidad nuevos cálculos numéricos, y solo consignaré aquí los siguientes datos y la resolucion que de ellos se deduce, á fin de que sirvan de ejercicio para el lector.

Ejemplo.—Las posiciones de los cerros de Ixtapalapa y de Chiconautla en el Valle de México son:

Chiconautla..... $\phi' = 19°\ 39'\ 11.''9$..... $L' = -41.''10$
Ixtapalapa..... $\phi = 19\ \ 20\ \ 41.\ \ 7$..... $L = -11.\ 83$

Las longitudes están expresadas en tiempo y referidas al meridiano de la Escuela de Ingenieros. Se hallará: $\phi' - \phi = 1110.''2$ y $L' - L = -438.''3$, elementos de los cuales resulta que el azimut de la línea *Ixtapalapa—Chiconautla* es: $u = 339° 29' 45.''4$ y su extension: $k = 36448^m3$.

El azimut en el Chiconautla seria:

$$u' = u - 180° + (L' - L) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(\phi + \phi') = 159° 27' 19.''1$$

Se comprende que por medio de observaciones angulares ejecutadas en las extremidades de una línea como esta, que tiene casi nueve leguas de largo, será fácil situar todos los puntos comprendidos dentro de un radio igual por lo ménos á la mitad ó á las dos terceras partes de esa distancia. Las torres de las ciudades, pueblos, haciendas, &c., las cimas de las montañas y todos los demas objetos que se juzguen dignos de figurar en las cartas, quedarán así referidos á una base conocida por su extension y su azimut, y en consecuencia el cálculo trigonométrico podrá suministrar los mismos elementos para cada uno de estos objetos. Es claro que algunos de los puntos fijados de esa manera podrán servir á su vez de estaciones, ya sea para detallar mas la carta, ya para proseguir las operaciones formando una triangulacion mas ó ménos regular.

98.—La exactitud con que se determine la línea fundamental depende de la que tengan los datos ó elementos observados $L' - L$ y $\phi' - \phi$; y como siempre hay que contar con los pequeños errores inevitables en todo género de medidas directas, es muy importante investigar cuál es la influencia de esos errores, y en qué circunstancia se reduce á la menor posible. Con este fin notemos, segun lo indican las fórmulas precedentes, que los valores de u y de k dependen inmediatamente de los de x é y; y por consiguiente estudiando la influencia que en estos tienen los errores de observacion será fácil hallar la que tendrán en la resolucion final del problema; pero como en esta clase de investigaciones es mas breve servirse de fórmulas aproximativas prescindirémos del segundo término del valor de y, que por su pequeñez influye muy poco en el resultado, y adoptarémos:

$$x = \frac{(L' - L) \cos. \phi'}{C} \qquad y = \frac{\phi' - \phi}{A} \qquad \text{tan. } u = \frac{x}{y} \qquad k = \frac{x}{\text{sen. } u}$$

Diferenciando las dos primeras con relacion á los elementos observados, se tiene:

$$\mathrm{d}x = \frac{\cos.\,\phi'}{C}\,\mathrm{d}\,(L' - L) \qquad\qquad \mathrm{d}y = \frac{1}{A}\,\mathrm{d}\,(\phi' - \phi)$$

y supondrémos que d $(L' - L)$ y d $(\phi' - \phi)$ representan los pequeños errores de observacion.

Si se diferencía ahora el valor de u, resulta:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\cos.^2 u} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{k^2\cos.^2 u}$$

de donde se obtiene sin dificultad:

$$\mathrm{d}u = \frac{\cos.\,u\,\mathrm{d}x - \mathrm{sen.}\,u\,\mathrm{d}y}{k}$$

Finalmente, el valor de k produce:

$$\mathrm{d}k = \frac{\mathrm{d}x - k\cos.\,u\,\mathrm{d}u}{\mathrm{sen.}\,u}$$

y sustituyendo el valor de du se halla:

$$\mathrm{d}k = \mathrm{sen.}\,u\,\mathrm{d}x + \cos.\,u\,\mathrm{d}y$$

Introduciendo en esta expresion los valores de dx y dy se encuentra por último:

$$\mathrm{d}k = \frac{\cos.\,\phi'\,\mathrm{sen.}\,u}{C}\,\mathrm{d}\,(L' - L) + \frac{\cos.\,u}{A}\,\mathrm{d}\,(\phi' - \phi)$$

ecuacion que representa el error originado en la distancia en virtud de los existentes en los datos. De las cantidades que constituyen los

coeficientes de los errores solo es dueño el observador de elegir el valor de u, porque todas las otras dependen de la latitud en que opera; y adoptando valores medios de A, C y ϕ', se tendrá:

$$\mathrm{d}\, k = 28.4 \text{ sen. } u\, \mathrm{d}\,(L' - L) + 30.8 \cos.\, u\, \mathrm{d}\,(\phi' - \phi)$$

Esta expresion manifiesta que la influencia de un pequeño error en la diferencia de longitudes observada varia en proporcion del seno del azimut; y por consiguiente se nulifica cuando u es igual á 0° ó á 180°, quiere decir, cuando las dos estaciones están bajo el mismo meridiano. El error que origina el que tenga la diferencia de latitudes disminuye, por el contrario, cuando crece el azimut, y se reduce á cero en el caso de ser u de 90° ó de 270°, ó lo que es lo mismo, cuando la línea esté dirigida de Oriente á Poniente.

En el supuesto de que tenga libertad el observador para escoger sus estaciones, debe procurar que la direccion de la línea se acerque al límite mas favorable para disminuir el efecto de aquel de los elementos observados que crea poder obtener con menor precision; y en este particular conviene advertir desde luego que la determinacion de la diferencia de latitudes es una operacion que en general se presta á mayor exactitud que la medida de la diferencia de longitudes. Esta última se hace siempre por medio de observaciones de tiempo para obtener las horas que se cuentan en las dos estaciones en un mismo instante físico; y como cada segundo de tiempo equivale á 15 de arco, resulta que una incertidumbre de $0^s.1$ en la diferencia de horas produce 1.″5 de duda en el valor de $L' - L$, sin que en general sea posible reducir los límites de aquella incertidumbre. La diferencia de latitud, por el contrario, puede obtenerse con mucha precision y en poco tiempo: creo que observando los mismos astros en las dos estaciones, haciendo uso de los mismos métodos y si es posible de los mismos instrumentos, es fácil obtener en muy pocos dias el valor de $\phi' - \phi$ con un error que no exceda de 0.″2, aun cuando las latitudes absolutas ϕ y ϕ' resulten con un error algo mas considerable, lo cual no es un inconveniente para el cálculo de la línea geodésica, puesto que en las fórmulas solo figura el coseno de la latitud, y bastan las latitudes aproximativas para tomar exactamente de la Tabla (pág. 139) los valores de A, B y C. Segun estas con-

sideraciones, siempre será preferible escoger las estaciones de Norte á Sur con muy poca diferencia, á fin de que no haya que temer mucho el efecto del pequeño error que pueda haber en $L' - L$.

Si las dos estaciones se eligen precisamente en el mismo meridiano, el error de la distancia se reduce á $d k = 30.8\ d\ (\phi' - \phi)$, y atribuyendo al error $d\ (\phi' - \phi)$ el valor de 0.″2, el error de la línea será de unos 6^m, el cual no se puede suponer muy considerable en este género de observaciones, y sobre todo, para una carta geográfica que se construye generalmente en pequeña escala. Un error de esta magnitud no representaria mas que una pequeñísima fraccion de una línea de 40 ó 50 kilómetros; y como con una gran base se pueden situar los puntos distantes por medio de visuales comparativamente cortas, resultarian las posiciones con errores realmente inapreciables en la carta.

99.—La dificultad de obtener con cierto grado de precision las diferencias de longitud, me sugirió la idea de sustituir á este elemento la medida directa del azimut de la línea, que es una operacion incomparablemente mas sencilla. En un opúsculo que con el título de «Coleccion de Tablas geodésicas,» publiqué hace algun tiempo, indiqué este procedimiento, que repetiré aquí por juzgarlo de bastante utilidad.

Si se determina la diferencia de las latitudes de dos puntos, y en uno de ellos se observa astronómicamente el azimut del otro, tendrémos que en la fórmula:

$$\phi' - \phi = A\, k \cos.\ u - B\, k^2\ \text{sen.}^2\ u$$

todo será conocido, con excepcion de k. Como el último término es siempre muy pequeño, no se altera sensiblemente su valor cuando se sustituye por k una cantidad aproximativa, y en consecuencia podrá determinarse un valor exacto de la distancia por aproximaciones sucesivas. Suponiendo nulo el último término se obtendrá por primera aproximacion: $k = \frac{\phi' - \phi}{A \cos.\ u}$, é introduciendo esta cantidad en el mismo término, resultará por valor prácticamente exacto:

$$k = \frac{\phi' - \phi}{A \cos.\ u} + \frac{B}{A}\left(\frac{\phi' - \phi}{A \cos.\ u}\right)^2 \text{sen.}\ u \tan.\ u \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Obtenida la distancia se calcula la diferencia de longitud de las dos estaciones, así como el azimut inverso, por las fórmulas:

$$L' - L = \frac{C\,k \text{ sen. } u}{\cos.\ \phi'}$$

$$u' = u \pm 180° + (L' - L) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(\phi + \phi')$$

y de esta manera se reunen todos los elementos necesarios para situar nuevos puntos respecto de esta base.

Ejemplo.—Tomando las latitudes de los cerros de Chiconautla y de Ixtapalapa, supongamos que en el primero de estos puntos se hubiera medido directamente el azimut del otro, siendo..... $u = 159° 27' 19''$ el resultado de la observacion. Adoptando los valores de A, B y C que corresponden á la latitud media 19° 30', tendriamos:

$\phi' - \phi$.....	3.0454012—	B.....	0.9555
A.....	—8.5122052	sen. u.....	9.5452
cos. u.....	—9.9714607—	tan. u.....	9.5738—
	4.5617353.....	cuad.....	9.1235
			9.1980—
	36453m2	A.....	— 8.5122
	—4. 9		0.6858—
k =	36448m3		

Este resultado es idéntico al que se obtuvo por el otro método. La misma distancia se hallaria suponiendo que la observacion azimutal se hubiese ejecutado en el Ixtapalapa y que se hubiera obtenido $u = 339° 29' 45.''4$, como lo manifiesta el cálculo siguiente:

$\phi' - \phi$.....	3.0454012	B.....	0.9555
A.....	—8.5122052	sen. u.....	9.5444—
cos. u.....	—9.9715762	tan. u.....	9.5728—
	4.5616198.....	cuad.....	9.1232
			9.1959
	36443m5	A.....	—8.5122
	+4. 8.....		0.6837
k =	36448m3		

Siendo en este método $\phi' - \phi$ y u los datos necesarios para la resolucion, investiguemos en qué condiciones se reduce á su *minimum* la influencia de los errores que puedan contener. Diferenciando con este objeto la fórmula aproximativa $k = \frac{\phi' - \phi}{A \cos. u}$, se halla despues de abreviar:

$$d k = \frac{1}{A \cos. u} d (\phi' - \phi) + \frac{(\phi' - \phi) \tan. u}{A \cos. u} d u$$

Esta expresion manifiesta que el efecto del error que tenga la diferencia de latitudes es el menor posible cuando las estaciones estén en el mismo meridiano, y que en las mismas circunstancias se nulifica la influencia del error del azimut observado; por consiguiente, debe procurarse que la línea quede casi establecida de Norte á Sur. Conviene notar, sin embargo, que para que exprese segundos el valor de $d u$ es preciso multiplicarlo por sen. 1″, y así es que su coeficiente será muy pequeño siempre que el azimut mismo no sea considerable. Como tambien un valor pequeño de u no altera mucho el coeficiente de $d (\phi' - \phi)$, se infiere que aunque la línea esté bastante inclinada respecto del meridiano, puede obtenerse muy buen resultado si se logra reducir á los menores valores posibles los errores de los elementos observados u y $\phi' - \phi$.

Se ve que en último resultado se obtienen tanto por el primer método como por el segundo, la magnitud y la orientacion de la línea que une las dos estaciones, así como las posiciones geográficas de estas. Con estos elementos y las medidas angulares practicadas en ambas extremidades para situar nuevos puntos, se determinan las distancias de esos objetos, sus azimutes y sus coordenadas geográficas. Los puntos mejor situados respecto de la línea sirven en seguida para enlazar otros, prosiguiendo así la operacion, y procurando siempre que se pueda, hacer observaciones astronómicas con el fin de determinar nuevas bases que sirvan de comprobacion, si es que la carta abraza una extension considerable.

Todo lo que antecede demuestra la facilidad con que pueden medirse astronómicamente una ó mas grandes bases para formar con rapidez la Geografía de vastas regiones con un grado de exactitud muy suficiente para las necesidades de nuestro país, al cual por consiguiente puede prestar servicios de mucha importancia un ingenie-

ro medianamente diestro en el manejo de los instrumentos astronómicos. Las dificultades que, segun he indicado, presenta la práctica de grandes operaciones geodésicas, me indujeron á exponer en este Capítulo los principales procedimientos con que aquellas pueden sustituirse, y espero que su lectura será bastante para demostrar que el porvenir de la Geografía de México depende por ahora de la ejecucion de trabajos puramente astronómicos.

PARTE SEGUNDA.

DETERMINACION DE LA FORMA Y MAGNITUD DE LA TIERRA.

CAPITULO I.

NOCIONES HISTORICAS.

100.—Las primeras apreciaciones relativas á la figura de la tierra es probable que se deban á los pueblos que desde la mas remota antigüedad se ocuparon del arte de la navegacion; porque el órden en que se van mirando desaparecer los objetos al alejarse de las playas, aquel en que van descubriéndose al acercarse á ellas, y la apariencia circular del horizonte que limita la vista en todas direcciones, son muy á propósito para inspirar las primeras nociones acerca de la forma general de su superficie. Acaso los fenicios hayan sido por esta razon los mas instruidos en este particular, pues parece que mas de 1000 años ántes de Jesucristo habian hecho ya largos viajes en el Mediterráneo.

La historia ha conservado, sin embargo, las ideas que se formaron de la tierra algunos hombres célebres de los antiguos pueblos; y así se dice que Heráclito suponia que era una llanura inmensa,

Leucipo creia que era un cilindro, Anaximandro la consideraba como una columna, Demócrito le atribuia la figura de un disco, y Cleantes, creyéndola cóncava, le daba la forma de una barca.

Tambien los primeros conocimientos en la Astronomía, ciencia que cultivaron las naciones mas antiguas, debieron contribuir á que se formasen ideas mas ó ménos exactas respecto de la tierra. Las observaciones mas sencillas como son las del orto, de la culminacion y del ocaso de los astros, las diversas apariencias del cielo en distintas localidades, el fenómeno de los eclipses del sol y de la luna, cuyas causas parece que comprendieron algunos de los primeros astrónomos, es probable que hayan producido el mismo resultado. Entre los astrónomos mas antiguos se cuenta á Tales de Mileto, quien segun Herodoto llegó á predecir un eclipse solar hácia el año 585 ántes de la era cristiana. Este filósofo atribuia á la tierra la forma esférica y la suponia flotando en las aguas. El filósofo Parménides, segun dice Aristóteles, fué el primero en enseñar que la tierra era redonda. El mismo Aristóteles y Arquímedes enseñaban que el mar era esférico, y segun Diógenes Laercio, los egipcios tenian los mismos conocimientos desde 400 años ántes de J. C.

Entre las naciones mas antiguas se hallan tambien ideas muy avanzadas acerca del movimiento del globo terrestre, aunque probablemente poco generalizadas. Parece que los egipcios tuvieron la primera idea de la rotacion de la tierra al derredor de un eje, y que Aristarco la comunicó á los griegos. Orfeo y Pitágoras, segun Diodoro, aprendieron de los egipcios la pluralidad de los mundos y la esparcieron en la Grecia. Plutarco dice que Filolao de Crotona, discípulo de Pitágoras, enseñaba 450 años ántes de J. C. el movimiento diurno de la tierra, y el de traslacion en un círculo al derredor del sol. Lo mismo enseñaba Nicetas de Siracusa, y posteriormente Aristarco de Samos.

Respecto de la magnitud de la tierra, las apreciaciones mas antiguas se deben á los caldeos, quienes cinco siglos ántes de la era cristiana decian que un hombre andando continuamente á pié le daria la vuelta en el mismo tiempo que el sol. Esta apreciacion me parece muy notable, porque revela un conocimiento bastante exacto del tamaño del globo terrestre. En efecto, siendo su circunferencia de poco mas de 9000 leguas, resulta que un hombre tendria que andar cosa de 25 cada dia para darle la vuelta en un año.

Los geómetras del tiempo de Aristóteles le atribuian 400000 estadios de circunferencia; y como el estadio equivalia, segun parece, á unos 180 metros, esta apreciacion es demasiado fuerte, pues casi duplica el valor del radio terrestre. Sin embargo, Aristóteles combatiendo la creencia de Xenofanes de que la tierra era inmensa, dice que por poco que se camine hácia el Norte ó hácia el Sur, se altera el horizonte; porque las estrellas meridionales que se veian en Chipre y en Egipto, no se veian ya en los países septentrionales y viceversa.

Ninguno de los apuntes históricos que he tenido ocasion de consultar indica los procedimientos por cuyo medio se hicieron las anteriores apreciaciones de la magnitud de la tierra. La medida mas antigua de que se hace mencion es la de Eratóstenes, que vivió cerca de tres siglos ántes de la era cristiana. El método que siguió este filósofo, si bien le dió resultados inexactos por falta de buenos medios de accion, es perfectamente racional, y el que se aplica hasta el dia con la perfeccion que han podido darle el adelanto de las teorías y la exactitud de los instrumentos modernos. El principio en que se funda es el siguiente: si en dos puntos A y B (fig. 32ª) de la superficie de la tierra, se miden simultánea ó sucesivamente las distancias zenitales ZAS y $Z'BS'$ de un mismo astro, puesto que las direcciones AS y BS' en que este se observa pueden suponerse paralelas á causa de su gran distancia á la tierra, tendrémos que ZAS es igual á ZDS'. Por otra parte, el triángulo BCD da la ecuacion: $ZDS' = DBC + BCD$; y sustituyendo por ZDS' el ángulo equivalente, se obtiene:

$$BCA = ZAS - Z'BS'$$

lo cual indica que el ángulo de las verticales es igual á la diferencia de las distancias zenitales de un astro, medidas en el plano formado por las mismas verticales. Segun este principio, si se mide en unidades lineales el arco AB, que expresa la distancia entre los dos puntos de observacion, se tendrán los dos valores lineal y angular de AB; y una simple proporcion suministrará la extension de toda la circunferencia.

Eratóstenes observó que el dia del solsticio de estío estaba el sol

exactamente vertical sobre la ciudad de Siena en el Alto-Egipto, lo cual dedujo de que á medio dia iluminaba hasta el fondo, un pozo muy profundo que allí se habia construido. En la misma fecha colocó en Alejandría una semi-esfera hueca, con la parte cóncava hácia arriba, provista de una varilla ó estilo vertical cuya longitud era igual al radio de la esfera. Al llegar el sol al meridiano midió el arco interceptado por la sombra del estilo, y halló que era de 7° 12′, el cual representaba evidentemente la distancia del sol al zenit de Alejandría; y como el mismo dia pasaba ese astro por el zenit de Siena, dedujo Eratóstenes que las verticales de las dos ciudades formaban un ángulo de 7° 12′, y en consecuencia, que la distancia que las separaba correspondia á ese arco. Midió en seguida la distancia itineraria, segun se cree, por el número de vueltas de las ruedas de su carro, y obtuvo 5000 estadios, de cuyos datos calculó que á toda la circunferencia de la tierra correspondian 250000 estadios.

Segun Cleomedes, que refiere la medida anterior, Posidonio, contemporáneo de Pompeyo el Grande, hizo otra apreciacion observando que en Rodas la estrella *Canopus* tocaba solo el horizonte en su paso por el meridiano; miéntras que en Alejandría culminaba á 7° 30′ de altura. Estimando tambien en 5000 estadios la distancia entre los dos puntos, le resultaron 240000 para toda la circunferencia.

Desde la época de estas operaciones trascurrieron mas de diez siglos en que no se sabe que se haya ejecutado una nueva medida de este género. Hácia el siglo VI de la era cristiana, los árabes, emancipados del yugo romano, fundaron su poderoso imperio en Bagdad, conquistando toda la Siria, parte del Africa y de la Europa. El Califa Almamoun, hijo del famoso Harum-al-Raschid, y que ascendió al trono en 814, era un príncipe muy dedicado al estudio de la Astronomía, y mandó ejecutar la medida de un grado del meridiano terrestre, enviando una comision de astrónomos á las llanuras de Fingar á orillas del Mar-Rojo, con órden de que partiendo de un punto fijo, midiesen hácia el Norte y hácia el Sur las distancias necesarias hasta que obtuviesen 1° de variacion en la altura meridiana de una estrella. Una de las medidas dió 56 y la otra $56\frac{2}{3}$ millas de 4000 cúbitos ó codos; pero no se sabe con exactitud la relacion de las medidas árabes de aquella época con las nuestras, y

así es que diversos autores han estimado el grado de los árabes desde 47000 hasta 62000 toesas. (*)

Despues de esta operacion trascurrieron siete siglos para que se volviese á ejecutar otra medida del grado terrestre. En 1550 Juan Fernel, médico y astrónomo frances, midió tambien por el número de vueltas de las ruedas de su carruaje, una distancia desde Paris hácia el Norte, observando en ambas extremidades las alturas meridianas del sol. La comparacion de estas con la distancia recorrida dió 56746 toesas por valor del grado del meridiano terrestre, resultado que no se aleja mucho de los obtenidos por las medidas modernas.

La operacion de este género que se practicó despues se debe á Snell, quien publicó sus resultados en la obra titulada «*Eratosthenes Batavus, de Terræ ambitus vera quantitatæ*». En esta operacion dió su autor un gran paso hácia la perfeccion, sustituyendo por la primera vez con una cadena de triángulos la medida material de la distancia itineraria, método que con toda la exactitud á que se presta la ciencia moderna, es el que se sigue hasta hoy. El valor que Snell halló para el grado terrestre es el de 55100 toesas, demasiado pequeño á causa de que la medida angular no correspondió en precision á la lineal; pero rectificada posteriormente la primera, se ha hallado que aquel valor debió ser de 57033 toesas, que concuerda bien con los resultados recientes.

En 1634, el P. Riccioli, de la Compañía de Jesus, midió una distancia entre Módena y Bolonia, que comparó despues con la amplitud correspondiente para obtener el valor del grado, que le resultó de 61500 toesas próximamente, á consecuencia de la poca precision de sus operaciones. Parece que este geómetra en lugar de medir astronómicamente el elemento angular, lo dedujo de la observacion de las distancias zenitales recíprocas de las extremidades de su línea, pues es fácil cerciorarse de que la suma de estas es suplementaria del ángulo de las verticales.

De 1633 á 1635 Ricardo Norwood midió el arco comprendido entre la ciudad de York y la Torre de Lóndres, haciendo uso de una cadena metálica; y por observaciones del sol halló que la diferencia de latitud entre los dos puntos era de 2° 28′, de lo que dedujo que el grado tenia por valor 57423 toesas.

(*) La toesa francesa equivale á $1^{m}.94904$

En 1669 hizo Picard una triangulacion entre Sourdon, cerca de Amiens, y Malvoisine en las inmediaciones de Paris, y comparada la distancia total con su amplitud angular, halló 57060 toesas por valor de un grado. La parte astronómica fué repetida por Maupertuis y Clairaut en 1739, y en virtud de las rectificaciones que le hicieron, resulta el grado de 57183 toesas.

101.—Tal era el estado de la cuestion hácia la época en que Newton estableció su célebre teoría de la gravitacion universal. Hasta este tiempo creo que nadie habia dudado de la perfecta esfericidad del globo terrestre, aunque parece extraño que las discordancias halladas en el valor del grado no hubiesen inducido á los geómetras á formar otras hipótesis, sobre todo en una época en que se hicieron tantas respecto de todos los ramos de las ciencias físicas. Despues de mucho tiempo de trabajo y de meditacion, Copérnico habia restablecido desde 1543 el sistema de Pitágoras relativo al doble movimiento de rotacion y de traslacion de la tierra, y aunque combatido por Tycho-Brahe á principios del siglo XVII, fué adoptado por Galileo, y segun toda probabilidad por la mayor parte de los astrómonos de la época; pero la ignorancia y el fanatismo religioso vieron en el nuevo sistema un ataque al texto de las Escrituras, y en consecuencia lo condenaron como herético, llevando la exajeracion hasta el grado de obligar á Galileo en 1634 á que hiciese una pública abjuracion de sus doctrinas astronómicas.(*)

El gran principio de la gravitacion universal, las teorías de Huygens sobre la fuerza centrífuga y la del movimiento de la tierra, que cada dia se iba robusteciendo no obstante la prohibicion de que era objeto, vinieron á modificar las ideas generalmente recibidas acerca de la figura del globo terrestre, y á dirigir la atencion de los geómetras hácia nuevas investigaciones. Combinando Newton la pesantez con la fuerza centrífuga que adquiere un cuerpo girando al derredor de un punto, hizo ver en su obra titulada «*De principia,*» publicada en 1687, que la tierra no debia ser esférica sino esferoidal; y supo-

(*) El ilustre anciano se vió obligado por la Inquisicion á firmar la siguiente retractacion: «*Yo, Galileo, á los 70 años de mi edad, constituido preso, arrodillado y teniendo ante mi vista los Santos Evangelios que toco con mis manos, con una fé y un corazon sincero abjuro, maldigo, detesto el error y la heregía del movimiento de la tierra, &c.*» Se refiere que al levantarse, no pudiendo por mas tiempo traicionar sus convicciones adquiridas por tantos años de estudio, exclamó: «*e pur si muove!*» (Y, sin embargo, se mueve!)

niendo que en el orígen de los tiempos hubiera tenido un estado de fluidez homogénea, demostró que la forma que debió adquirir por la rotacion es la de un esferoide cuyos radios polar y ecuatorial estuviesen en la relacion de 229 á 230, ó cuyo aplanamiento fuese de $\frac{1}{230}$. Fundándose en los mismos principios, presentó como consecuencia necesaria de la atraccion ejercida por el sol y la luna sobre la prominencia ecuatorial del globo, el fenómeno de la precesion de los equinoccios, que descubierto por Hiparco 18 siglos ántes, habia sido reconocido por todos los astrónomos, aunque sin explicacion satisfactoria.

Las propias teorías sirvieron á Newton para explicar un hecho reciente, que habia llamado mucho la atencion de los geómetras: en 1671 el astrónomo Richer fué enviado á Cayena con el fin de practicar algunas observaciones, y con este objeto arregló un péndulo en Paris ántes de su partida; pero al llegar á Cayena vió que atrasaba mas de 2 minutos cada dia. Este hecho, que casi constituia una prueba experimental de la rotacion del globo, se explicaba perfectamente por la diminucion de la pesantez hácia el ecuador originada por la mayor distancia al centro de atraccion, por la existencia de la fuerza centrífuga, ó por ambas causas á la vez.

Como era de esperarse, las ideas de Newton encontraron una fuerte oposicion, y se suscitó entre los geómetras una controversia sostenida por argumentos mas ó ménos ingeniosos, conforme al espíritu de la época, mas bien que por medio de pruebas obtenidas por la experimentacion directa. Quizá las creencias religiosas mas que las científicas contribuyeron á mantener la discusion; porque es claro que aceptando la existencia de la fuerza centrífuga para explicar el hecho del decremento de la pesantez, se tenia que admitir la rotacion diurna del globo, condenada entónces por la Iglesia.

Este estado guardaban las cosas cuando Cassini ejecutaba la medida del meridiano de Francia; trabajo que emprendido en 1684 bajo la proteccion de Colbert, ministro de Luis XIV, vino á terminarse hasta 1718, habiendo sufrido una interrupcion á la muerte del mismo Colbert. Los astrónomos y los geómetras esperaban ansiosos el resultado de esta medida, porque era el que debia poner término á la cuestion de la forma de la tierra. En efecto, si el globo era realmente aplanado hácia los polos, los grados del meridiano deberian tener extensiones crecientes á medida que aumentase la latitud;

miéntras que siendo esférico, estos grados deberian ser exactamente los mismos en cualquiera latitud; y como la operacion de Cassini, ejecutada con un esmero desconocido hasta entónces, abrazaba varios grados cuyas extensiones se podrian determinar individualmente, se creyó con fundamento que seria segura la resolucion experimental al terminarse la medida.

Sin embargo, el resultado de esta, léjos de resolver el problema, vino á complicarlo, desconcertando completamente á todos los que habian tomado parte en tan acalorada discusion. El arco comprendido hácia el Sur de Paris, entre esta ciudad y Collioure, dió 57097 toesas para el grado; miéntras que el comprendido hácia el Norte, entre Paris y Dunquerque, le asignó 56960, indicando por consiguiente una forma del todo opuesta á la calculada por Newton; pues el decremento de los grados á medida que aumentaba la latitud, solo podia convenir á un esferoide prolongado hácia los polos.

Un resultado tan contrario al que se deducia de las doctrinas de Huygens y de Newton, hizo crecer naturalmente la oposicion que se les hacia; pero el gran geómetra inglés no cejó en sus teorías. Newton es cierto que tenia en su contra el resultado de la medida de Cassini; pero tambien tenia en su favor el decremento de la gravedad en el ecuador, que entretanto se habia comprobado con numerosas experiencias. En ese tiempo tambien se habia ya puesto fuera de duda la rotacion del planeta Júpiter, y aun se conocia su fuerte aplanamiento polar: natural era que apoyándose en este nuevo hecho, el vasto ingenio de Newton no viese una prueba decisiva en una operacion geométrica sujeta á errores, que por pequeños que fuesen, bastarian quizá para conducir á una conclusion contraria á la verdad; puesto que admitiendo él mismo que la forma de la tierra debia diferir muy poco de la esférica, la desigualdad de los grados, por ser muy pequeña, podria confundirse fácilmente con los errores inevitables de las observaciones geodésicas y astronómicas.

La fuerza de estas razones decidió á la Academia de Ciencias de Paris á promover una nueva experimentacion, eligiendo para medir arcos del meridiano, dos lugares muy distantes en latitud, á fin de hacer mas perceptible de esa manera cualquiera diferencia que se encontrase en las extensiones de los grados correspondientes. Acogido favorablemente el pensamiento por Maurepas, ministro de Luis XV, se organizó la memorable expedicion de Bouguer, Lacondami-

ne y Godin al ecuador, y la de Maupertuis, Clairaut, Lemonnier y Outhier á Laponia, cuyas operaciones dieron definitivamente la victoria á Newton.

102.—La primera de estas comisiones, auxiliada en sus trabajos por los astrónomos españoles D. Jorge Juan y D. Antonio de Ulloa, midió cerca de Quito un arco de mas de 3°, obteniendo la extension de 56748 toesas para el grado ecuatorial. La segunda halló en Laponia que un grado tenia 57422, ó sea 674 toesas mas que el del ecuador. Entretanto se repitió la medida del meridiano de Francia, descubriéndose en esta segunda operacion algunos errores que fueron la causa de la conclusion á que habia llegado Cassini.

Los arcos de América, Francia y Suecia indicaron, como he dicho, un incremento en la extension de los grados, desde el ecuador hácia los polos; pero los tres valores no concordaron en la asignacion de las magnitudes relativas de los diámetros ecuatorial y polar. La comparacion del arco americano con el sueco da $\frac{1}{21\frac{1}{3}}$ por aplanamiento, miéntras que comparado con el frances produce $\frac{1}{31\frac{1}{4}}$. La exactitud con que se practicaron estas operaciones no permite quizá atribuir la discordancia á errores puramente de observacion; y por otra parte, el arco de Laponia que se volvió á medir de 1801 á 1803 por Swamberg con algun aumento de amplitud, aunque está mas de acuerdo con el resto de las medidas practicadas posteriormente, no produce, sin embargo, exactamente el mismo aplanamiento que el que da el arco de Francia comparado con el de América.

Tanto por estas discordancias, como porque una vez impreso el primer movimiento hácia la experimentacion directa, los geómetras de todos los países quisieron contribuir con sus trabajos á la resolucion completa de un problema tan interesante, casi en todas las naciones se emprendieron con este fin operaciones geodésicas y astronómicas. Haré una rápida mencion de las principales. Desde 1750 los PP. jesuitas Boscovich y Lemaire midieron un arco de Roma á Rimini. En 1752 Lacaille midió otro en el cabo de Buena-Esperanza; Liesganig en 1762 en las inmediaciones de Viena; y el P. jesuita Beccaria en la Lombardía, hácia la misma época. En 1764 los astrónomos Mason y Dixon midieron en Pensilvania un arco casi de grado y medio de amplitud; y en 1786 el general Roy prolongó el meridiano de Francia al traves de la Inglaterra. En el año de 1791 y los siguientes repitió la medida del meridiano de Francia el célebre

Delambre en compañía de Mechain, el cual prolongaron mas tarde (1806) Biot y Arago hasta las islas Baleares. Este arco en su totalidad abraza mas de 12°, y con su ayuda se calculó la extension del cuadrante del meridiano, que como se sabe, es la distancia que se tomó por tipo para establecer el sistema decimal frances de pesos y medidas.

Ademas de estas operaciones, se han medido, especialmente en Francia é Inglaterra, arcos de paralelos al ecuador; y otras veces se han combinado las extensiones de arcos del meridiano con arcos de paralelo. Todos los resultados, sin excepcion, indican un aplanamiento polar; pero por lo general no concuerdan exactamente en el valor de este. Las discordancias son á la verdad muy pequeñas; pero no han podido desaparecer, no obstante la precision de los instrumentos que se han empleado en las operaciones y el límite casi insensible á que han podido reducirse los errores de observacion.

103.—Antes de hacer mencion de las principales operaciones geodésicas que se han practicado en este siglo tambien con el fin de determinar la figura de la tierra, indiquemos otros procedimientos que igualmente se han aplicado al mismo objeto. Todos ellos están fundados de una manera mas ó ménos directa en el principio de la atraccion. En 1740 presentó Maclaurin á la Academia de Ciencias una memoria referente á este asunto, en la cual demuestra que si la tierra hubiera sido al principio formada por un fluido homogéneo, el aplanamiento que ha debido tomar seria igual á los $\frac{5}{4}$ de la relacion entre la fuerza centrífuga y la pesantez en el ecuador. Como esta relacion se estima en $\frac{1}{289}$, se deduce del teorema de Maclaurin: $a = \frac{5}{1156} = \frac{1}{231}$, que es casi el mismo resultado de Newton.

En 1743 publicó Clairaut una obra con el título de «*Figura de la tierra,*» en la cual aplica las condiciones de que depende el equilibrio de una masa fluida para descubrir la forma que esta debe tomar, ya sea en la hipótesis de que el fluido, siendo homogéneo, tenga por núcleo una materia de diversa densidad, ya suponiendo heterogénea toda la masa. En ambas circunstancias, con todas las diversas combinaciones de que son susceptibles, resulta que la forma es la de un elipsoide; que la extension de los grados crece como los cuadrados de los senos de las latitudes, y que el aplanamiento polar es igual á los $\frac{5}{2}$ de la relacion que existe entre la fuerza centrífuga y la gravedad en el ecuador, ménos el incremento de pesantez del ecuador

al polo. Siendo este incremento de $\frac{1}{192}$ próximamente en el globo terrestre, resulta segun el último teorema: $\alpha = \frac{5 \times 1}{2 \times 289} - \frac{1}{192} = \frac{1}{290}$.

Laplace en su «*Mecánica celeste*» indicó tambien un medio de hallar el aplanamiento ó compresion polar, demostrando que la prominencia ecuatorial de la tierra deberia producir alguna alteracion en el movimiento de la luna. Hallada, en efecto, por la observacion la pequeña irregularidad del movimiento de nuestro satélite, la cual asciende á unos 8″, se ha podido tomar como elemento para determinar la prominencia que la origina, resultando del cálculo $\alpha = \frac{1}{301}$ con muy poca diferencia.

Tambien se ha procurado determinar la forma de la tierra por medio de numerosas observaciones del péndulo. El fundamento de este método se comprenderá fácilmente recordando que el tiempo que dura la oscilacion de un péndulo depende tanto de su longitud como de la intensidad con que obra la pesantez en el lugar de la experiencia; y como la accion de esta fuerza crece del ecuador á los polos á consecuencia de la forma aplanada del globo terrestre, resulta que midiendo en dos ó mas lugares las longitudes de los péndulos que oscilen en determinado tiempo, por ejemplo, en un segundo, la comparacion de esas longitudes podrá servir para hallar el valor de la compresion polar.

Muy numerosas han sido las observaciones del péndulo. Hice ya mencion de las experiencias de Richer, que dieron á conocer por la primera vez la variacion de la gravedad. Ademas de estas, hizo Deshayes otras varias en las Antillas y en algunos puntos de las costas Sur-Americanas. Croyère observó el péndulo en Arcángel; Campbell, Lacondamine, Godin y Bouguer en las inmediaciones del ecuador; Maupertuis en Suecia; Lacaille en el cabo de Buena-Esperanza; Legentil en varios lugares de Asia; Malaspina en las costas de América; y por último, muchos observadores modernos como Kater, Ross, Parry, Hall, Brisbane, Sabine, Warren, Goldinghan, Foster, Freycinet, Duperrey, Biot. Arago, Rumker, Fallows, Baily, &c., han medido la longitud del péndulo en diversos puntos del globo

104.—Ademas de muchas observaciones del péndulo, se han ejecutado en el siglo actual varias operaciones geodésicas de la mayor exactitud, entre las cuales superan por su extension á cuanto se habia hecho anteriormente, las medidas practicadas en la India por los geógrafos ingleses Lambton y Everest, y en Rusia por Hansteen

Selander, Struve y Tenner. El arco de la India se midió de 1802 á 1843, y comprende mas de 21°. El arco ruso se comenzó á medir en 1820; hasta 1851 iban medidos mas de 25°, y en 1857 inició Struve su prolongacion al traves del territorio turco, la cual acaso se ha llevado á efecto.

Todas estas operaciones indican la existencia de la compresion polar; pero subsisten aún pequeñas discordancias respecto de su valor, no obstante la magnitud de las medidas modernas y la suma precision con que se han practicado. La falta de armonía entre los resultados que se obtienen comparando diversos arcos, se ha explicado de varias maneras. Una de las causas de error, acaso la mas influente, es la atraccion que ejercen las montañas, la cual combinándose con la atraccion general de la tierra, producen ligeras desviaciones en la direccion de la gravedad; y como esta direccion es la que sirve para medir astronómicamente las amplitudes de los arcos, resulta que todo el efecto de una atraccion anormal entra como error en el elemento angular ó astronómico. En el dia parece bien comprobado que algunas montañas hacen desviar mas de 5″ la direccion de una plomada, y este pequeño ángulo originaria un error equivalente á mas de 150^{m} en el elemento lineal, puesto que cada segundo contado en el meridiano excede de 30^{m}. Por otra parte, la tierra puede no ser exactamente un sólido de revolucion, ó aun cuando lo sea en su conjunto, es posible que tenga irregularidades locales, ya sea en cuanto á la forma, ya en cuanto á la densidad de las sustancias que la constituyen.

En vista de la imposibilidad de coordinar con entera precision los resultados de todas las medidas practicadas hasta hoy, lo que han hecho muchos geómetras, especialmente Walbek, Schmidt, Bessel, Airy y últimamente Schubert, es investigar cuál es la figura que se aviene mejor con el conjunto de las operaciones dignas de mas confianza. El resultado general de estas discusiones manifiesta que sin error de importancia se puede considerar á la tierra como un elipsoide de revolucion al derredor de su eje polar. Con el fin de que se comprenda hasta qué grado de exactitud ha podido alcanzarse en la apreciacion de los elementos que caracterizan al elipsoide, pongo á la vista los valores que han obtenido algunos geómetras:

	Radio ecuatorial.	Radio polar.	Aplanam^{to}
Walbek	6376746^{m}.	6355785.	$\frac{1}{302.8}$
Schmidt	6376959.	6355523.	$\frac{1}{297.3}$
Bessel	6377397.	6356079.	$\frac{1}{299.2}$

Esta comparacion demuestra que es relativamente muy pequeña la incertidumbre que aun queda en las dimensiones del globo terrestre; y que cualquiera de los valores precedentes debe proporcionar cuanta exactitud práctica demanden la mayor parte de las aplicaciones usuales. En la Parte Primera de esta obra adopté los elementos de Bessel, que son los que se emplean mas generalmente.

Se han hecho tambien diversas discusiones de las medidas del péndulo, aplicando diferentes procedimientos de cálculo. Los resultados son por lo general mas acordes entre sí que los de las medidas geodésicas, aunque dan por aplanamiento una cantidad notablemente mayor que estas últimas. La compresion que se deduce de las experiencias del péndulo puede estimarse en $\frac{1}{288}$, variando entre los límites $\frac{1}{285}$ y $\frac{1}{291}$.

105.—En 1859 ha publicado Schubert en San Petersburgo una memoria con el título de «*Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre.*» La novedad de las consecuencias que deduce este astrónomo me obligan á dar una idea de su método de discusion y de sus resultados. En todas las investigaciones anteriores se han admitido las tres hipótesis siguientes: 1ª Los meridianos son elípticos. 2ª El diámetro polar es tambien el eje de rotacion de la tierra. 3ª Todos los meridianos terrestres son iguales. Aunque en todo rigor ninguna de ellas esté suficientemente comprobada, Schubert es de opinion que las dos primeras son sumamente probables; pero no así la última, que por el contrario, parece falsa. En consecuencia, aceptando nada mas las dos primeras, se vale de los dos grandes arcos de la India y de Rusia para calcular el semieje menor de la tierra, que es comun á todos los meridianos. En seguida, por medio de los arcos mas notables calcula los radios ecuatoriales que les corresponden, y hallando diversos resultados, deduce que el ecuador no es exactamente circular, sino ligeramente elíptico. Para determinar esta elipse bastan tres de sus radios y los ángulos que forman entre sí, ó sean sus diferencias de longitud; y así es que calculando los tres radios por medio de otros tantos arcos bien elegidos, encuentra el escritor los siguientes elementos para la elipse ecuatorial:

Semi-eje mayor del ecuador..... 6378554 metros
Semi-eje menor del ecuador..... 6377837 „
Elipticidad ó aplanamiento del ecuador..... $\frac{1}{8\,9\,3}$
En cuanto al radio polar de la tierra, resulta de 6356721 metros

Los meridianos que cortan al ecuador segun los ejes mayor y menor de este, serán en consecuencia el mayor y el menor meridianos de la tierra respectivamente, cuyas elipticidades estima Schubert de este modo:

Compresion polar del mayor meridiano..... $\frac{1}{2\,9\,2.1}$
Compresion polar del menor meridiano..... $\frac{1}{3\,0\,2.0}$

El menor de estos meridianos pasa al Este de la Siberia, y en este hemisferio por Terranova y cerca de las costas orientales de América. El mayor por la Europa oriental, no muy léjos del gran arco medido en Rusia. Convendria ciertamente que en todos esos países se hiciesen nuevas operaciones geodésicas con el fin de averiguar hasta qué punto son ciertas las consecuencias de la discusion de Schubert.

Se ve, pues, que segun este geómetra, aparece la tierra como un esferoide de tres ejes; pero aun aceptando todas sus conclusiones, se advierte igualmente la pequeñísima diferencia que existe entre esa forma y la mas sencilla de un elipsoide de revolucion, pues el exceso de 717^m del radio máximo sobre el mínimo del ecuador apenas llega á 0.0001 del valor de estos. Por consiguiente puede creerse que sean cuales fueren los progresos futuros que se hagan en cuanto á la asignacion de la forma real de nuestro planeta, es indudable que en la mayor parte de las aplicaciones será suficientemente exacto uponerlo un elipsoide de revolucion al derredor de su eje polar.

CAPITULO II.

INVESTIGACION DE LA FORMA DE LA TIERRA POR MEDIO DEL PRINCIPIO DE LA GRAVITACION.

106.—Por extensa que sea esta materia, y por numerosas que hayan sido las aplicaciones á que ha dado orígen el fecundo principio de la gravitacion universal para determinar la figura de la tierra, creo indispensable presentar una breve exposicion de los principales procedimientos, para dar una idea de las investigaciones teóricas y de los métodos de experimentacion directa que se han aplicado á aquel objeto.

Los principios de la Mecánica, aplicados á los fluidos y combinados con las propiedades características de estos, han dado á conocer las condiciones que deben reunirse para que subsista el equilibrio en una masa fluida. Desde luego la presion que sufre un punto cualquiera de la masa en una direccion determinada, debiendo trasmitirse en todos sentidos, es necesario que sea destruida por la resultante de las demas presiones que se ejerzan en el mismo punto. Si se designan por x, y, z las coordenadas de un punto de la masa fluida, referidas á tres planos rectangulares, y llamamos F la fuerza que produce la presion en ese punto, podrémos descomponer ó resolver la fuerza F en otras tres X, Y, Z dirigidas en el sentido de cada uno de los ejes, y siendo ρ la densidad del fluido, la primera condicion matemática del equilibrio requiere que sea una diferencial

exacta la expresion $\rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$, cuya integral representa la presion total que se ejerce en la unidad de superficie. (*)

Una vez satisfecha la condicion anterior, si se desea hallar la forma de la masa fluida, es necesario atender á que si en su superficie externa se ejerciera una presion, no pudiendo el fluido oponer resistencia alguna en atencion á la perfecta movilidad de sus moléculas, se destruiria el equilibrio; luego en el supuesto de que este exista, es preciso admitir que es nula la presion en la superficie. Así es que siendo x, y, z las coordenadas de un punto de la superficie externa de la masa, deberán satisfacer la ecuacion:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y la integral de esta dará la ecuacion de la superficie, ó sea la forma general de la masa fluida.

Admitamos en el globo terrestre un estado primitivo de fluidez, é investiguemos la forma que debió tomar en virtud de la rotacion al derredor de su eje, y de la atraccion que sufren sus moléculas en virtud de la gravedad, suponiendo que el centro de atraccion coincide con el de la masa, ó lo que es lo mismo, que esa fuerza se ejerce en la direccion del radio. Dos fuerzas obrarán entónces en cada partícula de la tierra: la gravedad, que las atrae en razon inversa de los cuadrados de las distancias, y la fuerza centrífuga que tiende á alejarlas del eje de rotacion. Para encontrar las componentes X, Y, Z, de estas fuerzas en las direcciones de los tres ejes, sean $CN = x$, $NP = y$, $PM = z$, (fig. 33ª) las coordenadas del punto M referidas á los ejes CA, CB y CD, que pasan por el centro C de atraccion, y de los cuales el último supondré que es el eje de rotacion. Designando por g la fuerza de atraccion á la unidad de distancia, será $\frac{g}{r^2}$ á la distancia $CM = r$. Las tres componentes de esta fuerza serán respectivamente $\frac{g\,x}{r^3}$, $\frac{g\,y}{r^3}$ y $\frac{g\,z}{r^3}$, puesto que $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ y $\frac{z}{r}$ son los cosenos de los ángulos que forma su direccion con los ejes.

La fuerza centrífuga ejerce su accion en el plano MO, perpendicular al eje de rotacion, y si designamos por f su intensidad á la

(*) Puede verse el desarrollo de todas estas consideraciones en cualquiera tratado elemental de Mecánica analítica, y sobre todo, en la excelente memoria publicada en la «*Enciclopedia Metropolitana*» con el título de «*Figure of the earth,*» por Mr. G. B. Airy, actual director del Observatorio de Greenwich.

unidad de distancia, será $f.\ M\ O = f.\ P\ C$ á la distancia $M\ O = P\ C$, puesto que es proporcional á las distancias al eje de rotacion. Su componente en la direccion de $C\ D$ es por consiguiente nula, y en las de los otros ejes, serán: $f\,x$ y $f\,y$, por ser $\frac{x}{P\ C}$ é $\frac{y}{P\ C}$ los cosenos de los ángulos que con ellos forma la línea $P\ C$.

Teniendo presente que la gravedad tiende á disminuir, y la fuerza centrífuga á aumentar las coordenadas de M, tendrémos que las componentes totales X, Y, Z, son:

$$X = -g\,\frac{x}{r^3} + f\,x$$

$$Y = -g\,\frac{y}{r^3} + f\,y$$

$$Z = -g\,\frac{z}{r^3}$$

Sustituyendo estos valores en la condicion (1), se obtendrá:

$$-\frac{g}{r^3}\,(x\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y + z\,\mathrm{d}\,z) + f(x\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y) = 0$$

Para ejecutar la integracion notemos que la distancia r está ligada con las coordenadas por la relacion $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, de la que se obtiene:

$$r\,\mathrm{d}\,r = x\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y + z\,\mathrm{d}\,z$$

Tenemos tambien $x\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}.\,(x^2 + y^2)$, y en consecuencia resultará por la sustitucion:

$$-\frac{g\,\mathrm{d}\,r}{r^2} + \tfrac{1}{2} f\,\mathrm{d}.\,(x^2 + y^2) = 0$$

Integrando, y designando por C la constante, resulta:

$$\frac{g}{r} + \tfrac{1}{2} f\,(x^2 + y^2) = C$$

Para determinar la constante, llamemos a el radio ecuatorial, y atendiendo á que entónces $x^2 + y^2 = a^2$, tendrémos:

$$C = \frac{g}{a} + \tfrac{1}{2} f\,a^2$$

por lo cual la ecuacion general de la superficie del globo, será:

$$\frac{g}{r} + \tfrac{1}{2} f(x^2 + y^2) = \frac{g}{a} + \tfrac{1}{2} f a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La fuerza centrífuga en el ecuador es fa, y como sin la existencia de esta seria $\frac{g}{a^2}$ la atraccion, se deduce que la resultante de ambas fuerzas, ó la gravedad que realmente tiene lugar en el ecuador, es: $\frac{g}{a^2} - fa$. Si designamos por p la relacion entre la fuerza centrífuga y la pesantez ecuatoriales, tendrémos:

$$p = \frac{fa}{\frac{g}{a^2} - fa}$$

de lo que resulta:

$$f = \frac{p\,g}{(1+p)\,a^3}$$

Con este valor la ecuacion (2) tendrá la forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{p}{2\,(1+p)\,a} - \frac{p\,(x^2+y^2)}{2\,(1+p)\,a^3}$$

que se convierte con facilidad en la siguiente:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2+3p}{2+2p} - \frac{p\,(x^2+y^2)}{2\,(1+p)\,a^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Esta ecuacion daria el valor de un radio cualquiera r asignando determinados valores á las coordenadas, puesto que se tiene la relacion: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Así, por ejemplo, para $x=0$, $y=0$, $z=b$, se tendrá para el radio polar ó semi-eje de rotacion:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2+3p}{2+2p}$$

ó bien:

$$b = a\,\frac{2+2p}{2+3p}$$

Se ve desde luego, por la forma de esta expresion, que el eje po-

lar es menor que el ecuatorial, lo cual indica la figura aplanada de la tierra. El valor de compresion seria:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{2 + 2p}{2 + 3p} = \frac{p}{2 + 3p}$$

La relacion de la fuerza centrífuga á la pesantez en el ecuador es $p = \frac{1}{289}$, y así sustituyendo se hallará: $\alpha = \frac{1}{581}$.

107.—El valor de este aplanamiento es notablemente menor que el que se ha obtenido por las observaciones del péndulo y por las medidas geodésicas; pero tambien no es estricta la hipótesis que sirvió de base para el cálculo precedente, cual es la de que la direccion de la pesantez coincida con la del radio central. A la verdad, para asignar la verdadera direccion de la gravedad seria necesario conocer la forma de la tierra, que es el elemento final del problema; y aunque creo que tal vez podria resolverse por aproximaciones sucesivas partiendo de la figura que va resultando de cada resolucion, los geómetras que se han ocupado de este asunto siguen un método sintético mas breve, como es el demostrar que el elipsoide satisface las condiciones matemáticas del equilibrio. Por otra parte, los elementos relativos á la densidad y demas circunstancias del interior de nuestro planeta, no siendo exactamente conocidas, tienen que suplirse con hipótesis mas ó ménos fundadas, pero que por la misma razon dan resultados algo diferentes de los que han podido obtenerse hasta hoy por la experimentacion directa.

Lo expuesto basta para el objeto de dar una idea de este género de investigaciones, que no creo necesario desarrollar en su totalidad, limitándome á remitir al lector que desee ejercitarse en ellas á la obra de Mr. Airy de que ántes hice mencion.

108.—Expliquemos ahora brevemente el fundamento y la práctica de las observaciones del péndulo, que como dije en otra parte, constituyen otro de los métodos que se aplican tambien á la deter minacion de la forma de la tierra. Se sabe que el tiempo que dura la oscilacion del péndulo *simple*, cuya longitud sea l, tiene por expresion:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{.................................} \quad (4)$$

la cual indica que la duracion de las oscilaciones de un mismo pén-

dulo es inversamente proporcional á la raiz de la intensidad g de la pesantez. De aquí se deduce que si se trasporta el péndulo á dos ó mas estaciones, y en cada una de ellas se cuentan los números n y n' de oscilaciones que hace en un mismo tiempo T, tendrémos que las duraciones de una sola oscilacion serán:

$$\frac{T}{n} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \frac{T}{n'} = \pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

de donde resulta:

$$\frac{g}{g'} = \frac{n^2}{n'^2}$$

Esta ecuacion manifiesta que las intensidades de la gravedad en dos lugares del globo son proporcionales á los cuadrados de los números de oscilaciones del péndulo en un mismo espacio de tiempo como una hora, un minuto, &c. Segun esto, basta contar esos números sirviéndose para medir el tiempo de un buen relox arreglado por medio de observaciones astronómicas, para obtener la relacion $\frac{g}{g'}$, que segun verémos despues, puede servir de elemento para determinar la compresion de la tierra.

La relacion de las gravedades puede hallarse tambien calculando la longitud del péndulo simple que en cada estacion oscila en el mismo tiempo, por ejemplo, en un segundo de tiempo medio. Para esto es necesario medir cuidadosamente la longitud l de un péndulo simple cualquiera que haga su oscilacion en el tiempo t en un lugar determinado, pues llamando x la longitud del péndulo incógnito, se tienen las ecuaciones:

$$t^2 = \pi^2 \frac{l}{g} \qquad 1 = \pi^2 \frac{x}{g}$$

de cuya combinacion resulta: $x = \frac{l}{t^2}$. Supongamos que se ha observado en México que un péndulo simple de $2^m.231$ de largo hace 40 oscilaciones en un minuto de tiempo medio. La duracion de cada oscilacion seria por consiguiente: $t = 1^s.5$; y para la longitud del péndulo que oscilaria en 1^s tendriamos:

$$x = \frac{2^m.231}{2.25} = 0^m.9916$$

Conociendo de esta manera los péndulos que marcan segundos en dos lugares, se tiene la ecuacion:

$$1^s = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l'}{g'}}$$

que indica que la relacion de las intensidades de la pesantez es igual á la de las longitudes de los péndulos que oscilan en el mismo tiempo.

109.—La concepcion del péndulo simple es puramente un artificio matemático irrealizable en la práctica, puesto que se supone ser formado por un punto material, colocado en la extremidad de un hilo inflexible é inextensible, y que oscila en el vacío en un arco infinitamente pequeño. Sin embargo, la Mecánica tiene medios para determinar el péndulo simple que oscilaria en el mismo tiempo que un péndulo real cualquiera; y por tanto, todas las consecuencias que hemos deducido de la ecuacion (4) son ciertas, luego que por medio del cálculo se ha encontrado la longitud del péndulo ideal que corresponde á aquel de que se haga uso en las experiencias.

Desde luego llamando $2\,\theta$ el arco de oscilacion, la verdadera duracion de esta es algo mayor que la correspondiente á un arco infinitamente pequeño, y tiene por expresion:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \times (1 + \tfrac{1}{4} \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2}\theta)$$

Como θ es generalmente de 1° ó 2° cuando mas, puede expresarse en minutos, y haciendo $m = \frac{1}{16}$ sen.^{2} 1′, tendrémos:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \times (1 + m\,\theta^2) = t\,(1 + m\,\theta^2)$$

de donde resulta la duracion de la oscilacion del péndulo simple, siendo t' la observada con el instrumento real:

$$t = \frac{t'}{1 + m\,\theta^2}$$

Cuando la observacion dura algun tiempo, y el arco de oscilacion disminuye sensiblemente del principio al fin de la serie, se tomará

por θ el término medio de los valores que corresponden al principio de la operacion y al término de ella.

Otra correccion que es preciso hacer á la duracion de las oscilaciones proviene de la temperatura en el momento de la observacion, pues dilatándose el péndulo, oscila con mas lentitud que á 0° de temperatura. Sea c el coeficiente de dilatacion del material del péndulo, l su longitud á 0° y τ la indicacion del termómetro centesimal. La duracion observada será:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l\,(1 + c\,\tau)}{g}} = t\,\sqrt{1 + c\,\tau}$$

y atendiendo á la pequeñez de c se obtendrá desarrollando y despejando:

$$t = t'\,(1 - \tfrac{1}{2}\,c\,\tau)$$

Para reducir la duracion de la oscilacion observada en el aire, á lo que seria en el vacío, notemos que ese fluido hace perder al péndulo una parte de su peso, lo cual produce el mismo efecto que si disminuyese ligeramente la intensidad de la pesantez. Designando, pues, por g' la gravedad así modificada, la observacion da este valor:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}} = t\,\sqrt{\frac{g}{g'}}$$

y por consiguiente se obtendrá:

$$t = t'\,\sqrt{\frac{g'}{g}}$$

Para hallar una cantidad que equivalga al coeficiente de t', sean v y P respectivamente el volúmen y la densidad del péndulo, y p la densidad del aire. Puesto que los valores de g y g' deben ser proporcionales á los pesos del péndulo en el vacío y en el aire, se tendrá:

$$\sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{\frac{v\,(P - p)}{v\,P}} = \sqrt{1 - \frac{p}{P}} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{p}{P}$$

y el valor de t será en consecuencia:

$$t = t'\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{p}{P}\right)$$

Como la densidad del aire varia con la presion y la temperatura, su valor cuando son b y τ las indicaciones del barómetro y del termómetro, tiene la forma: $p = \frac{0.001299\, b}{0.760\,(1 + a\,\tau)}$. Sustituyendo en el valor de t se hallará finalmente:

$$t = t' \left(1 - \frac{0.00065\, b}{0.760\, P\,(1 + a\,\tau)}\right)$$

expresion en la que $a = 0.00367$, es el coeficiente de expansion de los gases.

Cuando las experiencias se hacen á cierta altura n sobre el nivel del mar, es preciso hacer otra pequeña correccion al valor de la pesantez á fin de reducir el tiempo de la oscilacion á lo que seria al nivel del Océano, pues de otra manera no podrian ser comparables los resultados obtenidos en estaciones diversamente elevadas. Sea g' la gravedad en el lugar cuya altura es n, y g la que corresponde á la misma latitud al nivel del mar; como estas fuerzas son inversamente proporcionales á los cuadrados de las distancias, llamando R el radio terrestre, se tiene:

$$g'\,(R + n)^2 = g\,R^2$$

Habiendo suministrado la observacion el valor de t', se tendrá como ántes:

$$t = t' \sqrt{\frac{g'}{g}}$$

é introduciendo el valor de g' y desarrollando hasta el primer órden de n en atencion á su pequeñez respecto del radio, hallarémos:

$$t = t' \left(\frac{R}{R + n}\right) = t' \left(1 - \frac{n}{R}\right)$$

Tales son las principales correcciones que hay que hacer á la duracion observada de una oscilacion, para obtener la que corresponderia al péndulo ideal llamado simple. Reuniéndolas en una sola expresion se tendrá:

$$t = t' \frac{(1 - \frac{1}{2}\,c\,\tau)\left(1 - \frac{0.00065\, b}{0.760\, P\,(1 + a\,\tau)}\right)\left(1 - \frac{n}{R}\right)}{1 + m\,\theta^2} \quad \ldots\ldots (5)$$

110.—Veamos ahora el modo de determinar la longitud l del péndulo que sirve para hacer las observaciones. Siendo este mas ó ménos compuesto de formas geométricas, la distancia de su centro de oscilacion al de suspension, se calcula por las fórmulas que con ese objeto dan los tratados de Mecánica, á los cuales remitimos al lector, no siendo de este lugar el desarrollo de esas teorías. En las mismas obras, ó en las que tratan de algunos péndulos de construccion especial, como el de Kater y otros, pueden tambien verse los detalles necesarios para servirse de esos aparatos. No pudiendo aquí ocuparme de todos ellos, solo haré una rápida descripcion del de Borda, por ser uno de los mas sencillos, y en consecuencia, el que se puede construir con mas facilidad. Este instrumento se compone de una pequeña esfera de platina, cuyo peso es próximamente de 500 gramos, suspendida en la extremidad de un hilo metálico muy delgado. Este hilo está directamente unido á un casco esférico de laton, cuyo radio interior es precisamente igual al de la esfera de platina, de manera que esta se aloja en aquel y se le adhiere poniendo en el primero una ligera capa de grasa. El objeto de independer la esfera del hilo es el de poder variar la colocacion de la misma esfera, á fin de eliminar las pequeñas desigualdades de densidad que pudieran existir en ella. Se procura tambien que el hilo no sea de hierro, para evitar la influencia de alguna accion magnética.

El hilo se une en su parte superior á una pieza de suspension que tiene la forma de un cuchillo, descansando por el filo en dos láminas de acero ó de ágata fijas con solidez en un muro. De este modo es muy pequeño el rozamiento, y se da ademas á la pieza de suspension una figura y un peso tales que pueda oscilar casi en el mismo tiempo que el péndulo, á fin de que no modifique sensiblemente las oscilaciones de este. En la parte inferior se traza un pequeño arco graduado con un radio igual á la longitud del péndulo, con el objeto de anotar la amplitud 2θ de la oscilacion.

Para hacer uso de este ó de cualquiera otro péndulo, no es indispensable contar todas las oscilaciones que hace en un tiempo dado, sino simplemente anotar las horas del péndulo ó relox astronómico en que coinciden las oscilaciones de este con las del de la experiencia. A este fin debe tenerse presente que cada vez que coinciden las oscilaciones de ambos instrumentos hácia un mismo lado, á la derecha, por ejemplo, uno de ellos ha hecho dos oscilaciones mas que el

otro, de suerte que la diferencia de las horas de las coincidencias corresponde á n oscilaciones del péndulo astronómico y á $n \pm 2$ del de la experiencia. Es claro que deben tomarse las horas, minutos y segundos que señala el primer instrumento en cada coincidencia, y que la diferencia debe corregirse proporcionalmente á su adelanto ó atraso en 24^h de tiempo medio. Entónces puede calcularse el número de oscilaciones que hace el péndulo de la experiencia en 24^h ó en 86400^s, por la ecuacion: $N = \frac{86400\,(n \pm 2)}{n}$; y por consiguiente se determinará con facilidad la duracion t' de cada una.

Para hallar la longitud l se mide exactamente la distancia de la parte inferior de la esfera al cuchillo de suspension, anotando la temperatura para reducirla á 0°, ó sea para corregirla por la dilatacion del hilo. Siendo $\triangle$ el resultado y r el radio de la esfera, $\triangle - r$ será la distancia del centro de esta al eje de suspension; pero como el centro de oscilacion queda un poco mas bajo que el de figura, se tiene: $l = \triangle - r + \frac{0.4\,r2}{\triangle - r}$ por distancia del cuchillo al centro de oscilacion.

Bouguer y Lacondamine hicieron uso en el ecuador de un péndulo mas sencillo aún que el de Borda, pues consistia simplemente en una hebra de pita unida á una pieza de suspension, y en cuya extremidad inferior se fijaba un peso pequeño y de figura regular. Sin embargo, creo que la elasticidad de esa sustancia y sus propiedades higrométricas pueden originar errores de importancia en la determinacion del valor de l, que es necesario determinar con la mayor precision, y que en mi concepto constituye la parte mas delicada de las observaciones del péndulo.

Obtenida la longitud l y el tiempo t de la oscilacion correspondiente al péndulo simple, puede ya calcularse el que oscilaria en 1^s por la fórmula $x = \frac{l}{t^2}$, que ántes se ha establecido.

111.—La aplicacion de las longitudes del péndulo de segundos á la determinacion de la forma de la tierra está fundada en uno de los teoremas de Clairaut, de cuyas teorías se deduce que sea cual fuere la estructura interior de nuestro planeta, las intensidades de la pesantez deben crecer como los cuadrados de los senos de las latitudes. Como por otra parte, las longitudes de los péndulos que oscilan en el mismo tiempo son directamente proporcionales á las intensidades de la gravedad, segun lo indica la expresion (4), se infiere que varian del ecuador al polo en la misma relacion que estas.

De acuerdo con este principio, si se designa por A la longitud del péndulo simple de segundos en el ecuador, y por B una constante, indeterminada por lo pronto, tendrémos que en una latitud cualquiera ϕ la longitud del péndulo que oscila en un segundo, será de la forma:

$$l = A + B \text{ sen.}^2 \phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Si, pues, como se ha explicado, se mide directamente el péndulo de segundos en el ecuador, y en seguida á otra latitud ϕ, no quedará mas incógnita que B en la ecuacion precedente, y por consiguiente podrá determinarse. Ademas, como para $\phi = 90°$, se tendria..... $l = A + B$, resulta que B es el incremento del péndulo del ecuador al polo, el cual medirá el incremento correspondiente de la pesantez; y entónces la fórmula de Clairaut suministrará el aplanamiento polar de la tierra, á saber:

$$a = \tfrac{5}{2} p - \frac{B}{A}$$

representando p, como ántes, la relacion de la fuerza centrífuga y la gravedad en el ecuador.

El método de cálculo que habitualmente se sigue no es, sin embargo, el que he indicado para explicar con mas sencillez la resolucion general del problema, sino que con el fin de eliminar hasta donde es posible los pequeños errores de observacion, que influirian mucho en la determinacion del aplanamiento, se combinan diversas observaciones ejecutadas en distintas latitudes, y se calculan así los valores mas plausibles de las constantes A y B. Siendo $l_1, l_2, \ldots\ldots$ l_n las longitudes del péndulo simple de segundos, medidas en lugares que tienen $\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots\ldots \phi_n$ por latitudes, podrán combinarse las n ecuaciones de condicion siguientes, entre las constantes indeterminadas A y B:

$$\begin{aligned} l_1 &= A + B \text{ sen.}^2 \phi_1 \\ l_2 &= A + B \text{ sen.}^2 \phi_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n &= A + B \text{ sen.}^2 \phi_n \end{aligned}$$

La mejor combinacion es la de los mínimos cuadrados, que suministra los valores mas probables de las inoógnitas, formando las

ecuaciones normales por la regla que consta en la nota de la página 58. Aplicada á este caso, y haciendo:

$$[l] = l_1 + l_2 + \ldots\ldots l_n$$
$$[l \text{ sen.}^2 \phi] = l_1 \text{ sen.}^2 \phi_1 + l_2 \text{ sen.}^2 \phi_2 + \ldots\ldots l_n \text{ sen.}^2 \phi_n$$
$$[\text{sen.}^2 \phi] = \text{sen.}^2 \phi_1 + \text{sen.}^2 \phi_2 + \ldots\ldots \text{sen.}^2 \phi_n$$
$$[\text{sen.}^4 \phi] = \text{sen.}^4 \phi_1 + \text{sen.}^4 \phi_2 + \ldots\ldots \text{sen.}^4 \phi_n$$

las normales entre A y B, serán:

$$[l] - nA - B[\text{sen.}^2 \phi] = 0$$
$$[l \text{ sen.}^2 \phi] - A[\text{sen.}^2 \phi] - B[\text{sen.}^4 \phi] = 0$$

cuya resolucion proporciona los valores de las dos incógnitas que satisfacen mejor el conjunto de las ecuaciones de condicion.

Para presentar una aplicacion numérica tomemos algunas de las medidas del péndulo de segundos hechas en América por el capitan Sabine.

Lugares.	Latitudes.	l	Ecuaciones de condicion.
St. Thomas.....	0° 25′.....	0m99111	$0.99111 = A + 0.0001\ B$
Jamaica.....	17 56	0. 99147	$0.99147 = A + 0.0948\ B$
Nueva-York.....	40 43	0. 99315	$0.99315 = A + 0.4255\ B$
Groenlandia.....	74 32	0. 99575	$0.99575 = A + 0.9289\ B$

Los coeficientes de B son los valores numéricos de los cuadrados de los senos de las latitudes. Calculando los de las ecuaciones normales, tendrémos que estas serán:

$$3.97148 - 4.0000\ A - 1.4493\ B = 0$$
$$1.44164 - 1.4493\ A - 1.0529\ B = 0$$

Dividiendo cada ecuacion por el coeficiente que en ella tiene A, hallarémos:

$$0.99287 - A - 0.3623\ B = 0$$
$$0.99471 - A - 0.7265\ B = 0$$

Estas dan por adicion y sustraccion:

$$A = 0.99379 - 0.5444\ B$$
$$0.00184 = 0.3642\ B$$

Por la última se obtiene: $B = 0^m00505$, valor que sustituido en la otra, produce: $A = 0^m99104$.

Segun este ejemplo, la longitud del péndulo simple de segundos en cualquiera latitud ϕ. será:

$$l = 0^m99104 + 0^m00505 \text{ sen.}^2 \phi$$

Con estos datos calculemos ahora el aplanamiento por la fórmula de Clairaut, recordando que la relacion entre la fuerza centrífuga y la gravedad ecuatoriales, es: $p = \frac{1}{289} = 0.00346$.

$$a = \tfrac{5}{2} \times 0.00346 - \frac{0.00505}{0.99104} = 0.00355 = \tfrac{1}{282} \text{ próximamente.}$$

Mr. Airy, por medio de una combinacion análoga de 49 de las mejores observaciones del péndulo hechas á diversas latitudes en ambos hemisferios, halla: $A = 0^m99101$ y $B = 0^m00509$. De estos elementos resulta que la compresion polar, es: $a = 0.00351 = \frac{1}{285}$.

CAPITULO III.

APLICACION DE LAS OPERACIONES GEODÉSICAS Á LA MEDIDA DE ARCOS TERRESTRES.

112.—Si se ejecuta una triangulacion de Norte á Sur, se observa directamente el azimut de un lado por lo ménos, y se determina la posicion geográfica de alguno de los vértices, hemos visto en la Parte Primera de este libro que se pueden calcular los mismos ele-

mentos para todo el resto de la cadena, despues de hecha la resolucion de los triángulos. Los datos así obtenidos sirven despues para calcular el arco del meridiano que abraza la triangulacion, suponiéndolo trazado por cualquiera de las estaciones. Sean A y U (fig. 34ª) los vértices extremos de la cadena, y propongámonos determinar el arco del meridiano que pasa por A. Si se supone prolongado el lado $B\,C$ hasta M, podrémos calcular la distancia meridiana $A\,M$, puesto que en el triángulo $A\,M\,B$ se conoce el lado $A\,B$, el ángulo B y el ángulo $B\,A\,M$, que no es otra cosa mas que el azimut de $A\,B$. Ademas de $A\,M$, la resolucion dará los elementos restantes, á saber: $B\,M$ y el ángulo M. En seguida, en el triángulo $C\,D\,M$ se conoce la línea $C\,D$ por ser lado trigonométrico,..... $C\,M = B\,M - B\,C$, y el ángulo $M\,C\,D = 180° - B\,C\,D$; la resolucion dará, pues, $D\,M$ y los ángulos D y M, con lo cual en el triángulo siguiente $M\,D\,N$, formado por la prolongacion de $D\,E$ hasta el meridiano, se tendrá conocida la base $D\,M$ y los ángulos adyacentes para determinar $M\,N$ y los demas elementos. Una resolucion semejante dará á conocer despues la distancia $N\,P$ y así sucesivamente, pues todo el método consiste en ir combinando los elementos conocidos de la cadena con los que resultan de la prolongacion de algunos lados, ó bien con las partes del meridiano determinadas por su interseccion con los lados trigonométricos. Es claro que construyendo un cróquis de la figura, se pueden tomar diversas líneas para hacer las combinaciones, cuyos diversos resultados se comprobarán unos á otros. El arco total $A\,P$ será en consecuencia igual á la suma de sus partes $A\,M$, $M\,N$, $N\,P$, &c., ó si se desea, puede bajarse una perpendicular $U\,R$ al meridiano desde la última estacion U, y entónces se calcula tambien la distancia meridiana $P\,R = P\,U$ cos. $R\,P\,U$, para obtener $A\,R$ por arco total.

En todas estas operaciones los ángulos observados de la cadena y los deducidos al hacer las combinaciones pertenecen á triángulos esféricos, por lo cual para resolverlos por el método de Legendre, es preciso restarles la tercera parte del exceso esférico. Así, por ejemplo, en el primer triángulo $A\,B\,M$ con el lado $A\,B$ y los ángulos A y B se calcula la superficie para determinar en seguida el exceso esférico e (pág. 128 y 130); y entónces se tiene el ángulo esférico M por la ecuacion:

$$M = 180° + e - (A + B)$$

Los ángulos planos serán $A' = A - \frac{1}{3}e$ y $B' = B - \frac{1}{3}e$, por lo cual el ángulo plano deducido es:

$$M' = 180° - (A' + B')$$

El anterior procedimiento para calcular la extension de un arco del meridiano se debe tambien á Legendre. Antes de dar á conocer otros mas analíticos, indicarémos que si se han determinado astronómicamente las latitudes de los vértices extremos A y U, como de esta última es fácil deducir la de P ó la de R sin error de importancia, tendrémos conocida la amplitud del arco, que es igual á la diferencia de latitudes de A y R, y su extension lineal por la resolucion precedente. Estos dos elementos sirven, segun se ha dicho, para calcular la extension de un grado del meridiano, pues siendo ϕ y ϕ' las latitudes extremas y m la extension total..... $AM + MN + NP +$ &c., se tendrá por valor del arco de 1°, expresando á $\phi - \phi'$ en segundos: $s = \frac{3600\, m}{\phi - \phi'}$, y dirémos que el grado tiene s metros á la latitud media $\frac{1}{2}(\phi + \phi')$.

113.—La extension de un arco del meridiano puede tambien determinarse proyectando sobre él cada uno de los lados trigonométricos AC, CE, &c. por medio de perpendiculares Cc, Ee, &c., que se suponen bajadas desde los vértices. Conociendo, en efecto, la longitud y el azimut de cada línea, se tiene lo necesario para calcular las proyecciones por la fórmula $y = k \cos. u$, de que se hace uso en la Topografía. Es evidente que la suma de las proyecciones daria la extension del arco; pero este método envuelve el pequeño error de suponer plana la superficie de la tierra, ó lo que es lo mismo, paralelas todas las perpendiculares al meridiano, siendo así que por pertenecer á círculos máximos de la esfera, deben converger hácia los puntos *Este* y *Oeste* del horizonte, que son los dos polos del meridiano.

Para tomar en cuenta esta circunstancia, el método de proyeccion se aplica de la manera siguiente. Sea AB (fig. 35ª) uno de los lados de la cadena, y PM el meridiano sobre el cual se van á proyectar los lados consecutivos con el objeto de hallar el arco total. Si por cada uno de los vértices A, B, C, &c., se trazan arcos perpendiculares al meridiano, todos ellos irán á concurrir al punto O, el cual será el polo de PM; y los piés de estos arcos determinarán

las proyecciones ab, bc, &c., de los lados respectivos. Designando por L la longitud geográfica de PM y por L' la de PA, tendrémos que $L'-L$ representará la diferencia de longitud de la estacion A respecto de aquel meridiano. Con este elemento, y con el azimut $u=PAB$ del lado trigonométrico, determinemos el ángulo $BAO=\omega$. Siendo ϕ la latitud de A, el triángulo PAa, rectángulo en a, da la relacion:

$$\text{sen. } \phi = \text{cot. } (L'-L) \text{ cot. } PAa$$

Pero como $PAa=180°-(\omega+u)$, se tiene despejando:

$$-\text{cot. } (\omega+u) = \text{sen. } \phi \text{ tan. } (L'-L)$$

El ángulo $\omega+u$ difiere muy poco de 90°, y así es que poniendo: $\omega+u=90°+x$, la ecuacion precedente dará:..... tan. $x=$tan. $(L'-L)$ sen. ϕ, y atendiendo á la pequeñez de x y de $L'-L$, se tendrá tomando los arcos en segundos por las tangentes: $x=(L'-L)$ sen. ϕ. En consecuencia el valor de ω es:

$$\omega = 90° + (L'-L) \text{ sen. } \phi - u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En el triángulo PBb designando por ϕ' la latitud de B, por L'' su longitud, y por λ la amplitud del pequeño arco Bb, se tiene:

$$\text{sen. } \lambda = \text{cos. } \phi' \text{ sen. } (L''-L)$$

y como la longitud de cualquiera de los vértices de la cadena nunca es considerable respecto de la del meridiano sobre el cual se proyecta, podrá tomarse:

$$\lambda = (L''-L) \text{ cos. } \phi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ahora en el triángulo ABO llamando θ la amplitud del lado AB, tendrémos:

$$\text{sen. } O = \frac{\text{sen. } \theta \text{ sen. } \omega}{\text{cos. } \lambda}$$

ó bien atendiendo á la pequeñez de θ y O:

$$O = \frac{\theta \text{ sen. } \omega}{\text{cos. } \lambda}$$

El ángulo O puede suponerse perteneciente á una esfera cuyo radio sea igual á la normal N del punto A, puesto que es formado por los primeros verticales del meridiano $P\,M$; y ademas como su medida es el arco $a\,b = y$, se tendrá: $O = \frac{y}{N}$. Tambien si se repreta por R_u el radio de curvatura de la seccion de que forma parte $A\,B = k$, se halla: $\theta = \frac{k}{R_u}$, y sustituyendo estos valores en el de O, resulta:

$$y = \frac{N\,k \text{ sen. } \omega}{R_u \text{ cos. } \lambda}$$

Refiriéndonos á la pág. 23, verémos que R_u solo difiere de N una cantidad del órden del cuadrado de la exentricidad de los meridianos terrestres, por lo cual no hay inconveniente en suponer su relacion igual á la unidad para adoptar la fórmula mas sencilla:

$$y = \frac{k \text{ sen. } \omega}{\text{cos. } \lambda} \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) presentan los cálculos necesarios para hallar la proyeccion meridiana y de cada uno de los lados de la cadena, conociendo su azimut, su extension y las coordenadas de sus extremos, elementos todos que se obtienen por medio de las operaciones trigonométricas que se han expuesto en la Parte Primera.

Cuando se calcula la extension de un arco de meridiano con el objeto de compararla con su amplitud, es necesario, segun he dicho, determinar astronómicamente las latitudes de las estaciones extremas; pero como al hacer la proyeccion por el método que antecede, la latitud γ del pié a del arco perpendicular al meridiano, es un poco diferente de la de A, puesto que $A\,a$ difiere del paralelo $A\,p$ de este vértice, es preciso calcular la pequeña diferencia de latitud $p\,a = x$. Para esto, en el triángulo rectángulo $P\,a\,A$ se tiene:

$$\text{tan. } \gamma = \frac{\text{tan. } \phi}{\text{cos. } (L' - L)}$$

y como $x = \gamma - \phi$, hallarémos:

$$\text{tan. } x = \frac{\text{tan. } \gamma - \text{tan. } \phi}{1 + \text{tan. } \gamma \text{ tan. } \phi}$$

sustituyendo el valor de tan. γ, y tomando en el denominador de

tan. x la unidad por el coseno del pequeño ángulo $L' - L$, resultará:

$$\text{tan. } x = \frac{2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} (L' - L) \text{ tan. } \phi}{\text{sec.}^2 \phi}$$

Multiplicando ambos miembros por cos.^{2} ϕ, y tomando los arcos x y $(L' - L)$ en segundos por sus líneas trigonométricas, se halla en último resultado:

$$\gamma = \phi + \tfrac{1}{4} (L' - L)^2 \text{ sen. } 2\phi \text{ sen. } 1'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

fórmula por cuyo medio se determinan las latitudes de los piés de los arcos proyectantes que pasan por los vértices extremos. La diferencia de estas latitudes representa la amplitud del arco del meridiano, formado por la suma de las proyecciones de los lados trigonométricos.

114.—El método que me parece mas conveniente para proyectar una serie de lados, y que no necesita correccion alguna de las latitudes extremas, consiste en calcular las distancias meridianas comprendidas entre cada dos vértices. Supongamos trazados los paralelos $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$, &c., (fig. 36ª) de cada estacion trigonométrica: es claro que las distancias $a\,b$, $b\,c$, &c., no son otra cosa mas que las diferencias de latitud de A y B, de B y C, &c., reducidas á medidas lineales, reduccion que se practica dividiendo por el coeficiente A la fórmula (2) de la pág. 135. Luego designando por m la parte del meridiano comprendida entre las latitudes ϕ y ϕ', se tendrá:

$$m = \frac{\phi' - \phi}{A} = k \cos. u - \frac{B}{A} k^2 \text{ sen.}^2 u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

y la suma de las m dará el arco total que abraza la triangulacion, en cuyos vértices extremos supongo que se ha determinado directamente la latitud con el fin de hallar la amplitud del mismo arco. Conviene tomar de la Tabla de la pág. 139 los valores de A y B para la latitud media $\frac{1}{2} (\phi + \phi')$.

Debe notarse que los tres procedimientos que he expuesto para calcular la extension de un arco, deben dar resultados sensiblemente independientes del valor de los elementos que caracterizan al elipsoide terrestre; pues si bien en el último figuran las cantidades

A y B, que dependen del radio ecuatorial a y de la excentricidad e^2, es en un término muy pequeño, en el que por consiguiente bastaria emplear valores aproximativos, sin que por eso se alterase el resultado de una manera apreciable. Se comprende que de esa manera es posible hallar con exactitud la extension de un arco del meridiano para compararlo en seguida con su amplitud astronómica y determinar así los elementos del elipsoide, como se verá en el Capítulo siguiente.

115.—De una manera análoga se procede para calcular la extension de un arco de paralelo. Sean A, B, &c. (fig. 37ª) los vértices de una triangulacion dirigida de Oriente á Poniente, y $P\,P'$ el paralelo de latitud λ cuya extension se desea determinar. Designando por ϕ, L, y ϕ', L' las latitudes y las longitudes de A y B respectivamente; por N la normal de A, por N_0 la del paralelo y por u el azimut de $A\,B = k$, se tienen las dos ecuaciones:

$$p = (L' - L)\, N_0 \cos.\, \lambda \,\text{sen.}\, 1''$$

$$L' - L = \frac{k \,\text{sen.}\, u}{N \cos.\, \phi' \,\text{sen.}\, 1''}$$

la primera de las cuales expresa la extension del arco del paralelo de latitud λ, que abraza una amplitud $L' - L$ (pág. 20); y la segunda suministra esta amplitud en funcion de k y u (pág. 138). Eliminando entre ellas á $L' - L$, resultará:

$$p = \frac{N_0 \cos.\, \lambda}{N \cos.\, \phi'} k \,\text{sen.}\, u \qquad (6)$$

fórmula que sirve para calcular la parte del paralelo correspondiente á cada lado trigonométrico, comprendida entre los meridianos de sus vértices. En consecuencia la suma de las p dará todo el arco limitado por los meridianos extremos, y si se determina astronómicamente la diferencia de longitud de estos, podrán compararse la amplitud y la extension totales para calcular la que corresponde á 1°.

Aunque en la ecuacion (6) entran las normales correspondientes á las latitudes λ y ϕ, que dependen del radio ecuatorial y de la excentricidad de la tierra, no por eso seria inexacto el valor de p si no se conocieran con precision esos elementos; porque en la relacion de las normales se elimina el radio del ecuador, y el término que de-

pende de la excentricidad, queda multiplicando á una cantidad muy pequeña. En efecto, puesto que se tiene:

$$N_0 = \frac{a}{(1 - e^2 \text{ sen.}^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \qquad N = \frac{a}{(1 - e^2 \text{ sen.}^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

la relacion de las normales será:

$$\frac{N_0}{N} = \frac{(1 - e^2 \text{ sen.}^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - e^2 \text{ sen.}^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} = (1 - e^2 \text{ sen.}^2 \phi)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2 \text{ sen.}^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

Desarrollando hasta los términos en e^2, y haciendo las multiplicaciones sin apreciar las potencias superiores de e, por ser sumamente pequeñas, resulta:

$$\frac{N_0}{N} = (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \text{ sen.}^2 \phi)(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \text{ sen.}^2 \lambda) = 1 + \tfrac{1}{2} e^2 (\text{sen.}^2 \lambda - \text{sen.}^2 \phi)$$

y como las latitudes ϕ de los puntos trigonométricos nunca difieren mucho de la del paralelo, se infiere que es siempre muy pequeño el factor de e^2. Ademas, si la triangulacion se ejecuta de manera que corte al paralelo, las latitudes de algunos vértices serán mayores y las de otros menores que la de este, y entónces se tendrá la ventaja de que varíe el signo del multiplicador de e^2, de modo que el conjunto de los valores de p será sensiblemente independiente de la excentricidad.

CAPITULO IV.

DETERMINACION DE LA FIGURA Y DIMENSIONES DE LA TIERRA POR LAS MEDIDAS GEODÉSICAS.

116.—En el Capítulo I de la Geodesia práctica constan las expresiones analíticas de las principales líneas del elipsoide, y se ve que todas ellas dependen de los elementos característicos a y e de este sólido. La valuacion numérica de esas expresiones demanda en

consecuencia el conocimiento de los elementos; mas si por un procedimiento cualquiera se obtienen directamente los valores de las mismas líneas, es claro que igualándolos con la expresion ó fórmula que los representa, se formarán ecuaciones de condicion en las que figuren a y e como constantes indeterminadas, y cuya resolucion dará por consiguiente los valores de estas.

Tal es el principio en que está fundada la determinacion de la forma de la tierra por los procedimientos geodésicos. En el Capítulo precedente vimos, en efecto, que por medio de una cadena de triángulos es posible medir un arco terrestre con mucha exactitud, sin necesidad de conocer previamente el radio ecuatorial y la elipticidad del globo. Si, pues, m y m' representan, por ejemplo, las extensiones de dos arcos pequeños del meridiano, medidas geodésicamente, siendo ϕ y ϕ' las latitudes de sus medios, se tendrán (pág. 16) las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} m &= a\,(1-e^2)\,(1+\tfrac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\,\phi + \tfrac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\,\phi + \ldots\ldots)\,\mathrm{d}\phi \\ m' &= a\,(1-e^2)\,(1+\tfrac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\,\phi' + \tfrac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\,\phi' + \ldots\ldots)\,\mathrm{d}\phi' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

en las que $\mathrm{d}\phi$ y $\mathrm{d}\phi'$ expresan las diferencias de latitud de los extremos de los arcos. En estas ecuaciones todo será conocido, con excepcion de las constantes a y e, y por tanto, será fácil determinar su valor.

Eliminando la cantidad $a\,(1-e^2)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} &\tfrac{3}{2}\,(m'\,\text{sen.}^2\,\phi\,\mathrm{d}\phi - m\,\text{sen.}^2\,\phi'\,\mathrm{d}\phi')\,e^2 \\ &+\tfrac{15}{8}\,(m'\,\text{sen.}^4\,\phi\,\mathrm{d}\phi - m\,\text{sen.}^4\,\phi'\,\mathrm{d}\phi')\,e^4 = m\,\mathrm{d}\phi' - m'\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Esta ecuacion puede resolverse por aproximaciones sucesivas, introduciendo por valor de e^4 el que resulta de la primera aproximacion; pero atendiendo á la pequeñez de e basta generalmente adoptar el valor obtenido en la hipótesis de que sea nula su cuarta potencia, esto es:

$$e^2 = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{m\,\mathrm{d}\phi' - m'\,\mathrm{d}\phi}{m'\,\text{sen.}^2\,\phi\,\mathrm{d}\phi - m\,\text{sen.}^2\,\phi'\,\mathrm{d}\phi'}$$

Cuando los dos arcos que se comparan tienen la misma amplitud, como sucede al hacer uso de las extensiones de 1°, se simplifica mucho el cálculo de esta fórmula, pues haciendo $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\phi'$, resulta:

$$e^2 = \tfrac{2}{3}\,\frac{m - m'}{m'\,\text{sen.}^2\,\phi - m\,\text{sen.}^2\,\phi'} \ldots\ldots (2)$$

Obtenido así el valor de e, cualquiera de las ecuaciones primitivas suministra el del radio del ecuador, á saber:

$$a = \frac{m}{(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2 \operatorname{sen.}^2\phi + \frac{15}{8}e^4 \operatorname{sen.}^4\phi\right) d\phi} \quad \ldots\ldots (3)$$

ecuacion en la que $d\phi$ representa la amplitud del arco m expresada en partes del radio; pero se multiplicará por sen. 1'' si se quiere introducir en segundos. El aplanamiento polar se obtendrá recordando (pág. 7) que con cortísima diferencia es igual á $\frac{1}{2}e^2$.

117.—Pongamos á la vista algunos de los principales resultados de las medidas geodésicas, á fin de aplicar las fórmulas precedentes.

PAISES.	OBSERVADORES.	Latitudes medias.	Extensiones de un grado.
Ecuador.	Bouguer, Lacondamine.	00° 00′ 00″	110614m
La India.	Lambton, Everest.	16 8 22	110653
Cabo de Bª Eª	La Caille.	33 18 30	111165
Francia.	Delambre, Biot, Arago.	45 4 18	111116
Inglaterra.	Roy, Kater.	52 35 45	111241
Rusia.	Struve.	58 17 37	111362
Laponia.	Swamberg.	66 20 10	111488

La expresion (2) indica que para disminuir el efecto de algun pequeño error que tengan las extensiones m y m' de los arcos, conviene que su denominador sea el mayor posible, ó en otros términos, que deben escogerse dos arcos medidos en latitudes muy diferentes. Conforme á esto, combinemos el grado de Rusia con el del Ecuador, y como en tal caso se tiene $\phi' = 0$, la ecuacion toma la forma:..... $e^2 = \frac{2(m-m')}{3m' \operatorname{sen.}^2\phi}$.

$m = 111362^m$ $\quad \phi = 58°\ 17'\ 37''$ $\quad \frac{2}{3}$ 9.82391
$m' = 110614$ $\quad \phi' = 00\ 00\ 00$ $\quad m-m'$..... 2.87390
m'..... —5.04381
$m-m' = 748$ $\quad$ sen.$^2\phi$ ... —9.85960

$e^2 = 0.006229$..... e^2 ..... 7.79440

El aplanamiento resulta en consecuencia: $a = 0.003115 = \frac{1}{321}$.

Con este valor de e^2 calculemos el radio ecuatorial valiéndonos del arco m'. Puesto que $\phi' = 0$, y $d\phi' = 3600''$, la ecuacion (3) dará:

$$a = \frac{m'}{3600\,(1-e^2)\operatorname{sen.}1''}$$

3600..... —3.5563025
$1-e^2$..... —9.9972863
sen. 1''..... —4.6855749
m'..... 5.0438101

a..... 6.8046464 $\quad a = 6377439^m$.

118.—De la misma manera podrian hacerse otras muchas combinaciones cuyos resultados no concuerdan idénticamente, ya sea por la influencia de los pequeños errores de observacion, ya por ligeras irregularidades que existan realmente en el globo terrestre, segun dije en el Capítulo I. Con el objeto de eliminar hasta donde es posible estas causas de discordancia, ó para determinar la forma general que resulta de un conjunto de medidas, se combinan muchas de ellas á la vez, estableciendo al efecto ecuaciones de condicion, cuya resolucion suministra los valores de a y e^2 independientes hasta cierto punto de los errores ó irregularidades locales.

Si en las ecuaciones primitivas (1), por ejemplo, se ejecutan las multiplicaciones hasta los términos en e^4, y si hacemos para abreviar:

$$A = 1 - \tfrac{3}{2}\,\text{sen.}^2\,\phi \qquad B = \tfrac{3}{2}\,\text{sen.}^2\,\phi - \tfrac{15}{8}\,\text{sen.}^4\,\phi$$

cualquiera de ellas adquirirá la forma:

$$m = a\,(1 - A\,e^2 - B\,e^4)\,\mathrm{d}\,\phi$$

bajo la cual podrian combinarse varios arcos para la determinacion de las constantes. Sin embargo, en el estado actual de la Geodesia, creo que seria preferible comparar los arcos medidos directamente con los calculados haciendo uso de valores aproximativos de a y e^2, y determinar así las correcciones que estos necesiten. Siendo, en efecto, a y e^2 los valores aproximativos de las constantes, δa y δe^2 las correcciones que les corresponden, y calculando con aquellos cada arco del meridiano por la última fórmula, se hallará un resultado μ, generalmente distinto del obtenido por la medida, esto es:

$$\mu = a\,(1 - A\,e^2 - B\,e^4)\,\mathrm{d}\,\phi \qquad (4)$$

y para hacerlo concordar con m, introducirémos las correcciones, á saber:

$$m = (a + \delta a)\,(1 - A\,(e^2 + \delta e^2) - B\,e^4)\,\mathrm{d}\,\phi$$

El último término de esta ecuacion se ha supuesto exacto á causa de su extremada pequeñez. Haciendo la multiplicacion, omitiendo el producto $\delta a \,.\, \delta e^2$ por ser de segundo órden, y restando del resultado el valor de μ, obtendrémos la ecuacion de condicion que sigue, entre las correcciones de los elementos supuestos:

$$m - \mu = \delta a\,(1 - A\,e^2 - B\,e^4)\,\mathrm{d}\,\phi - A\,a\,\mathrm{d}\,\phi \,.\, \delta e^2$$

Abreviando el coeficiente de δa con ayuda del valor de μ, y teniendo presente que $a\, d\phi$ representa la extension de un arco de amplitud $d\phi$, contada en un círculo cuyo radio es a, extension muy poco diferente de μ, la ecuacion de condicion podrá ponerse bajo la forma:

$$\frac{\mu}{a} . \delta a - A\mu . \delta e^2 - (m - \mu) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Con el fin de presentar un ejemplo numérico sin alargar demasiado los cálculos, tomemos solamente tres de los arcos que constan en la Tabla anterior, y elijamos el del Ecuador, el de la India y el de Rusia. Calculados todos ellos por la fórmula (4) haciendo uso de sus latitudes respectivas y de los valores aproximativos..... $a = 6377400^m$ y $e^2 = 0.0066$, se obtienen los resultados siguientes:

Grado del Ecuador..... $A = +\ 1.0000$..... $B = 0.0000$..... $\mu = 110572^m$
Grado de la India..... $A = +\ 0.8841$..... $B = 0.1047$..... $\mu = 110657$
Grado de Rusia..... $A = -\ 0.0857$..... $B = 0.1035$..... $\mu = 111369$

y formando las ecuaciones de condicion (5), hallarémos:

$$\begin{aligned} 0.01733\, \delta a - 111307\, \delta e^2 - 42 &= 0 \\ 0.01735\, \delta a - \ 97832\, \delta e^2 + \ 4 &= 0 \\ 0.01746\, \delta a + \ \ 9544\, \delta e^2 + \ 7 &= 0 \end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados, resultarán las dos normales:

$$\begin{aligned} +\ 0.00090665\, \delta a - \ \ 3747\, \delta e^2 - \ 0.53624 &= 0 \\ -\ \ 3747\, \delta a + 22052436409\, \delta e^2 + \ 4350374 &= 0 \end{aligned}$$

cuya resolucion suministra: $\delta a = -\ 417^m$, y $\delta e^2 = -\ 0.000264$. En consecuencia, los valores correctos de las constantes, segun esta combinacion, serian:

$$a + \delta a = 6376983^m \qquad e^2 + \delta e^2 = 0.006336$$

la última de las cuales corresponderia á un aplanamiento de $\frac{1}{315}$ próximamente.

De esta ó de una manera análoga se han combinado la mayor parte de las principales operaciones geodésicas para determinar el

elipsoide que conviene mejor al conjunto de los resultados de las medidas. En la pág. 203 dimos ya á conocer las cantidades obtenidas por diversos calculadores, y entre ellos Bessel, cuyos elementos son los que se han adoptado en este libro.

Es preciso advertir que para combinar arcos de amplitud considerable no seria exacto establecer las ecuaciones de condicion partiendo de las series aproximadas (1), sino de la fórmula integral (21) de la pág. 18, que suministra la extension de un arco de g grados de amplitud, comprendido entre las latitudes ϕ y $\phi - g$. Los coeficientes A, B, &c. de esa fórmula son funciones de las potencias pares de e, que sustituidas hasta los términos en e^4, pueden darle la forma $m = a\,(1 - Me^2 - Ne^4)$, semejante á la que he aplicado al ejemplo anterior, y por consiguiente susceptible de sujetarse al mismo procedimiento.

119.—La determinacion de las constantes puede hacerse tambien comparando las medidas de dos arcos de paralelo, pues siendo ϕ y ϕ' sus latitudes, $\mathrm{d}L$ y $\mathrm{d}L'$ sus amplitudes y N y N' las normales correspondientes, tienen por expresiones:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{a\cos.\phi\,\mathrm{d}L}{(1-e^2\,\mathrm{sen.}^2\phi)^{\frac{1}{2}}} = a\cos.\phi\,(1+\tfrac{1}{2}e^2\,\mathrm{sen.}^2\phi+\tfrac{3}{8}e^4\,\mathrm{sen}^4\phi\ +\ldots)\,\mathrm{d}L \\ p' &= \frac{a\cos.\phi'\,\mathrm{d}L'}{(1-e^2\,\mathrm{sen.}^2\phi')^{\frac{1}{2}}} = a\cos.\phi'\,(1+\tfrac{1}{2}e^2\,\mathrm{sen.}^2\phi'+\tfrac{3}{8}e^4\,\mathrm{sen.}^4\phi'+\ldots)\,\mathrm{d}L' \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

de las cuales resulta por la eliminacion de a y omitiendo los términos en e^4:

$$e^2 = \frac{2\,(p\cos.\phi'\,\mathrm{d}L' - p'\cos.\phi\,\mathrm{d}L)}{p'\cos.\phi\,\mathrm{sen.}^2\phi\,\mathrm{d}L - p\cos.\phi'\,\mathrm{sen.}^2\phi'\,\mathrm{d}L'}.$$

Si las amplitudes son las mismas, como sucede cuando se comparan arcos de 1°, resulta la fórmula mas sencilla:

$$e^2 = \frac{2\,(p\cos.\phi' - p'\cos.\phi)}{p'\cos.\phi\,\mathrm{sen.}^2\phi - p\cos.\phi'\,\mathrm{sen.}^2\phi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

Comparando mas de dos arcos de paralelo pueden formarse ecuaciones de condicion partiendo de las expresiones (6), y procediendo como ántes se ha hecho respecto de los arcos de meridiano. Si se designa por q la extension calculada con los elementos aproximativos a y e^2, tendrémos, pues:

$$q = a\cos.\phi\,(1+\tfrac{1}{2}e^2\,\mathrm{sen.}^2\phi+\tfrac{3}{8}e^4\,\mathrm{sen.}^4\phi)\,\mathrm{d}L$$

y la ecuacion de condicion correspondiente á cada arco será de la forma:

$$\frac{q}{a}\,\delta a + \tfrac{1}{2}\,q\,\text{sen.}^2\,\phi\,.\,\delta e^2 - (p-q) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

De la misma manera puede compararse uno ó mas arcos de meridiano con otro ú otros de paralelo, por medio de las expresiones (1) y (6), ó bien combinando las ecuaciones de condicion (5) y (8). Sin embargo, son comparativamente muy cortas en número las medidas de arcos de paralelo que se han ejecutado hasta hoy, por la dificultad de determinar exactamente sus amplitudes, ó sea la diferencia de longitud geográfica de sus extremos. Acaso en lo futuro no será así, porque el uso reciente de la telegrafía electro-magnética, como medio de determinar las longitudes geográficas, se presta casi al mismo grado de precision que la medida de las latitudes, y en consecuencia desaparecerá la principal causa de error que afecta á las amplitudes de los arcos. En mi concepto, la comparacion de diversos paralelos, ó mejor la de varias partes del mismo paralelo, es la que puede dar á conocer con mas facilidad si la tierra es realmente un sólido de revolucion, pues es claro que siéndolo, amplitudes iguales deben corresponder á extensiones iguales en la misma latitud.

Cuando en un país se practican grandes operaciones geodésicas, por ejemplo, para levantar exactamente su carta geográfica, y se hacen tambien las correspondientes observaciones astronómicas, se pueden comparar las triangulaciones hechas de Norte á Sur con las de Oriente á Poniente, y de esa manera se determinan las constantes a y e^2, que en tal caso deben considerarse como las pertenecientes á un elipsoide osculador á la superficie de la tierra en aquel país.

Sucede con frecuencia que las posiciones geográficas calculadas geodésicamente para puntos algo distantes por medio de las triangulaciones, no resultan idénticas á las observadas astronómicamente cuando se hace uso de los elementos a y e^2 determinados para la tierra en general. Estas discordancias, que se atribuyen á las irregularidades locales, desaparecen necesariamente si se determinan las constantes que convienen á cada país, estableciendo ecuaciones de condicion entre δa, δe^2 y las diferencias geodésicas y astronómicas de posicion. Sea, en efecto, P la diferencia de latitud de dos

puntos distantes calculada por la fórmula (2) de la pág. 135. Siendo n el número de lados de la triangulacion que hay entre las dos estaciones, se tiene: $P = p_1 + p_2 + \ldots\ldots p_n$. Si designamos por P' la misma diferencia obtenida astronómicamente, $P' - P$ será el efecto del error de los elementos, y podrémos establecer la condicion:

$$P' - P = \delta p_1 + \delta p_2 + \ldots\ldots \delta p_n$$

Para determinar las correcciones de las diferencias parciales tomemos la fórmula aproximativa:

$$p = A\, k \cos. u = \frac{k\,(1 - e^2 \text{ sen.}^2\, \phi)^{\frac{3}{2}} \cos. u}{a\,(1 - e^2) \text{ sen. } 1''}$$

que diferenciada respecto de a y e^2, produce sin dificultad:

$$\delta p = -\frac{p}{a}\,\delta a + p\left(\frac{1}{1 - e^2} - \frac{3}{2}\,\frac{\text{sen.}^2\,\phi}{r^2}\right).\,\delta e^2$$

De la misma forma serán las correcciones de p_1 , p_2, &c., y tomando por $\frac{\text{sen.}^2\,\phi}{r^2}$ para toda la cadena, el valor medio de esa cantidad, será constante el coeficiente de las p. Representando por m aquel valor, y sustituyendo, se tendrá la ecuacion de condicion:

$$(P' - P) + \frac{P}{a}.\,\delta a - P\left(\frac{1}{1 - e^2} - \frac{3}{2}\,m\right).\,\delta e^2 = 0$$

Siendo igualmente Q y Q' las diferencias geodésica y astronómica de longitud, y aplicando á la fórmula (4) de la pág. 138, un método de cálculo semejante, se hallará:

$$(Q' - Q) + \frac{Q}{a}.\,\delta a + \tfrac{1}{2}\,Q\,m.\,\delta e^2 = 0$$

Por medio de estas ecuaciones se determinarán fácilmente las correcciones δa y δe^2, que por la hipótesis, necesitan los elementos del elipsoide; pero debe tenerse presente que este procedimiento supone mucha precision en las triangulaciones, en los azimutes y en toda la parte artronómica, puesto que las discordancias se atribuyen únicamente á alguna irregularidad local del globo terrestre.

PARTE TERCERA.

ELEMENTOS DE ASTRONOMIA PRÁCTICA.

CAPITULO I.

DEFINICIONES Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

120.—Se ha dicho que la posicion de un punto de la supercie de la tierra se fija por medio de sus dos coordenadas geográficas, latitud y longitud, y que la direccion de una línea se determina por su azimut, que es el ángulo que forma con el meridiano que pasa por uno de sus extremos. La medida directa de estos tres elementos geográficos constituye la aplicacion mas usual de los principios astronómicos, y es la que me propongo exponer en la última Parte de la Geodesia, ya sea como complemento necesario de esta ciencia, ya como un medio sencillo y eficaz de obtener desde luego buenos datos para la construccion de grandes cartas geográficas, segun se ha indicado en el Capítlo X de la Parte Primera.

En 1867, con el título de «*Nuevos Métodos astronómicos,*» hice una publicacion destinada á facilitar las aplicaciones de la Astronomía; pero el carácter esencialmente práctico de esa obra no me permitió ocuparme de ciertos detalles elementales con los que su-

puse ya familiarizado al lector, como son el uso de las Efemérides ó Tablas astronómicas, el manejo de los instrumentos, las diversas maneras de medir el tiempo, los efectos de la refraccion y de la paralaje, &c. De todos estos principios me ocuparé ahora, á fin de que sirvan de introduccion para la lectura de aquel libro, procurando á la vez consignar aquí lo mas esencial de la práctica de la ciencia astronómica, y cuidando de referirme frecuentemente á los «Nuevos Métodos,» con el objeto de indicar al lector que lo desee, la parte de ese tratado en que puede encontrar mas detalles de cada aplicacion.

Recordemos brevemente ahora algunos principios fundamentales de la Astronomía. El movimiento de la tierra al derredor de su eje, que se efectúa con perfecta uniformidad, de Occidente á Oriente en el espacio de 24^h, produce la apariencia de un movimiento inverso de los cuerpos celestes al derredor del mismo eje, de modo que el observador cree ver que gira de Oriente á Poniente cada uno de los astros ó la inmensa esfera en que todos parecen colocados. El lenguaje comun está de acuerdo con estas apariencias, en lo cual no hay inconveniente alguno con tal que se le conceda su verdadero significado, y así decimos por brevedad, que una estrella sale, se eleva, pasa por el meridianc, &c., para expresar la situacion que en un momento dado ocupa respecto de nuestro horizonte.

Para determinar la posicion de un astro en la bóveda aparente del cielo se recurre á un sistema de coordenadas angulares análogas á las que fijan la situacion de un punto sobre la superficie de la tierra. Las coordenadas esféricas mas usuales son la *ascension recta* y la *declinacion*, que se refieren á dos planos perpendiculares entre sí. Sea NOS (fig. 38ª) el horizonte del observador, á quien suponemos en el centro C de este círculo. Su línea vertical prolongada cortará la esfera celeste en el zenit Z, y su meridiano será el plano $NPZS$ perpendicular al horizonte. El círculo máximo EO perpendicular al eje del mundo, y en consecuencia distante 90° del polo P, es el ecuador celeste, y puede suponerse que representa la interseccion de la esfera con el plano del ecuador terrestre prolongado. Todos los círculos máximos perpendiculares al ecuador, tales como PAD, se llaman *círculos horarios;* y todos los menores como aAa' paralelos al ecuador, se designan con el nombre de *círculos de declinacion*. Un astro que ocupe el punto A de la esfera, puede fijarse evi-

dentemente de posicion conociendo las de sus círculos horario y de declinacion. La del primero se determina por su distancia angular ΥD á un punto fijo Υ del ecuador, y la del segundo por su separacion angular $D A$ de este plano. Por punto fijo del ecuador se ha escogido una de sus intersecciones con el plano de la eclíptica, y es el que representa el equinoccio de primavera.

El arco ΥD es la ascension recta, y el $D A$ la declinacion del astro A. Segun esto, definirémos la ascension recta de un astro diciendo que es el arco del ecuador contado desde el punto equinoccial de primavera hasta el pié del plano horario que pasa por el astro. La declinacion será la distancia angular de un astro al ecuador contada en su círculo horario. Las ascensiones rectas se cuentan desde 0° hasta 360° de Occidente á Oriente, y por lo comun se expresan en tiempo desde 0^h hasta 24^h. Para que se comprenda bien esta manera de contar las ascensiones rectas, supongamos que se tiene un cronómetro ó un péndulo que señale exactamente 24^h en el espacio de tiempo que dura la revolucion completa de la esfera celeste, y que en el instante en que el punto equinoccial pase por el meridiano en E, marque 0^h con toda precision. Es claro que al pasar por el mismo plano cualquiera otro punto D, ó al coincidir con aquel el círculo horario $P A D$, señalará el péndulo cierta hora T, que mide el tiempo trascurrido desde el tránsito de Υ, y por tanto una cantidad de tiempo que guardará con el espacio total de 24^h la misma relacion que el ángulo ΥD con toda la circunferencia. El tiempo que dura la revolucion completa de la bóveda celeste, ó sea el que trascurre entre dos tránsitos consecutivos de un mismo punto por el meridiano, se llama *dia sideral*, que se cuenta desde el instante en que pasa ó culmina el punto equinoccial; y de aquí se deduce que la ascension recta ΥD de un astro A, expresada en tiempo, no es otra cosa mas que la hora sideral T de su paso por el meridiano.

Las declinaciones se cuentan desde 0° hasta 90° partiendo del ecuador tanto hácia el Norte como hácia el Sur, y para distinguir las boreales de las australes se consideran positivas las primeras y negativas las segundas, acompañándolas del signo correspondiente. No podrá dejar de notarse la grande analogía que ofrece la coordenada celeste llamada declinacion con la terrestre llamada latitud. Ambas, en efecto, se cuentan desde el ecuador en círculos perpendiculares á este plano, y con los mismos signos en iguales direcciones.

Se deduce de aquí que la latitud EZ del observador puede decirse que es la declinacion de su zenit, así como se dice que es igual á la altura NP del polo respecto de su horizonte. Tambien se infiere de lo anterior que un astro que tenga por declinacion una cantidad igual á la latitud de un lugar, pasará por el zenit de ese lugar en su tránsito por el meridiano; y que en general, un astro culminará al Norte ó al Sur del zenit segun que su declinacion sea mayor ó menor que la latitud del lugar.

121.—La posicion de un astro puede determinarse tambien en un instante cualquiera por medio de la observacion directa, midiendo simultáneamente otras dos coordenadas referidas al horizonte y al meridiano del observador. Estas son el *azimut*, que es el ángulo NZA, ó el arco del horizonte NB, que le sirve de medida, formado por el meridiano ZPN con el plano vertical ZAB que pasa por el astro; y su distancia *zential* ZA, que es la distancia angular del astro al zenit del observador. Así es que si con un altazimut, por ejemplo, se visa un astro, y se leen las indicaciones de sus dos círculos horizontal y vertical, conociendo de antemano la que señala el primero cuando el telescopio coincide con el meridiano, se obtendrán á la vez las dos coordenadas azimut y distancia zenital.

Este sistema de coordenadas varia á la verdad no solo de un punto á otro de la tierra, puesto que depende del lugar que en ella ocupa el observador, sino que tambien cambia de un instante á otro á causa del movimiento aparente del astro ó de la esfera celeste. Por esta razon es indispensable al determinar las posiciones de esa manera, anotar otros dos datos que son: la hora exacta de la observacion y la latitud del observador. Con estos dos elementos adicionales es fácil calcular la ascension recta y la declicacion del astro, pues en el triángulo ZPA se conocerá por la observacion el ángulo en Z, que es el azimut; el lado ZA, ó la distancia zenital; y el lado ZP, igual á la *colatitud*, ó sea al complemento de la latitud EZ. Se podrá calcular en consecuencia el tercer lado PA, que es la *distancia polar* del astro, complemento de su declinacion, y el ángulo ZPA llamado *ángulo horario* del astro. Este último elemento combinado con la hora de la observacion suministra la ascension recta, pues la figura da la ecuacion: $\Upsilon D = \Upsilon E - DE$. Como el arco ΥE expresado en tiempo, representa la hora T de la observacion, porque indica el tiempo trascurrido desde el paso del orígen Υ por el meri-

diano, si designamos por α la ascension recta que se busca y por h el ángulo horario, tendrémos por la ecuacion anterior:

$$\alpha = T - h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

122.—El triángulo ZPA formado en un instante cualquiera por el zenit, el polo y el lugar que ocupa el astro, se llama *triángulo astronómico*, y hace un papel tan importante en los problemas de la Astronomía práctica, que puede decirse que su resolucion forma el objeto de todas las aplicaciones usuales en esta ciencia. Es por consiguiente del mayor interes considerar desde ahora cada uno de sus elementos, á fin de evitar continuas repeticiones.

De los tres lados que lo forman, el arco ZP depende únicamente de la posicion del observador, de manera que este lado es constante para cada punto de la tierra, é igual á $90° - \phi$, designando siempre ϕ la latitud $EZ = PN$. El lado PA depende de la declinacion del astro, puesto que representa la distancia polar de este, igual á $90° - \delta$, llamando δ la declinacion. El tercer lado ZA cambia á cada instante por el movimiento ascensional de los astros, y varia desde $90°$ que es su valor cuando se observa una estrella en el horizonte, hasta el valor mínimo que adquiere en la culminacion del astro, quiere decir, en el momento de su tránsito superior por el meridiano. Este lado se designará siempre por z.

El ángulo en P hemos dicho que se llama horario, y lo designarémos en general por h. El ángulo en Z es el azimut del astro, que llamarémos a. El tercero ZAP se denomina ángulo *paraláctico*, y es formado por el plano vertical que pasa por la estrella con el de su círculo horario. Este ángulo se representará por p q.

Se comprenderá fácilmente que la posicion del observador, la del astro y la hora de la observacion contribuyen independientemente á modificar la forma del triángulo astronómico. Por lo general el lado z es el que se obtiene por la observacion directa, aunque regularmente acompañado de otro dato á causa de su variabilidad. De los ángulos, el horario h y el azimut a son los que con mas frecuencia se miden, el primero en tiempo con un instrumento cronométrico, y el segundo en arco con uno angular.

Respecto del signo, y del valor numérico de los elementos, la distancia zenital z se considera siempre positiva, sea cual fuere la re-

gion del cielo en que se observe un astro. La colatitud $90° - \phi$, cuando se refiere al polo Norte, es menor ó mayor que $90°$ segun que sea boreal ó austral la latitud, aunque en este último caso puede siempre tomarse menor si se refiere al polo Sur. La distancia polar $90° - \delta$ tambien es menor ó mayor que un cuadrante segun que sea positiva ó negativa la declinacion, al ménos cuando se refiera al polo boreal, como sucede generalmente.

Relativamente á los ángulos, contarémos el azimut desde $0°$ hasta $180°$ tanto del Norte al Oeste como del Norte al Este, considerándolo positivo en el primer caso y negativo en el segundo. Lo mismo dirémos del ángulo horario, el cual teniendo por expresion:..... $h = T - \alpha$ será positivo ó negativo segun que T sea mayor ó menor que α; y como T representa la hora *actual* de la observacion, esto es, la ascension recta del punto ó puntos que se hallan en ese instante en el meridiano, por lo cual se designa algunas veces por *ascension recta del meridiano*, resulta que h será negativo al Oriente ó ántes de la culminacion del astro, y positivo al Poniente despues que ha pasado por el meridiano. En uno y en otro caso se cuenta desde $0°$ hasta $180°$ en arco, ó desde 0^h hasta 12^h en tiempo, esto es, desde el paso superior por el meridiano hasta el inferior. En cuanto al ángulo paralláctico, se le considera con el mismo signo que el horario y el azimut, esto es, negativo al Este y positivo al Oeste. Todas estas indicaciones son necesarias para asignar los signos convenientes á las líneas trigonométricas de los diveros elementos del triángulo astronómico, así como para conocer el valor numérico de cualquiera de ellos cuando por medio del cálculo se obtenga el valor y el signo de alguna de sus líneas trigonométricas.

123.—Demos una idea general de las principales resoluciones de que es susceptible el triángulo astronómico, y que corresponden á otras tantas aplicaciones de las mas usuales. Conocida la latitud ϕ del observador, la declinacion δ del astro y su distancia zenital z, se calcula su ángulo horario por la fórmula:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\text{sen. } (m - c) \text{ sen. } (m - d)}{\text{sen. } d \text{ sen. } c}}$$

en la cual c representa la colatitud $90° - \phi$, y d la distancia polar $90 - \delta$, siendo m el semiperímetro, ó $m = \frac{1}{2}(c + d + z)$. Encuentro

mas cómodo dar otra forma á la ecuacion, introduciendo ϕ y δ en vez de sus complementos. A este fin, sustituyendo los valores de c y d en el de m, se halla:

$$m - c = \tfrac{1}{2}(z + \phi - \delta)$$
$$m - d = \tfrac{1}{2}(z - \phi + \delta)$$

y designando por a el primer ángulo y por b el segundo, tendrémos las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}(\phi - \delta) \\ b &= \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}(\phi - \delta) \\ \text{sen. } \tfrac{1}{2}h &= \sqrt{\frac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\cos.\ \phi \cos.\ \delta}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La form. 2 tiene necesidad de mayor número de operac. y ~~sobre todo~~ en observ. que no son permanentes, la correccion tambien se complica

Obtenido de esta manera el ángulo horario, convirtiéndolo en tiempo y tomando de las Efemérides la ascension recta α del astro, la ecuacion (1) da: $T = \alpha + h$, que suministra la hora exacta de la observacion. Así, pues, esta resolucion sirve para determinar el error de un cronómetro, quiere decir, su adelanto ó su atraso respecto de la hora real, pues es claro que si se anota la indicacion de este instrumento en el instante preciso en que se observa la distancia zenital del astro, la diferencia de esa indicacion respecto de la calculada T da á conocer la correccion que aquella necesita. La determinacion exacta del tiempo sirve de base á todas las demas aplicaciones de la Astronomía, de modo que bajo este punto de vista constituye uno de los problemas mas usuales.

124.—Se presenta tambien con bastante frecuencia la resolucion del problema inverso, á saber, hallar la distancia zenital de un astro en un instante dado. En tal caso se conocen ϕ, δ y $h = T - \alpha$; y se tendrá la ecuacion fundamental, despues de convertir á h en arco:

$$\cos.\ z = \text{sen. } \phi \text{ sen. } \delta + \cos.\ \phi \cos.\ \delta \cos.\ h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

la cual se calcula fácilmente por logaritmos valiéndose de un ángulo auxiliar M, determinado por la primera de las fórmulas siguientes, y cuyo valor se introduce en la segunda: $\tan M = \frac{\text{sen } M}{\cos M} = \frac{\tan \delta}{\cos h}$

sacando como factor á $\frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } M}$: $\cos z = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } M}\left(\text{sen } \phi \text{ sen } M + \cos \phi \frac{\cos h}{\tan \delta} \text{ sen } M\right)$ y como

$$\left.\begin{aligned} \tan.\ M &= \frac{\tan.\ \delta}{\cos.\ h} \\ \cos.\ z &= \frac{\text{sen. } \delta}{\text{sen. } M} \cos.\ (M - \phi) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$\frac{\cos h}{\tan \delta} \text{ sen } M = \cos M$

125.—Otro de los problemas mas comunes es el de hallar el azimut que tiene una estrella á una hora dada T. Entónces se conoce $h = T - \alpha$, así como ϕ y δ. El triángulo dará la ecuacion:

$$\text{sen. } \delta = \text{sen. } \phi \cos. z + \cos. \phi \text{ sen. } z \cos. a$$

Sustituyendo en ella el valor (A) de cos. z, y el siguiente de sen. z, que se obtiene por el mismo triángulo,

$$\text{sen. } z = \frac{\text{sen. } h \cos. \delta}{\text{sen. } a}$$

resulta sin dificultad:

$$\tan. a = \frac{\text{sen. } h \cos. \delta \cos. \varphi}{\text{sen. } \delta - \text{sen}^2 \varphi \text{ sen. } \delta - \text{sen. } \varphi \cos. \varphi \cos. \delta \cos. h} = \frac{\text{sen. } h \cos. \delta \cos. \varphi}{\text{sen. } \delta \cos^2 \varphi - \text{sen. } \varphi \cos. \varphi \cos. \delta \cos. h}$$

$$\tan. a = \frac{\text{sen. } h \cos. \delta \cos. \varphi}{\cos. \phi \tan. \delta - \text{sen. } \phi \cos. h}$$

Llamando M un ángulo subsidiario, se podrá calcular esta ecuacion por logaritmos bajo la forma:

$$\left.\begin{aligned} \tan. M &= \frac{\tan. \delta}{\cos. h} \\ \tan. a &= \frac{\tan. h \cos. M}{\text{sen. } (M - \phi)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Con los mismos datos ϕ, δ y h puede tambien determinarse el azimut á la vez que el ángulo paraláctico por las fórmulas de Napier, que aplicadas á nuestro triángulo, serán:

$$\left.\begin{aligned} \tan. \tfrac{1}{2}(a + q) &= \cot. \tfrac{1}{2} h \, \frac{\cos. \frac{1}{2}(\phi - \delta)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(\phi + \delta)} \\ \tan. \tfrac{1}{2}(a - q) &= \cot. \tfrac{1}{2} h \, \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(\phi - \delta)}{\cos. \frac{1}{2}(\phi + \delta)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Por uno ú otro método, si á la hora dada T se mide el ángulo entre la estrella y una señal terrestre, podrá deducirse el azimut de esta por medio de la combinacion del ángulo observado con el azimut a de la estrella en ese instante.

126.—La determinacion de la latitud constituye otra de las aplicaciones mas importantes. Conociendo, en efecto, la hora exacta á la cual se mide la distancia zenital de una estrella, se tienen los datos: $h = T - \alpha$, z y δ. Las fórmulas (3) darán, pues:

$$\left.\begin{aligned} \tan. M &= \frac{\tan. \delta}{\cos. h} \\ \cos. (M - \phi) &= \frac{\text{sen. } M}{\text{sen. } \delta} \cos. z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

la primera de las cuales suministra el ángulo M, la segunda $M - \phi$, y de cuya combinacion resulta por consiguiente el valor de ϕ.

127.—Para dar una idea del modo de determinar las longitudes geográficas, supongamos que se mida la distancia zenital de un astro que, como la luna, varie rápidamente de ascension recta, y sea δ su declinacion en el instante T en que se observe, y ϕ la latitud del lugar. Con los elementos ϕ, δ y z podrémos calcular su ángulo horario h por las fórmulas (2), y entónces la relacion (1) dará su ascension recta á la hora T de la observacion. Si en seguida por medio de las Tablas astronómicas se calcula la hora T' de otro lugar de la tierra, por ejemplo, de Greenwich, á la cual tenia la luna la ascension recta observada $\alpha = T - h$, la diferencia de horas $T' - T$ expresará en tiempo, la longitud de la estacion; porque esta coordenada no es otra cosa mas que la diferencia de horas que se cuentan en dos lugares de la tierra en un mismo instante físico, como es aquel en que un astro adquiere una posicion determinada.

Tales son en resúmen las aplicaciones prácticas mas frecuentes de la Astronomía; y aunque las resoluciones de estos problemas están muy léjos de ofrecer la extremada sencillez con que las he presentado, siempre considero ventajoso formarse desde el principio una idea general de su objeto, porque de esa manera se fijará mas la atencion en los detalles correspondientes á cada una de las operaciones. Estos detalles, la preparacion de los datos, sus diversas correcciones, el uso de las Efemérides y las modificaciones de que en determinadas circunstancias es susceptible el formulario mismo que ántes he expuesto, formarán el principal objeto de los Capítulos siguientes.

CAPITULO II.

DE LA MEDIDA DEL TIEMPO.

128.—Hemos dado á conocer el dia sideral, que es el espacio de tiempo que trascurre entre dos pasos sucesivos de una estrella por el meridiano, y dijimos tambien que se cuenta desde el instante del tránsito del punto equinoccial, orígen de las ascensiones rectas. Esta unidad de tiempo se divide en 24 horas siderales; cada una de estas en 60 minutos; cada minuto en 60 segundos, &c. En la Astronomía se hace un uso continuo del tiempo sideral; pero tambien se emplea con mucha frecuencia el solar, y por consiguiente importa establecer la relacion exacta que existe entre estas dos especies de tiempo. Antes de hacerlo, sin embargo, recordemos que el dia solar puede ser de tiempo *verdadero* y de tiempo *medio*. El primero es determinado por dos tránsitos sucesivos del sol verdadero por el meridiano; y el segundo por los de un astro ficticio, llamado *sol medio*, que se supone recorrer una órbita circular con un movimiento uniforme, é igual en magnitud á la velocidad media del sol verdadero. Se sabe, en efecto, que este último astro recorre aparentemente una órbita elíptica, aunque poco excéntrica, con una velocidad algo variable, lo cual da por resultado una pequeña desigualdad en la duracion de los dias solares verdaderos, y como esas diferencias serian difíciles de imitar en las máquinas que sirven para medir el tiempo, tales como los péndulos y los cronómetros, los astrónomos han recurrido al artificio del tiempo medio como mas á propósito para ser medido con aparatos cuya construccion está fundada en la unifor-

midad del movimiento. La adopcion del tiempo medio no puede originar, por otra parte, error alguno respecto de la realidad de las cosas, con tal que en cualquiera instante se pueda determinar la diferencia que existe entre una y otra especie de tiempo; porque esta diferencia vendrá á ser una correccion aplicable á las indicaciones de los instrumentos arreglados al movimiento del sol medio ó ficticio.

La diferencia de la hora media á la hora verdadera se llama *ecuacion del tiempo*. Si, pues, se representa la primera por M y la segunda por V, tendrémos en general:

$$M = V + E \qquad (1)$$

siendo E la ecuacion del tiempo. Esta cantidad, que apenas excede de un cuarto de hora cuando adquiere su valor máximo, es positiva ó negativa en diversas épocas del año, segun que el movimiento irregular del sol verdadero lo hace atrasar ó adelantar respecto de sol medio dotado hipotéticamente de un movimiento uniforme. El valor de E es positivo actualmente desde el 25 de Diciembre hasta el 15 de Abril siguiente, así como desde el 15 de Junio hasta el 31 de Agosto. En todo el resto del año es negativo. En las Efemérides consta su valor para cada dia del año, y puede interpolarse, en consecuencia, para un instante cualquiera.

129.—Veamos ahora la manera de calcular la duracion del dia medio y su relacion con el sideral. Como el año trópico, que es el tiempo que trascurre entre dos equinoccios de primavera, tiene una duracion de 365.242215 dias, se deduce que en ella recorre aparentemente el sol toda su órbita; y que suponiendo uniforme su movimiento, hallariamos el correspondiente á cada dia por la ecuacion:

$$x = \frac{360^\circ}{365^{d}.242215} = \frac{1296000''}{365^{d}.242215} = 59'\ 8.''33$$

Este valor será por consigniente el movimiento diario que se atribuye al sol medio en su órbita, la cual se supone ser el ecuador, de suerte que si un dia cualquiera se admite que este astro ocupe la posicion p grados de la órbita en el momento de su tránsito por el meridiano de un lugar, al dia siguiente al llegar á este plano ocupará la posicion $p + 59'\ 8.''33$. Se concibe entónces que la tierra en su movimiento de rotacion ha tenido que girar $360^\circ\ 59'\ 8.''33$ para

que el meridiano del lugar que se considera haya vuelto á ponerse en la direccion del sol medio. Como, ademas, el intervalo entre estos dos tránsitos, que es el que constituye el dia medio, se divide tambien en 24^h, resulta que cada hora media corresponderá á un arco de $\frac{360^\circ\ 59'\ 8.''33}{24}$, ó igual á $15^\circ\ 2'\ 27.''847$

Desprovistas las estrellas de un movimiento semejante, solo tiene que girar la tierra 360° para que un meridiano vuelva á coincidir con una estrella fija, lo cual asigna á cada hora sideral un arco de 15° solamente. De aquí se deduce que el tiempo que invierte la tierra en recorrer el arco de $59'\ 8.''33$ representa el exceso del dia medio respecto del sideral; exceso que puede valuarse tanto en tiempo medio como en tiempo sideral. Para lo primero tendrémos que si el arco de $15^\circ\ 2'\ 27.''847$ corresponde á una hora media, $59'\ 8.''33$ corresponderá á $3^m\ 55^s.90944$ de la misma especie de tiempo; y para lo segundo, si 15° corresponden á una hora sideral, el arco de $59'\ 8.''33$ corresponderá á $3^m\ 56^s.55533$ de tiempo sideral. Estas duraciones se designan generalmente con el nombre de *aceleracion* de las estrellas fijas, porque expresan efectivamente la cantidad de tiempo en que las estrellas parecen anticipar diariamente su tránsito por el meridiano respecto del sol.

De la aceleracion $3^m\ 55^s.90944$ en tiempo medio, y $3^m\ 56^s.55533$ en tiempo sideral puede deducirse la relacion que existe entre ambas especies de tiempo; pues designando en general por m una duracion cualquiera expresada en tiempo solar medio, y por s su equivalente en tiempo sideral, tendrémos:

$$\frac{m}{s} = \frac{235^s.90944}{236.55533}$$

de donde resultan las dos relaciones:

$$\left.\begin{aligned} m &= 0.9972696\ s \\ s &= 1.0027379\ m \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

por cuyo medio es fácil convertir intervalos de tiempo sideral en tiempo medio y vice versa. Sin embargo, como estas reducciones son muy frecuentes, y seria molesto recurrir siempre al cálculo directo, se han formado las Tablas que constan en las páginas siguientes, y cuyo uso abrevia notablemente la operacion. La primera de

estas Tablas tiene por argumento el tiempo medio en horas, minutos y segundos, y al lado de cada cantidad la correccion aditiva para convertir los intervalos correspondientes en tiempo sideral. La segunda, por el contrario, tiene el tiempo sideral por argumento y las correcciones sustractivas que les corresponden.

Ejemplo.—Sea $7^h\ 19^m\ 24^s.57$ una duracion de tiempo medio que se desea convertir en sideral. Por la primera Tabla se tendrá.

Por 7^h		$1^m\ 8^s.995$
„	19^m	3. 121
„	24^s	0. 066
„	0. 5	0. 001
„	0. 07	0. 001
Por $7^h\ 19^m\ 24^s.57$	Reduccion = +	$1^m\ 12^s.184$
	Duracion media = 7 19 24 57	
	Duracion sideral =	$7^h\ 20^m\ 36^s.75$

Reduzcamos ahora por la segunda Tabla el intervalo $7^h\ 20^m\ 36^s.75$ de tiempo sideral á tiempo medio.

Por 7^h		$1^m\ 8^s.807$
„	20^m	3. 277
„	36^s	0. 098
„	0. 7	0. 002
„	0. 05	0. 000
Por $7^h\ 20^m\ 36^s.75$	Reduccion = —	$1^m\ 12^s.184$
	Duracion sideral = 7 20 36. 75	
	Duracion media =	$7^h\ 19^m\ 24^s.57$

Aunque en las Tablas no constan entre los argumentos las fracciones de segundo, se toman las correcciones correspondientes á cada cifra suponiendo que expresa segundos enteros, y se escriben hácia la derecha en el lugar que les corresponde.

130.—Los cálculos precedentes sirven para convertir los *intervalos* expresados en una especie de tiempo en los equivalentes expresados en la otra; pero para reducir una hora absoluta de tiempo medio á la sideral que debe contarse en ese instante ó vice versa, se hace uso de la fórmula $T = \alpha + h$, que contiene la relacion entre la hora sideral, la ascension recta de un astro y su ángulo horario.

Aplicada al sol medio, siendo A su ascension recta y H su ángulo horario, tendrémos, pues:

$$T = H + A$$

y como el ángulo horario del sol medio al Occidente del meridiano no es otra cosa mas que la hora media que se cuenta en ese instante, se ve que esta fórmula da desde luego la reduccion de una hora á la otra. Si el sol se halla al Oriente del meridiano, H representa el tiempo que le falta para llegar á este plano, y por tanto la hora media es en ese momento $H' = 24^h - H$. Introduciendo este valor de H, y teniendo presente que el ángulo horario en tal caso es negativo, la ecuacion será: $T = A + H' - 24^h$. Este resultado indica que subsiste la fórmula primitiva, pues la adicion ó la sustraccion de 24^h no tiene mas objeto que el de evitar las horas negativas, ó bien el de no excederse en la fecha del dia á que corresponden los datos. Por regla general, siempre que una combinacion de horas produzca mas de 24^h, debe restarse esa cantidad; y por el contrario, agregarse para no tener horas negativas.

De las consideraciones precedentes se deduce que en todos casos debe tomarse $T = H + A$ por relacion entre las horas media y sideral; pero conviene notar que como la ascension recta A del sol siempre expresa tiempo sideral, miéntras que H expresa tiempo medio, resulta que si tomamos por A la hora sideral que se cuenta en el momento del tránsito del sol, no podrá subsistir la ecuacion entre una duracion media y las dos siderales A y T, á ménos que se reduzca H á esta última especie de tiempo por la adicion de la cantidad que le corresponda, tomada en las primeras de las Tablas de reduccion. Esto equivale evidentemente á tomar en cuenta el cambio de la ascension recta del sol en el tiempo H, en proporcion de su aumento diario de $3^m\ 56^s.55$, ó lo que es lo mismo, á tomar por A en la fórmula, tal como la hemos escrito, la ascension recta del sol en el instante H. Si, pues, se toma la que corresponde al momento de su culminacion, el valor de T deberá ser:

$$T = H + A + \text{accel.}\,(H) \qquad (3)$$

representando por accel. (H) la correccion que da la Tabla por el intervalo H, ó sea la parte proporcional de la aceleracion.

* aparentemente el ∠ horario H, como los demas horarios de estrellas debia estar representado en tiempo sideral, pero recordando que en 24^h siderales ó una revolucion completa en la Tierra el ☉ ha avanzado $3^m\ 56^s.55$ en asc. recta, 24 horas del sol ó su vuelta al meridiano, corresponden como ya se vió á $24^h\ 3^m$ &

Calculemos por ejemplo, la hora sideral que se contará en México el dia 16 de Enero de 1870 á las 9^h de la mañana. En tiempo astronómico, la fecha y hora que corresponden á ese instante son: 15 de Enero y 21^h; y como el 15 al pasar el sol por el meridiano de México tendrá por ascension recta $A = 19^h\ 40^m\ 1^s.32$, segun las Efemérides, dispondrémos el cálculo como sigue:

$H =$	21^h	00^m	$00^s.00$
$A =$	19	40	1.32
acel. $(H) =$	+	3	26.99
$T =$	16^h	43^m	$28^s.31$

La suma de A y acel. (H) representa la ascension recta del sol á la hora H, que en este caso seria de $19^h\ 43^m\ 28^s.31$.

131.—Si conociendo la hora sideral T quisiera hallarse la hora media correspondiente, la ecuacion primitiva daria $H = T - A$; pero si por A se toma la ascension recta del sol en el momento de su tránsito, la diferencia $T - A$, seria el ángulo horario H en tiempo sideral por indicar esta clase de tiempo T y A. Para obtener, pues, el valor de H en tiempo medio, es preciso restarle la reduccion que da la Tabla segunda por el intervalo $(T - A)$. Representándola por red. $(T - A)$, tendrémos en consecuencia:

$$H = T - A - \text{red. } (T - A) \quad \ldots\ldots (4)$$

Para aplicar esta fórmula calculemos la hora media de México el dia 15 de Enero de 1870 cuando se cuente la sideral..... $T = 16^h\ 43^m\ 28^s.31$

$T =$	16^h	43^m	$28^s.31$
$A =$	19	40	1.32
$T - A =$	21	3	26.99
red. $(T - A) =$		—3	26.99
$H =$	21^h	00^m	$00^s.00$

En este ejemplo fué preciso añadir 24^h á T para poder efectuar la sustraccion de la ascension recta A.

132.—En las fórmulas (3) y (4) se ha tomado por A la ascension recta del sol medio á la hora de su culminacion. Este elemento lo suministran las Efemérides para todos los dias del año, y está cal-

TABLA

Para reducir intervalos de tiempo medio á intervalos equivalentes de tiempo sideral.—ARGUMENTO: el tiempo medio.

y para corregir las ☉ medio merid. princ. y reduc. al del lugar

Horas	REDUCCION.	Minutos	Reduccion.	Minutos	Reduccion.	Segunds	Reduccion.	Segunds	Reduccion.
1h	+0m 9s 856	1m	+0s 164	31m	+5s 092	1s	+0s 003	31s	+0s 085
2	0 19. 713	2	0. 329	32	5. 257	2	. 005	32	. 088
3	0 29. 569	3	0. 493	33	5. 421	3	. 008	33	. 090
4	0 39. 426	4	0. 657	34	5. 585	4	. 011	34	. 093
5	0 49. 282	5	0. 821	35	5. 750	5	0. 014	35	0. 096
6	0 59. 139	6	0. 986	36	5. 914	6	. 016	36	. 099
7	1 8. 995	7	1. 150	37	6. 078	7	. 019	37	. 101
8	1 18. 852	8	1. 314	38	6. 242	8	. 022	38	. 104
9	1 28. 708	9	1. 478	39	6. 407	9	. 025	39	. 107
10	1 38. 565	10	1. 643	40	6. 571	10	0. 027	40	0. 109
11	1 48. 421	11	1. 807	41	6. 735	11	. 030	41	. 112
12	1 58. 278	12	1. 971	42	6. 899	12	. 033	42	. 115
13	2 8. 134	13	2. 136	43	7. 064	13	. 036	43	. 118
14	2 17. 991	14	2. 300	44	7. 228	14	. 038	44	. 120
15	2 27. 847	15	2. 464	45	7. 392	15	0. 041	45	0. 123
16	2 37. 704	16	2. 628	46	7. 557	16	. 044	46	. 126
17	2 47. 560	17	2. 793	47	7. 721	17	. 046	47	. 129
18	2 57. 416	18	2. 957	48	7. 885	18	. 049	48	. 131
19	3 7. 273	19	3. 121	49	8. 049	19	. 052	49	. 134
20	3 17. 129	20	3. 285	50	8. 214	20	0. 055	50	0. 137
21	3 26. 986	21	3. 450	51	8. 378	21	. 057	51	. 140
22	3 36. 842	22	3. 614	52	8. 542	22	. 060	52	. 142
23	3 46. 699	23	3. 778	53	8. 707	23	. 063	53	. 145
24	+3 56. 555	24	3. 943	54	8. 871	24	. 066	54	. 148
		25	4. 107	55	9. 035	25	0. 068	55	0. 151
		26	4. 271	56	9. 199	26	. 071	56	. 153
		27	4. 435	57	9. 364	27	. 074	57	. 156
		28	4. 600	58	9. 528	28	. 077	58	. 159
		29	4. 764	59	9. 692	29	. 079	59	. 161
		30	+4. 928	60	+9. 856	30	+0. 082	60	+0. 164

culado para el instante del paso del sol por el meridiano del lugar para el cual se han formado las mismas Tablas, y que se denomina *primer meridiano ó meridiano principal.* Las Efemérides inglesas que tienen por título "*Nautical Almanac*" y las americanas que llevan el mismo nombre están referidas al de Greenwich, como primer meridiano. Las francesas llamadas "*Connaissance des temps*" se refieren al meridiano de Paris; las españolas al de San Fernando, &c.

No obstante que el orígen del dia solar medio es el instante en que se supone que el centro del sol medio pasa por el meridiano de un lugar, en las Efemérides se llama ese momento *medio dia medio;* así como tambien se denomina *medio dia verdadero* el instante en que culmina el sol real. Sin duda estas denominaciones están deri-

TABLA

Para reducir intervalos de tiempo sideral á intervalos equivalentes de tiempo medio.—ARGUMENTO: el tiempo sideral.

Horas	REDUCCION.	Minutos	Reduccion.	Minutos	Reduccion.	Segunds	Reduccion.	Segunds	Reduccion.
1h	—0m 9s 830	1m	—0s 164	31m	—5s 079	1s	—0s 003	31s	—0s 085
2	0 19. 659	2	0. 328	32	5. 242	2	. 005	32	. 087
3	0 29. 489	3	0. 492	33	5. 406	3	. 008	33	. 090
4	0 39. 318	4	0. 655	34	5 570	4	. 011	34	. 093
5	0 49. 148	5	0. 819	35	5. 734	5	0. 014	35	0. 096
6	0 58. 977	6	0. 983	36	5. 898	6	. 016	36	. 098
7	1 8. 807	7	1. 147	37	6. 062	7	. 019	37	. 101
8	1 18. 637	8	1. 311	38	6. 225	8	. 022	38	. 104
9	1 28. 466	9	1. 474	39	6. 389	9	. 025	39	. 107
10	1 38. 296	10	1. 638	40	6. 553	10	0. 027	40	0. 109
11	1 48. 125	11	1. 802	41	6. 717	11	. 030	41	. 112
12	1 57. 955	12	1. 966	42	6. 881	12	. 033	42	. 115
13	2 7. 784	13	2. 130	43	7. 045	13	. 036	43	. 117
14	2 17. 614	14	2. 294	44	7. 208	14	. 038	44	. 120
15	2 27. 443	15	2. 457	45	7. 372	15	0. 041	45	0. 123
16	2 37. 273	16	2. 621	46	7. 536	16	. 044	46	. 126
17	2 47. 103	17	2. 785	47	7. 700	17	. 046	47	. 128
18	2 56. 932	18	2. 949	48	7. 864	18	. 049	48	. 131
19	3 6. 762	19	3. 113	49	8. 028	19	. 052	49	. 134
20	3 16. 591	20	3. 277	50	8. 191	20	0. 055	50	0. 137
21	3 26. 421	21	3. 440	51	8. 355	21	. 057	51	. 139
22	3 36. 250	22	3. 604	52	8. 519	22	. 060	52	. 142
23	3 46. 080	23	3. 768	53	8. 683	23	. 063	53	. 145
24	—3 55. 909	24	3. 932	54	8. 847	24	. 066	54	. 147
		25	4. 096	55	9. 010	25	0. 068	55	0. 150
		26	4. 260	56	9. 174	26	. 071	56	. 153
		27	4. 423	57	9. 338	27	. 074	57	. 156
		28	4. 587	58	9. 502	28	. 076	58	. 158
		29	4. 751	59	9. 666	29	. 079	59	. 161
		30	—4. 915	60	—9. 830	30	—0. 082	60	—0. 164

vadas del lenguaje comun de los usos civiles, en los cuales se toma generalmente por *dia* el espacio de tiempo que permanece el sol sobre el horizonte; y aunque astronómicamente impropias, están, sin embargo, admitidas. Así, pues, las Tablas astronómicas dan la ascension recta del sol medio para el medio dia medio del primer meridiano, y comunmente bajo el título de "*Tiempo sideral á medio dia medio;*" porque es en efecto la hora sideral que se cuenta al pasar el sol medio por el meridiano. Lo primero que, segun esto, debe hacerse para aplicar las fórmulas (3) y (4), es interpolar el valor de A para el meridiano del lugar en que se desea calcular la hora media por la sideral ó vice versa. Como el sol medio se supone uniforme en su movimiento, la interpolacion se reduce á hallar la parte pro-

porcional que por la variacion diurna $3^m\ 56^s.555$ corresponde al lugar cuya longitud respecto del meridiano de las Efemérides sea L. En efecto, en un lugar que tenga L por longitud expresada en tiempo, se verificará el paso del sol L horas despues que en el primer meridiano; ó bien L horas ántes si la longitud es negativa, quiere decir, si el lugar de que se trata está al Oriente del meridiano que se haya tomado por primero ó principal. Siendo, pues, A' la ascension recta del sol medio que consta en las Efemérides, y L la longitud del lugar, se tendrá en general:

$$A = A' + 236^s.56\,\frac{L}{24^h} \qquad (5)$$

dando á L el signo que le convenga segun la posicion del lugar respecto del primer meridiano. Aunque este cálculo es extremadamente sencillo, y una vez hecho se obtiene para cada lugar una correccion constante, se puede ejecutar tambien por medio de la primera de nuestras Tablas, puesto que lo que se desea en último resultado es hallar la aceleracion correspondiente al tiempo ó intervalo L. Determinemos, por ejemplo, la reduccion de las ascensiones rectas del sol medio calculadas para Greenwich al medio dia de México, siendo la longitud de esta ciudad $L = 6^h\ 36^m\ 28^s.6$ al Oeste de aquel meridiano.

Por 6^h	$59^s.139$
„ 36^m	5. 914
„ 28^s	0. 077
„ 0. 6	0. 002
Por $6^h\ 36^m\ 28^s.6$..... correccion $= +$	$1^m\ 5^s.132$

La cantidad $1^m\ 5^s.13$ es por consiguiente el aumento constante que debe hecerse á las ascensiones rectas del sol á medio dia de Greenwich para reducirlas al medio dia de México. El 15 de Enero de 1870, por ejemplo, el Almanaque Náutico da..... $A' = 19^h\,38^m\,56^s.19$, por lo cual he tomado $A = 19^h\ 40^m\ 1^s.32$ para México al aplicar las fórmulas precedentes.

133.—Las relaciones que se han expuesto entre las diversas especies de tiempo se prestan á muchas combinaciones para resolver varios problemas que se ofrecen con frecuencia. Así, por ejemplo, si se da la hora solar verdadera y se desea hallar la sideral, se de-

terminará primero la hora media correspondiente con ayuda de la ecuacion del tiempo por la fórmula (1), y en seguida esta se convertirá en sideral por la relacion (3). Presentemos algunos ejemplos usuales de esta clase de combinaciones.

Ejemplo 1º—¿Qué hora media se contará en México el 5 de Diciembre de 1870 en el instante en que la estrella α *Tauri*, cuya ascension recta es $\alpha = 4^h\ 28^m\ 31^s.19$, tenga $1^h\ 17^m\ 23^s.65$ por ángulo horario al Este del meridiano?

El Almanaque Náutico americano indica que en esa fecha á medio dia de Greenwich, la ascension recta del sol medio será:..... $A' = 16^h\ 56^m\ 19^s.92$. Tendrémos, pues:

$\alpha =$	4^h	28^m	$31^s.19$
$h = -$	1	17	23.65
$T =$	3	11	7.54
$A = -$	16	57	25.05
$T - A =$	10	13	42.49
red. $(T - A) =$		— 1	40.54
$H =$	10^h	12^m	$1^s.95$

Ejemplo 2º—¿A qué hora media pasará ese dia la misma estrella por el meridiano de México?

Este problema puede considerarse como un caso particular del precedente, pues en el momento del tránsito de un astro, su ángulo horario es nulo, y por consiguiente se tendrá $T = \alpha$, con lo cual la fórmula (4) se convierte en la siguiente:

Hora media del paso..... $H = \alpha - A$ — red. $(\alpha - A)$..... (6)

Aplicándola á la estrella α *Tauri*, se halla:

$\alpha =$	4^h	28^m	$31^s.19$
$A = -$	16	57	25.05
$\alpha - A =$	11	31	6.14
red. $(\alpha - A) =$		— 1	53.22
$H =$	11^h	29^m	$12^s.92$

Ejemplo 3º—¿Cuál seria la ascension recta de un astro observado el mismo dia al Oeste del meridiano de México, y que tuviese

$3^h\ 25^m\ 40^s.37$ por ángulo horario á la hora media $H = 9^h\ 55^m\ 49^s.21$?

$H =$	9^h	55^m	$49^s.21$
$A =$	16	57	25.05
accel. $(H) =$	+ 1		37.88
$T =$	2	54	52.14
$h =$	− 3	25	40.37
$\alpha =$	23^h	29^m	$11^s.77$

Ejemplo 4º—¿Cuál será el ángulo horario de α *Tauri* el 5 de Diciembre de 1870 cuando se cuenten en México las $13^h\ 00^m\ 00^s$ de tiempo medio?

$H =$	13^h	00^m	$00^s.00$
$A =$	16	57	25.05
accel $(H) =$	+ 2		8.13
$T =$	5^h	59^m	$33^s.18$
$\alpha =$	− 4	28	31.19
$h =$	+ 1^h	31^m	$1^s.99$

134.—Como se ofrece con mucha frecuencia la conversion de las longitudes geográficas y de los ángulos horarios de arco á tiempo y vice versa, terminaré este Capítulo con una Tabla por cuyo medio se hacen las reducciones acaso con mas facilidad que por la regla de la pág. 40. El uso de esta Tabla es tan sencillo, que se comprenderá inmediatamente con las siguientes aplicaciones.

La longitud de México respecto de Greenwich, expresada en tiempo es: $L = 6^h\ 36^m\ 28^s.6$, ¿cuál será su valor en arco?

Por 6^h	90°	00′	00.″0
,, 36^m	9	00	00. 0
,, 28^s		7	00. 0
,, 0. 6			9. 0
Por $6^h\ 36^m\ 28^s.6$	99°	7′	9.″0

Si la longitud de México es de 99° 7′ 9″, ¿á cuánto equivale en tiempo?

Por 90°	6^h	00^m	$00^s.0$
,, 9		36	00. 0
,, 7′			28. 0
,, 9″			0. 6
Por 99° 7′ 9″	6^h	36^m	$28^s.6$

No constando en la Tabla las decimales, lo que se hace es tomar la cantidad que corresponderia á cada cifra si fuese entera, y se divide despues por 10 ó por 100, segun el rango de la decimal. Así, para encontrar el arco equivalente á $0^s.6$, tomamos el que corres-

ponde á 6^s, que es $1'\ 30''$ ó bien $90''$, y lo dividimos por 10. Una operacion análoga se ejecuta para hallar el tiempo equivalente á un arco pequeño que no se encuentre en la Tabla, por ejemplo, $12''$. Considerándolo descompuesto en $15'' - 3''$, su correspondiente será $1^s - \frac{1}{5}^s = 0^s.8$. Por otra parte, para mas sencillez puede hacerse uso de la pequeña tabla auxiliar que sigue, desde 1 hasta 15.

Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.
1′	4^s	6′	24^s	11′	44^s	1″	$0^s.07$	6″	$0^s.40$	11″	$0^s.73$
2	8	7	28	12	48	2	.13	7	.47	12	.80
3	12	8	32	13	52	3	.20	8	.53	13	.87
4	16	9	36	14	56	4	.27	9	.60	14	.93
5	20	10	40	15	60	5	.33	10	.67	15	1.00

TABLA

PARA CONVERTIR TIEMPO EN ARCO Y RECIPROCAMENTE.

Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.
1^h	15°	1^m	0°15′	31^m	7°45′	1^s	0′15″	31^s	7′45″
2	30	2	0 30	32	8 00	2	0 30	32	8 00
3	45	3	0 45	33	8 15	3	0 45	33	8 15
4	60	4	1 00	34	8 30	4	1 00	34	8 30
5	75	5	1 15	35	8 45	5	1 15	35	8 45
6	90	6	1 30	36	9 00	6	1 30	36	9 00
7	105	7	1 45	37	9 15	7	1 45	37	9 15
8	120	8	2 00	38	9 30	8	2 00	38	9 30
9	135	9	2 15	39	9 45	9	2 15	39	9 45
10	150	10	2 30	40	10 00	10	2 30	40	10 00
11	165	11	2 45	41	10 15	11	2 45	41	10 15
12	180	12	3 00	42	10 30	12	3 00	42	10 30
13	195	13	3 15	43	10 45	13	3 15	43	10 45
14	210	14	3 30	44	11 00	14	3 30	44	11 00
15	225	15	3 45	45	11 15	15	3 45	45	11 15
16	240	16	4 00	46	11 30	16	4 00	46	11 30
17	255	17	4 15	47	11 45	17	4 15	47	11 45
18	270	18	4 30	48	12 00	18	4 30	48	12 00
19	285	19	4 45	49	12 15	19	4 45	49	12 15
20	300	20	5 00	50	12 30	20	5 00	50	12 30
21	315	21	5 15	51	12 45	21	5 15	51	12 45
22	330	22	5 30	52	13 00	22	5 30	52	13 00
23	345	23	5 45	53	13 15	23	5 45	53	13 15
24	360	24	6 00	54	13 30	24	6 00	54	13 30
		25	6 15	55	13 45	25	6 15	55	13 45
		26	6 30	56	14 00	26	6 30	56	14 00
		27	6 45	57	14 15	27	6 45	57	14 15
		28	7 00	58	14 30	28	7 00	58	14 30
		29	7 15	59	14 45	29	7 15	59	14 45
		30	7 30	60	15 00	30	7 30	60	15 00

Convendría haber extendido esta tabla á cuadecimales para evitarse algunas reducciones por las fracciones de segundo de tiempo á arco

CAPITULO III.

DE LA REFRACCION ASTRONOMICA.

135.—Se sabe que cuando un rayo luminoso pasa oblicuamente de un medio á otro de diversa densidad, se desvía de su direccion primitiva. Este fenómeno, conocido con el nombre de *refraccion*, produciéndose en la masa de aire que rodea á la tierra, influye necesariamente en la posicion de los astros haciéndonoslos ver en un lugar algo diferente del que ocupan en realidad. La desviacion total que sufre el rayo luminoso que emite un astro se produciria de una sola vez al atravesar la atmósfera terrestre, si esta fuera de una densidad uniforme en toda su altura; pero teniendo una densidad decreciente desde la superficie de la tierra, podemos considerarla como compuesta de capas concéntricas, diversamente densas, en cuya hipótesis el rayo luminoso iria experimentando desviaciones parciales y formando en sus distintas direcciones una línea quebrada ó poligonal hasta llegar al observador. Atribuyendo á las capas un espesor sumamente pequeño, de manera que pueda suponerse que sus densidades tengan un decremento gradual y continuo, la línea poligonal formada por el rayo luminoso se convertirá en una curva cuyo último elemento es el que recibe el observador, el cual refiere la direccion del astro á la de la tangente en ese punto de la curva.

Sea $A\,a$ (fig. 39ª) la direccion en que un rayo de luz que parte de un astro A, entra en a á la atmósfera terrestre. Al atravesar la primera capa sufre la primera desviacion, y encuentra á la segunda en b: en este punto vuelve á desviarse, formando el segundo elemento $b\,c$ de la curva; y así sucesivamente hasta el observador O, quien

verá el astro en A', siendo $A\ O\ A'$ el efecto de la refraccion. Para dar una idea del modo de calcularlo, recordemos las principales leyes á que está sujeto este fenómeno. La primera de ellas indica que el plano $O\ a\ C$ en que se encuentra el rayo despues de refractado coincide con el plano $C\ a\ A$ en que se hallaba ántes de refractarse; y la segunda que el seno del ángulo $A\ a\ Z'$ de incidencia, guarda una relacion constante con el del ángnlo $C\ a\ b$ de refraccion.

Por la primera ley se comprende que todo el efecto de la refraccion se produce en el plano vertical determinado por el rayo incidente $A\ a$ y por la línea vertical $C\ Z$ del observador, ó lo que es lo mismo, que la refraccion altera únicamente la distancia zenital sin producir variacion en el azimut del astro. La alteracion consiste en disminuir las distancias zenitales, por lo cual es preciso añadir á las que se observen el valor de la refraccion.

Fundados en la segunda ley podrémos calcular el valor aproximativo de la refraccion, reflexionando para esto que la mayor parte de la desviacion se produce en las capas mas densas, que son las mas inmediatas á la tierra; y que en consecuencia podrémos admitir que la refraccion seria sensiblemente la misma suponiendo que todo el fenómeno se verifica en a, admitiendo que este fuese un punto de una capa próxima á la tierra y que el rayo refractado siguiese despues una direccion rectilínea $a\ O$.

Designando por I el ángulo de incidencia $A\ a\ Z'$, por R el de refraccion $C\ a\ O$, y por n el índice de refraccion del aire, tendrémos:

$$\frac{\text{sen. } I}{\text{sen. } R} = n$$

Prolongando hasta B el rayo incidente y llamando r el efecto de la refraccion $B\ a\ O = A\ a\ A'$, se tiene ademas: $I = R + r$. Sustituyendo en la ecuacion anterior, desarrollando y teniendo presente que por ser r solo de algunos minutos se puede suponer cos. $r = 1$ y sen. $r = r$ sen. $1''$, resulta:

$$r = \frac{n-1}{\text{sen. } 1''} \text{ tan. } R$$

El ángulo $Z\ O\ A'$ es la distancia zenital *aparente*, ó afectada por la refraccion: designándola por z', y por C el ángulo $Z\ C\ Z'$, se halla $R = z' - C$, con lo cual el valor de r será:

$$r = \frac{n-1}{\text{sen. } 1''} \text{ tan. } (z' - C)$$

Siempre que no es muy considerable la distancia zenital, el valor de C es pequeño, y podrémos omitirlo para adoptar la fórmula aproximativa:

$$r = \frac{n-1}{\text{sen. } 1''} \text{ tan. } z'$$

la cual indica que las refracciones son proporcionales á las tangentes de las distancias zenitales aparentes. Introduciendo en ella el valor del coeficiente de refraccion del aire, que es $n = 1.00028$; se encuentra:

$$r = 57.''8 \text{ tan. } z' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

136.—La fórmula anterior suministra con suficiente exactitud las refracciones desde 0° hasta 50° ó 60° de distancia zenital; pero la hipótesis en que está fundada origina errores de importancia para mayores distancias al zenit. Ya para $z' = 80°$ produce un error de unos 7'', y este crece rápidamente al aumentar z'. A la verdad, el establecimiento de una fórmula que represente con entera precision las refracciones para cualquiera altura ó distancia zenital es uno de los problemas que ofrecen mas dificultades, originadas en su mayor parte por nuestra ignorancia de la verdadera constitucion de la atmósfera y de las leyes que siguen el decremento de densidad y temperatura de sus capas superiores, que no son fácilmente accesibles á nuestra observacion. Muchos geómetras distinguidos, como Laplase, Bradley, Bessel, &c., se han ejercitado en una investigacion tan interesante, partiendo de hipótesis mas ó ménos plausibles, y han establecido fórmulas que representan con mucha exactitud las refracciones obtenidas por la experimentacion directa, especialmente para distancias zenitales que no excedan de 80°. Para menores alturas respecto del horizonte los resultados de diversas fórmulas dejan de concordar bien entre sí y con los de las observaciones, lo cual tambien depende de las irregularidades que sufre la refraccion misma cuando la luz atraviesa muy oblicuamente la masa atmosférica. Esta última circunstancia ha hecho prescribir la regla general de evitar la práctica de observaciones astronómicas á mas de 80° de distancia zenital, ó sea á ménos de 10° de altura sobre el horizonte.

No intentaré exponer las investigaciones de todos los astrónomos que se han ocupado de la teoría de la refraccion, porque no ofrecen

interes bajo el punto de vista puramente práctico, y la fórmula aproximativa que he establecido es suficiente para mi objeto, que fué el de dar una idea general del monto de la refraccion y de la manera de calcularla. Las diversas Tablas que se han construido, bien sea con los resultados obtenidos por la experimentacion directa, ó bien por medio de teorías auxiliadas por la observacion, proporcionan los valores de las refracciones con cuanta exactitud puede desearse en la práctica.

137.—Antes de explicar el uso de la Tabla de refracciones que va al fin de este libro, y que es la de Ivory, indiquemos la manera de obtener experimentalmente la refraccion que corresponde á cualquiera distancia zenital. Debe advertirse de antemano que cuando las distancias zenitales son pequeñas, la fórmula $r = 57.''8 \tan. z'$ ó cualquiera otra, suministra el valor de r con bastante exactitud; y aun se conviene generalmente en que la refraccion cerca del zenit es de tantos segundos como grados tenga la distancia zenital, al ménos si esta no excede de 8° ó 10°. Segun esto, si se observa una estrella cuya declinacion difiera poco de la latitud del lugar, midiendo sus distancias zenitales tanto en el momento de su tránsito por el meridiano, como cuando tenga diversos ángulos horarios, y se anotan las horas exactas de las observaciones, se habrán adquirido los datos necesarios para la determinacion de las refracciones correspondientes. En efecto, aun suponiendo que el observador no conozca la latitud de su estacion, la medida de la distancia zenital meridiana ζ combinada con la declinacion δ de la estrella, le dará $\phi = \zeta + \delta$ si la estrella culmina al Sur, y $\phi = \delta - \zeta$ si culmina al Norte del zenit; y como por la hipótesis solo tiene algunos grados la distancia zenital meridiana, podrá conocer el valor exacto de ζ, que es la cantidad angular obtenida despues de añadirle la pequeña refraccion que le corresponda. En seguida con ϕ, δ y h como datos puede aplicarse la resolucion del número 124 para obtener por el cálculo la distancia zenital verdadera z correspondiente á la hora $T = \alpha + h$ de la observacion. Como á la hora T se supone tambien medida directamente la distancia zenital aparente z', se deduce que la diferencia entre el resultado del cálculo y el de la observacion representa el efecto de la refraccion que conviene á z', y se tendrá: $r = z - z'$.

Variando las circunstancias de la observacion de manera que se obtengan valores de z' desde las inmediaciones del zenit hasta cerca

del horizonte, se podrá formar por este método una Tabla de refracciones, independiente de toda hipótesis relativa á la constitucion de la atmósfera; y quedará el observador en aptitud de corregir sus observaciones posteriores, por la ecuacion $z = z' + r$, qne suministra la distancia zenital real cuando es z' la aparente.

138.—Ya sea que se suponga formada una Tabla del modo experimental que se ha explicado, ó bien que se tenga calculada por cualquiera de las fórmulas que dan exactamente la refraccion, es indispensable tomar en cuenta otros dos elementos que modifican ligeramente el valor tabular de r, y que necesariamente varian de una observacion á otra, aun respecto de los mismos valores numéricos de las distancias zenitales aparentes. Estos elementos son la temperatura y la presion *actuales* del aire, que haciendo variar su densidad, influyen en la magnitud de la refraccion, puesto que se admite que esta es proporcional á la densidad de aquel fluido.

Si, pues, se toma por unidad la densidad del aire cuando es P la altura del barómetro y θ su temperatura y la del aire, su densidad á cualquiera otra presion p cuando el termómetro fijo indique la temperatura τ y el libre la temperatura t, será: $\frac{p}{P\,(1+m\,(\tau-\theta))\,(1+a\,(t-\theta))}$ siendo a y m respectivamente los coeficientes de dilatacion del aire y del mercurio. Designando ahora por ρ la refraccion que corresponde á cualquiera distancia zenital con las indicaciones P y θ del barómetro y de los termómetros, y por r la refraccion actual para la presion p y las temperaturas τ y t, se tendrá:

$$r = \frac{p\,\rho}{P\left(1+m\,(\tau-\theta)\right)\left(1+a\,(t-\theta)\right)}$$

La Tabla de Ivory que va al fin de este libro contiene los logaritmos de ρ para $P = 0^{m}762$ y $\theta = 10°$, por lo cual haciendo para abreviar:

$$b = \frac{p}{0^{m}762} \qquad l = \frac{1}{1+a\,(t-10)} \qquad f = \frac{1}{1+m\,(\tau-10)} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

se tiene que el valor de la refraccion para las condiciones atmosféricas *actuales*, es:

$$r = b\,l\,f\,\rho \quad \ldots\ldots\ (3)$$

A la Tabla de los logaritmos de ρ he añadido otras dos, la primera de las cuales da los logaritmos de b con la presion ó altura barométrica observada p por argumento, y la segunda los logaritmos de l y de f con las indicaciones de los termómetros libre y fijo por argumentos. En consecuencia, toda la operacion se reduce á sumar los cuatro logaritmos para obtener el de la refraccion que corresponde á los datos z', p, t y τ suministrados por la observacion.

Ejemplo.—¿Cuál será la distancia zenital corregida por la refraccion cuando la aparente es $z' = 73° 24' 19.''4$, la indicacion del barómetro $p = 0^m.586$, la del termómetro libre $t = 17.°3$ y la del fijo $\tau = 20.°0$?

Interpolando el log. ρ para el valor de z', obtendrémos:

ρ	2.2869	
b	9.8859	
l	9.9892	
f	9.9992	$z' = 73° 24' 19.''4$
r	2.1612	$r = + 2 24. 9$
		$z = 73° 26' 44.''3$

A falta de barómetro para tomar en cuenta la presion atmosférica, podria hacerse uso de un ipsómetro, pues hemos visto (Tomo I, pág. 517) que con las indicaciones de este instrumento se obtiene fácilmente aquel dato. Como en tal caso el valor de p se supone ya reducido á 0° de temperatura, se adoptará $\tau = 0°$ para tomar el correspondiente log. f en las Tablas de refraccion. El termómetro libre debe colocarse en un lugar descubierto á fin de obtener la verdadera temperatura del aire.

CAPITULO IV.

DE LA PARALAJE Y SUS EFECTOS.

139.—El fenómeno de la refraccion, de que me he ocupado en el Capítulo anterior, no es la única causa de alteracion en las posiciones de algunos astros sobre la esfera celeste, sino que hay otra que afecta las posiciones de aquellos cuyas distancias á la tierra son comparativamente pequeñas, ó si se quiere, de aquellos respecto de cuyas distancias son apreciables las dimensiones de la tierra.

Supongamos para mayor claridad que dos observadores situados en distintos lugares del globo dirijan simultáneamente sus visuales á un mismo astro. Las dos líneas formarán en el centro del astro cierto ángulo cuyo valor dependerá tanto de la distancia que separa á los dos observadores cuanto de la del astro al centro de la tierra. Para la inmensa mayoría de los cuerpos celestes este ángulo, llamado *paralaje*, es rigurosamente nulo; porque sus distancias son tales, que las dimensiones de nuestro planeta desaparecen ante la magnitud de aquellas, y son paralelas las visuales que se les dirigen desde cualquiera punto de la tierra. No sucede lo mismo respecto del sol, de los planetas, y sobre todo de la luna, en atencion á que sus distancias al centro del globo, aunque muy considerables, no pueden suponerse infinitas relativamente al radio terrestre. Segun esto, desde dos ó mas lugares en que se observe alguno de estos astros en un mismo instante físico, no se le verá ocupar la misma posicion en la esfera celeste, puesto que cada observador lo referirá á la direccion de su visual, y por consiguiente lo verá proyectado en el punto en que

esta encuentra á la esfera. De aquí proviene la necesidad de referir todas las posiciones á un punto único, que es el centro de la tierra; de modo que las coordenadas que constan en las Efemérides son *geocéntricas*, ó tales como las veria un observador colocado en el centro del globo. Por la misma razon todas nuestras observaciones, practicadas en la superficie de la tierra, deben reducirse á un centro, pues de otra manera no podrian ser comparables, y para esta reduccion es necesario el conocimiento de la paralaje.

Sea O (fig. 40ª) la estacion que ocupa el observador en la superficie, y C el centro de la tierra. Al observar el astro L, lo verá el observador en la direccion $O\,L$; miéntras que desde C se veria en la $C\,L$. El ángulo $O\,L\,C$ será, pues, la paralaje que mide la diferencia de direcciones en que se ve el astro desde O y desde C. Segun esto, definirémos la paralaje de un astro diciendo que es el ángulo $O\,L\,C$ bajo el cual se veria desde su centro L el radio $C\,O$ del observador O.

A medida que el astro se aproxime al zenit Z, disminuirá el efecto de la paralaje, y será nulo en el mismo punto Z. Por el contrario, al acercarse al horizonte irá creciendo, y llegará á su *máximum* cuando el astro se encuentre en L', sobre el horizonte del observador. Por estas explicaciones se comprende que el efecto de la paralaje se ejerce en el plano vertical que pasa por el astro, y produce un aumento en la distancia zenital $Z\,O\,L$, llamada aparente, respecto de la verdadera ó geocéntrica $Z\,C\,L$. Por esta razon el ángulo $O\,L\,C$ se denomina generalmente paralaje de distancia zenital, ó bien paralaje de altura.

140.—Si designamos por z' la distancia zenital aparente $Z\,O\,L$ despues de corregida por la refraccion, por z la geocéntrica $Z\,C\,L$ y por p la paralaje de distancia zenital $O\,L\,C$, el triángulo dará: $z = z' - p$. Para calcular el valor de p que corresponde á cualquiera valor de z', llamemos R el radio $O\,C$ de la tierra y $\triangle$ la distancia actual $C\,L$ del astro al centro del globo. El triángulo $O\,C\,L$ suministra la relacion:

$$\text{sen}\, p = \frac{R}{\triangle}\, \text{sen.}\, z'$$

En lugar de hallar el valor de p por esta fórmula es preferible eliminar la distancia $\triangle$ de este modo. Llamando π la paralaje *ho-*

rizontal que tendria lugar cuando el astro, sin variar de distancia al centro de la tierra, se hallase en L', tendrémos, puesto que en tal caso $z' = 90°$:

$$\text{sen. } \pi = \frac{R}{\Delta}$$

é introduciendo este valor en la ecuacion precedente se halla por último:

$$\text{sen. } p = \text{sen. } \pi \text{ sen. } z' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Las Efemérides proporcionan directamente el valor de la paralaje horizontal para un punto cualquiera del ecuador terrestre, quiere decir, para cualquiera estacion de la superficie de la tierra cuya distancia al centro sea igual al radio a del ecuador; y de este elemento, llamado paralaje horizontal *ecuatorial*, es fácil deducir el que corresponde á otro punto que tenga R por radio. Designando, en efecto, por π_0 el dato de las Efemérides, tendrémos las ecuaciones:

$$\text{sen. } \pi_0 = \frac{a}{\Delta} \qquad\qquad \text{sen. } \pi = \frac{R}{\Delta}$$

por cuya combinacion se obtiene:

$$\frac{\text{sen. } \pi}{\text{sen. } \pi_0} = \frac{R}{a} = (1 - e^2 \text{ sen.}^2 \phi)^{\frac{1}{2}}$$

Como las dos paralajes siempre difieren muy poco y no son considerables, la relacion de sus senos es sensiblemente la misma que la de los arcos; y en consecuencia podemos sustituir esta última á fin de obtener la reduccion de la paralaje ecuatorial á la que conviene á la latitud ϕ. Desarrollando el binomio hasta el término en e^2, resultará, pues:

$$\frac{\pi}{\pi_0} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 \text{ sen.}^2 \phi$$

y de aquí se obtiene:

$$\pi = \pi_0 - \tfrac{1}{2} \pi_0 e^2 \text{ sen.}^2 \phi$$

De esta manera por la sustraccion de la pequeña cantidad..... $\frac{1}{2} \pi_0 e^2$ sen.^{2} ϕ se reduce la paralaje ecuatorial al horizonte de otro lugar que tenga ϕ por latitud.

141.—He supuesto hasta ahora que es R la distancia de la estacion O al centro de la tierra, lo cual equivale á admitir que sea nula su elevacion sobre el nivel del mar; pero si no es así, y designamos por n la altura, es claro que la distancia del observador al centro de la tierra será $R + n$, y la paralaje deberá sufrir otra pequeña correccion por n.(*) Reproduciendo con $R + n$ el mismo razonamiento que se ha hecho con R, las ecuaciones para determinar el valor de π serán:

$$\text{sen. } \pi_0 = \frac{a}{\Delta} \qquad \text{sen. } \pi = \frac{R+n}{\Delta}$$

de las que se obtendrá como ántes:

$$\pi = \pi_0 - \tfrac{1}{2}\,\pi_0\, e^2 \text{ sen.}^2\,\phi + \pi_0\,\frac{n}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La luna es el único astro cuya paralaje es bastante grande para que sea preciso hacer estas pequeñas correcciones por latitud y altura sobre el nivel del mar, pues su valor medio es $\pi_0 = 57'$, variando entre $53'\,30''$ y $60'\,30''$ próximamente, segun que aumenta ó disminuye su distancia á la tierra. Para el sol que solo tiene $8.''6$ por paralaje horizontal, y para los planetas, se omiten esas correcciones por no tener valor apreciable; y la paralaje de distancia zenital se calcula por la fórmula siguiente, que proviene de la (1) tomando los pequeños arcos en segundos por sus senos:

$$p = \pi \text{ sen. } z'$$

Las Tablas que van á continuacion contienen las dos pequeñas correcciones por latitud y altura, relativas á la paralaje de la luna. La primera, que da la correccion sustractiva, tiene por argumentos π_0 y ϕ; la segunda, que da la correccion aditiva, tiene la altura n sobre el nivel del mar, expresada en metros, y la paralaje ecuatorial por argumentos.

Ejemplo.—En un lugar cuya latitud es de 26° y cuya altura sobre el nivel del mar se estima en 2250^m, se obtuvo 60° 27′ 35.″0 por distancia zenital aparente del centro de la luna. ¿Cuál será su distancia zenital geocéntrica sabiendo que en el instante de la observacion la paralaje horizontal ecuatorial era de $59'\,43.''1$?

(*) En ninguna obra de Astronomía he visto que se tome en cuenta esta correccion; pero no creo que deba omitirse cuando se trate de observaciones exactas, especialmente en nuestro país, á causa de la considerable elevacion de la mayor parte de su territorio.

π_0 = paralaje horiz. ecuatorial

Correccion de la paralaje de la luna por la latitud del observador.

$$\tfrac{1}{2}\,\pi_0\, e^2\, \text{sen.}^2\phi$$

LATITUD.	π_0 53′	π_0 57′	π_0 61′
ϕ 14°	0.″6	0.″7	0.″7
16	0. 8	0. 9	0. 9
18	1. 0	1. 1	1. 2
20	1. 2	1. 3	1. 4
22	1. 5	1. 6	1. 7
24	1. 8	1. 9	2. 0
26	2. 0	2. 2	2. 4
28	2. 3	2. 5	2. 7
30	2. 7	2. 9	3. 1
32	3. 0	3. 2	3 4
34	3. 3	3. 6	3. 8

n = altura en metros sobre el nivel del mar.

Correccion de la paralaje de la luna por la altura de la estacion sobre el nivel del mar.

$$\pi_0 \frac{n}{a}$$

ALTURA.	π_0 53′	π_0 57′	π_0 61′
n 500m	0.″2	0.″3	0.″3
1000	0. 5	0. 5	0. 6
1500	0. 7	0. 8	0. 9
2000	1. 0	1. 1	1. 1
2500	1. 2	1. 3	1. 4
3000	1. 5	1. 6	1. 7
3500	1. 7	1. 9	2. 0
4000	2. 0	2. 1	2. 3
4500	2. 2	2. 4	2. 6
5000	2. 5	2. 7	2. 9

$\pi_0 = 59'\ 43.''1$ sen. π..... 8.2396786

Correc. por ϕ..... $-2.\ 3$ sen. z'..... 9.9395239 $z' = 60°\ 27'\ 35.''0$

Correc. por n..... $+1.\ 2$ sen. p..... 8.1792025..... $p = -\ 51\ 56.\ 34$

$\pi = 59'\ 42.''0$ $z = 59°\ 35'\ 38.''7$

El cálculo de la ecuacion (1) demanda en general logaritmos de siete cifras decimales; pero es fácil darle una forma mas conveniente para obtener en segundos el valor de p con logaritmos de cinco cifras. Para esto se tiene que el arco en funcion del seno, es..... $p = \text{sen. } p + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3\, p$. Sustituyendo en esta fórmula el valor (1) de sen. p, y tomando el arco por el seno en el término sen.^{3} p, resulta:

$$p = \text{sen. } \pi\ \text{sen. } z' + \tfrac{1}{6}\,\pi^3\ \text{sen.}^3\, z'$$

Se sabe ademas que sen. $\pi = \pi - \frac{1}{6}\,\pi^3$....., por lo cual sustituyendo en la serie anterior, reduciendo y expresando en segundos los arcos π y p, se tendrá en último resultado:

$$p'' = \pi''\,\text{sen. } z' - (8.5930)\,\pi^3\ \text{sen. } z'\ \text{cos.}^2\, z' \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

La cantidad numérica que está dentro del paréntesis es el logaritmo constante de $\frac{1}{6}$ sen.^{2} 1.″ Apliquemos esta fórmula al ejemplo precedente, tomando $\pi = 3582.''0$

π..... 3.55413 Const..... 8.5930 Primer término..... 51′ 56.″4

sen. z'..... 9.93952 cos.^{2} z'..... 9.3858 Segundo ,, ... —0. 04

3.49365..... 3.4936 $p = 51'\ 56.''36$

π^2..... 7.1082

3116.″4 8.5806

Por esta aplicacion se ve que aun para la luna bastará casi siempre calcular el efecto de la paralaje por la fórmula mas sencilla $p = \pi$ sen. z'.

142.—Hasta ahora se ha supuesto conocida la distancia zenital aparente, puesto que el valor de p se ha calculado en funcion de z'. Este dato es, en efecto, el que se obtiene por la observacion directa; pero á veces hay necesidad de calcular la distancia zenital aparente para compararla, por ejemplo, con la que suministra la observacion, y entónces sirviéndose de la posicion geocéntrica de la luna se halla por el cálculo la distancia zenital verdadera z, ó tal como se observaria desde el centro de la tierra, y es preciso determinar el valor de p en funcion de este elemento. A este fin sustituyamos por z' su valor $z + p$ en la ecuacion (1) y desarrollemos para encontrar:

$$\text{sen. } p = \text{sen. } \pi \, (\text{sen. } z \cos. p + \cos. z \text{ sen. } p)$$

Dividiendo por cos. p y despejando se hallará:

$$\text{tan. } p = \frac{\text{sen. } \pi \text{ sen. } z}{1 - \text{sen. } \pi \cos. z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Esta fórmula se reduce fácilmente á serie muy convergente elevando el denominador al numerador, á saber:

$$\text{tan. } p = \text{sen. } \pi \text{ sen. } z \, (1 + \text{sen. } \pi \cos. z + \ldots\ldots\ldots)$$

y puesto que sen. $2z = 2$ sen. z cos. z, tendrémos, tomando los pequeños arcos p y π en segundos por sus líneas trigonométricas, y calculando el logaritmo de $\frac{1}{2}$ sen. $1''$.

$$p'' = \pi'' \text{ sen. } z + (4.3845)\, \pi^2 \text{ sen. } 2z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ejemplo.—Si la distancia zenital geocéntrica de la luna es de $59° 35' 38.''7$ cuando la paralaje horizontal corregida es $59' 42.''0$, ¿cuál será su distancia zenital aparente?

π.....	3.55413	Const.....	4.3845	Primer término.....	$51' 29.''3$
sen. z.....	9.93573	π^2.....	7.1082	Segundo ,, ...	$+ 27.''1$
		sen. $2z$.....	9.9410		
	3.48986		1.4337	π =	$51' 56.''4$
	$3089.''3$			z =	$59\ 35\ 38.\ 7$
				z' =	$60° 27' 35.''1$

143.—La mayor parte de los astros no se presentan á la vista sino como puntos luminosos, aun valiéndose de los mas poderosos telescopios; pero el sol, la luna y los planetas ofrecen un disco considerable, que es preciso tomar en cuenta. No siendo directamente observables los centros de esos astros, lo que se observa es alguno de sus bordes, y se reducen despues las observaciones al centro sirviéndose del *semidiámetro*, que es el ángulo $L\,C\,q$ (fig. 40ª) bajo el cual se veria desde el centro de la tierra el radio $L\,q$ de un astro. La correccion de las distancias zenitales por el semidiámetro será aditiva ó sustractiva, segun que se haya observado el borde superior ó el inferior del astro.

El valor del semidiámetro de un astro se obtiene fácilmente conociendo su paralaje horizontal ecuatorial y la relacion de su radio con el de la tierra. Se ha visto, en efecto, que la paralaje tiene por expresion: sen. $\pi_0 = \frac{a}{\Delta}$, y por otra parte, llamando s el semidiámetro, y r el radio lineal $L\,q$ del astro, el triángulo rectángulo $L\,C\,q$, da: sen. $s = \frac{r}{\Delta}$. Eliminando á Δ entre estas dos ecuaciones, y tomando los pequeños arcos s y π_0 por sus senos, se halla:

Semidiámetro geocéntrico ..... $s = \frac{r}{a}\pi_0$ ..... (6)

Para la luna la relacion $\frac{r}{a}$ es de 0.273, de manera que se tiene para cualquiera valor de la paralaje: $s = 0.273\,\pi_0$. De este modo están calculados los semidiámetros que constan en las Efemérides.

144.—El semidiámetro geocéntrico $s = L\,C\,q$ de la luna no tiene, sin embargo, exactamente el mismo valor que el aparente $s' = L\,O\,q'$ tal como se ve desde la superficie de la tierra, á causa de la desigualdad de las distancias $L\,C$ y $L\,O$. Designando por Δ' esta última distancia, tendrémos por los triángulos rectángulos $L\,C\,q$ y $L\,O\,q'$:

$$r = \Delta \text{ sen. } s \qquad\qquad r = \Delta' \text{ sen. } s'$$

de donde resulta la siguiente relacion, tomando los arcos por los senos:

$$s' = \frac{\Delta}{\Delta'}\,s$$

y como el triángulo $O\,C\,L$ da: $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z}$, se hallará:

$$s' = s\,\frac{\text{sen } z'}{\text{sen. } z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Esta fórmula permitiria calcular el semidiámetro aparente s' si se conociesen las distancias zenitales verdadera y aparente; mas como la observacion solo suministra directamente esta última, trasformemos la expresion anterior eliminando á z. Mas bien que el valor de s', conviene calcular el aumento $s' - s$ que debe hacerse al semidiámetro geocéntrico s para obtener el aparente s'. Con este objeto notemos que la relacion $\frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z}$ siempre difiere muy poco de la unidad, y haciendo:

$$\frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z} = 1 + u$$

se tendrá: $s' = s\,(1 + u)$, ó bien:

$$s' - s = s\,u$$

En cuanto al valor de u, será: $u = \frac{\text{sen. } z' - \text{sen. } z}{\text{sen. } z}$, y trasformando el numerador, teniendo presente que $z' - z = p$, resulta sin dificultad:

$$u = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2} p \cos. (z' - \frac{1}{2} p)}{\text{sen. } z' \cos. p - \cos. z' \text{ sen. } p} = \frac{\text{sen. } p \cos. z' + 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} p \text{ sen. } z'}{\text{sen. } z' \cos. p - \cos. z' \text{ sen. } p}$$

Si se sustituye el valor (1) de sen. p, obtendrémos despues de abreviar:

$$u = \frac{\text{sen. } \pi \cos. z' + 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} p}{\cos. p - \text{sen. } \pi \cos. z'}$$

Como el valor de u es muy pequeño, no hay inconveniente en tomar los arcos en segundos por los senos y la unidad por cos. p, omitiendo la segunda potencia de sen. $\frac{1}{2} p$, para obtener:

$$u = \frac{\pi \cos. z' \text{ sen. } 1''}{1 - \pi \cos. z' \text{ sen. } 1''}$$

Representando ahora por k la relacion constante $\frac{s}{\pi} = 0.273$, tendrémos $\pi = \frac{s}{k}$, y por consiguiente:

$$u = \frac{\frac{s}{k} \cos. z' \text{ sen. } 1''}{1 - \frac{s}{k} \cos. z' \text{ sen. } 1''} = \frac{s}{k} \cos. z' \text{ sen. } 1'' \left(1 - \frac{s}{k} \cos. z' \text{ sen. } 1''\right)^{-1}$$

Desarrollando el binomio hasta la primera potencia, resulta por último:

$$u = \frac{s}{k} \cos. z' \text{ sen. } 1'' + \frac{s^2}{k^2} \cos.^2 z' \text{ sen.}^2 1''$$

con lo cual el aumento del semidiámetro será:

$$s' - s = M s^2 \cos. z' + M^2 s^3 \cos.^2 z' \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

expresion en la que M representa la constante $\frac{\text{sen. } 1''}{k}$, y se tiene: log. $M = 5.24941$.

Esta fórmula puede reducirse á Tabla para tomar á la vista con los argumentos distancia zenital aparente y semidiámetro geocéntrico, el aumento $s' - s$ que corresponde á este último. La Tabla que va á continuacion está calculada por una fórmula de Mr. Francœur análoga á la anterior. Es claro que el aumento del semidiámetro solo es sensible para la luna á causa del valor considerable de su paralaje.

Ejemplo.—Sean $z' = 39°$ y $s = 16' 30'' = 990''$ los datos para calcular el semidiámetro aparente ó aumentado.

M	5.24941	M^2	0.4988
s^2	5.99127	s^3	8.9869
cos. z'	9.89050	cos.^{2} z'	9.7810
	1.13118		9.2667
	13.″53		0.″18

El aumento será de 13.″7, y en consecuencia el semidiámetro aparente, $s' = 16' 43.''7$.

145.—Reasumiendo lo que se ha expuesto en este y en el Capítulo anterior, vemos que cuando se observa uno de los bordes ó limbos de un astro con el fin de medir la distancia zenital verdadera de su centro, hay que hacer tres correcciones á la indicacion del instrumento, y son la de refraccion, la de paralaje y la de semidiámetro aparente. Si, pues, designamos por z' el ángulo que da el instrumento cuando el hilo horizontal de su telescopio es tangente á uno de los bordes del astro, y ademas representamos como hasta aquí, por r la refraccion, por p la paralaje de distancia zenital y

por s' el semidiámetro aumentado, tendrémos que en general la distancia zenital verdadera del centro, tiene por expresion:

$$z = z' + r - p \pm s' \ldots\ldots (9)$$

tomando para s' el signo $\{\pm\}$ cuando se observe el borde $\{^{\text{superior.}}_{\text{inferior.}}\}$ Tratándose de una estrella fija, p y s son nulos, y se tiene simplemente: $z = z' + r$.

Aunque el órden de estas correcciones es casi indiferente á causa de lo poco que varian sus valores por un cambio considerable de la distancia zenital, el método mas razonable es el de corregir en primer lugar por la refraccion, que afecta al borde directamente observado. En seguida, con los argumentos s y $z' + r \pm s$ se toma de la Tabla el aumento del semidiámetro; y por último, con..... $z' + r \pm s'$ se calcula el valor de p por las fórmulas (1) ó (3), pues la z' que figura en ellas representa la distancia zenital aparente del centro.

146.—Debo hacer notar que sin sacrificar la exactitud á la brevedad del cálculo, puede seguirse un procedimiento que evita la necesidad de tomar en cuenta el aumento del semidiámetro. Consiste en hacer primero la correccion por refraccion, lo mismo que se ha dicho, y despues con $z' + r$ calcular la paralaje de distancia zenital. De este modo se obtiene el valor de p que convendria al limbo observado, y aplicándolo á $z' + r$, resulta $z' + r - p$ por distancia zenital verdadera del mismo borde, quiere decir, tal como se observaria desde el centro de la tierra. En tal caso se puede ya hacer uso del semediámetro geocéntrico que dan las Efemérides, para obtener la distancia zenital verdadera del centro. Así, pues, designando por p' la paralaje que corresponde al borde, la fórmula (9) puede reemplazarse por la siguiente:

$$z = z' + r - p' \pm s \ldots\ldots (10)$$

Para comparar los dos métodos apliquémoslos á los datos siguientes. La distancia zenital del borde inferior de la luna, corregida por los errores del instrumento y por la refraccion, se encontró ser $z' + r = 59^\circ\ 1'\ 13.''0$, la paralaje horizontal corregida por latitud y altura, era $\pi = 56'\ 23.''5$; y el semidiámetro tabular ó de las Efemérides, $s = 15'\ 23.''4$. Empleando el primer procedimiento toma-

AUMENTO DEL SEMIDIAMETRO DE LA LUNA.

$s'-s = M s^2 \cos z^2 + M^2 s^3 \cos^2 z'$ ——— $M = \frac{\sin 1''}{R} = \frac{\sin 1''}{\text{arc } 1''} = \sin 1''$

$\log R = 5.2494941$ (corregida por refracción)

Argumentos: *Distancia zenital aparente y semidiámetro geocéntrico.*

Dist. zenit.	14′ 30″	15′ 00″	15′ 30″	16′ 00″	16′ 30″	17′ 00″	Dist. zenit.	14′ 30″	15′ 00″	15′ 30″	16′ 00″	16′ 30″	17′ 00″
0°	13.″7	14.″6	15.″6	16.″7	17.″7	18.″8	46°	9.″5	10.″2	10.″9	11.″6	12.″3	13.″1
2	13. 7	14. 6	15. 6	16. 7	17. 7	18. 8	48	9. 2	9. 8	10. 5	11. 2	11. 9	12. 6
4	13. 6	14. 6	15. 6	16. 6	17. 7	18. 8	50	8. 8	9. 4	10. 1	10. 7	11. 4	12. 1
6	13. 6	14. 6	15. 6	16. 6	17. 6	18. 7	52	8. 4	9. 0	9. 7	10. 3	10. 9	11, 6
8	13. 5	14. 5	15. 5	16. 5	17. 6	18. 7	54	8. 1	8. 6	9. 2	9. 8	10. 5	11. 1
10	13. 5	14. 4	15. 4	16. 4	17. 5	18. 6	56	7. 7	8. 2	8. 8	9. 4	10. 0	10. 6
12	13. 4	14. 3	15. 3	16. 3	17. 4	18. 4	58	7. 3	7. 8	8. 3	8. 9	9. 4	10. 0
14	13. 3	14. 2	15. 2	16. 2	17. 2	18. 3	60	6. 9	7. 3	7. 9	8. 4	8. 9	9. 5
16	13. 1	14. 1	15. 0	16. 0	17. 1	18. 1	62	6. 5	6. 9	7. 4	7. 9	8. 4	8. 9
18	13. 0	13. 9	14. 9	15. 9	16. 9	17. 9	64	6. 0	6. 5	6. 9	7. 4	7. 8	8. 3
20	12, 9	13. 8	14. 7	15. 7	16. 7	17. 7	66	5. 6	6. 0	6. 4	6. 8	7. 3	7. 7
22	12. 7	13. 6	14. 5	15. 5	16. 5	17. 5	68	5. 2	5. 5	5. 9	6. 3	6. 7	7. 1
24	12. 5	13. 4	14. 3	15, 2	16. 2	17. 2	70	4. 7	5. 1	5. 4	5. 8	6. 1	6. 5
26	12. 3	13. 2	14. 1	15. 0	16. 0	16. 9	72	4. 3	4. 6	4. 9	5. 2	5. 6	5. 9
28	12. 1	12. 9	13. 8	14. 7	15. 7	16. 6	74	3. 8	4. 1	4. 4	4. 7	5. 0	5. 3
30	11. 8	12, 7	13. 5	14. 4	15. 4	16. 3	76	3. 4	3. 6	3. 9	4. 1	4. 4	4. 7
32	11. 6	12. 4	13. 3	14. 1	15. 1	16. 0	78	2. 9	3. 1	3. 3	3. 6	3. 8	4. 0
34	11. 3	12, 1	13. 0	13. 8	14. 7	15. 6	80	2. 4	2. 6	2. 8	3. 0	3. 2	3. 4
36	11. 1	11. 8	12. 7	13. 5	14. 4	15. 3	82	2. 0	2. 1	2. 3	2. 4	2. 6	2. 7
38	10. 8	11. 5	12. 3	13. 1	14. 0	14. 9	84	1. 5	1, 6	1. 7	1. 9	2. 0	2. 1
40	10. 5	11. 2	12. 0	12. 8	13. 6	14. 4	86	1. 0	1. 1	1. 2	1. 3	1. 4	1. 5
42	10. 2	10. 9	11. 6	12. 4	13. 2	14. 0	88	0. 6	0. 6	0. 7	0. 7	0. 8	0. 8
44	9. 8	10. 5	11. 3	12. 0	12. 8	13. 6	90	0. 1	0. 1	0. 1	0. 1	0. 2	0. 2

rémos el aumento del semidiámetro con los elementos $s = 15'\ 23.''4$ y $z' + r - s = 58°\ 46'$ próximamente, y hallarémos $s' - s = 8.''0$ por lo cual $s' = 15'\ 31.''4$. Entónces la distancia zenital aparente del centro, será: $z' + r - s' = 58°\ 45'\ 41.''6$. Con este valor calculemos el de p y la distancia zenital verdadera del centro.

sen. π 8.2149215
sen. $(z' + r - s')$ 9.9319745

$z' + r - s' = 58°\ 45'\ 41.''6$
sen. p ..... 8.1468960 ..... $p = -\ 48\ 12.\ 9$

$z = 57°\ 57'\ 28.''7$

Determinemos ahora la paralaje correspondiente al limbo observado, haciendo uso de $z' + r$ solamente.

sen. π 8.2149215
sen. $(z' + r)$ 9.9331579

$z' + r = 59°\ 1'\ 13.''0$
sen. p' ..... 8.1480794 ..... $p' = -\ 48\ 20.\ 8$
$s = -\ 15\ 23.\ 4$

$z = 57°\ 57'\ 28.''8$

Se ve que ambos resultados concuerdan hasta donde puede desear

se, siendo mas breve el segundo método en atencion á que no hay necesidad de ocuparse del aumento del semidiámetro; y se ve tambien que la paralaje del limbo difiere de la del centro una cantidad sensiblemente igual á aquel aumento.

147.—Puesto que la paralaje produce el efecto de hacer aparecer á un astro mas bajo de lo que está realmente, originará tambien el de alterar aparentemente los valores geocéntricos ó tabulares de su ascension recta y de su declinacion. Sea, en efecto, A (fig. 41ª) el lugar verdadero del astro, y A' el aparente tal como se observa desde la superficie de la tierra, siendo $A\,A'$ el efecto p de la paralaje en el sentido vertical. El ángulo horario aparente será $Z\,P\,A'$ siempre numéricamente mayor que el verdadero $Z\,P\,A$, y en consecuencia la ascension recta aparente $\Upsilon\,D' = a'$, diferirá de la real $\Upsilon\,D = a$, una cantidad $D\,D' = A\,P\,A'$, que designaré por β. La declinacion aparente $D'\,A' = \delta'$, tampoco será igual á la verdadera $D\,A = \delta$, sino que diferirán una cantidad que representaré por γ, de modo que tendrémos:

$$a' = a - \beta$$
$$\delta' = \delta - \gamma$$

Determinemos los efectos β y γ, que se llaman respectivamente paralajes de ascension recta y de declinacion, comenzando por el primero. Designado por h' el ángulo horario aparente $Z\,P\,A' = h + \beta$, el triángulo $Z\,P\,A'$ da para el ángulo paraláctico $q' = P\,A'\,Z$:

$$\text{sen. } q' = \frac{\text{sen. } h' \cos. \phi'}{\text{sen. } z'}$$

y el triángulo $A\,P\,A'$ suministra esta otra forma del mismo valor:

$$\text{sen. } q' = \frac{\text{sen. } \beta \cos. \delta}{\text{sen. } p}$$

Igualándolo al anterior, y recordando que sen. p = sen. π sen. z', resulta desde luego:

$$\text{sen. } \beta = \frac{\text{sen. } \pi \cos. \phi'}{\cos. \delta} \text{sen. } h' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

fórmula que da el valor de la paralaje de ascension recta en funcion

del ángulo horario aparente. Para obtenerlo en funcion del verdadero sustituyamos por h' su valor $h + \beta$, y se hallará sin dificultad despues de desarrollar y dividir por cos. β:

$$\text{tan. } \beta = \frac{\frac{\text{sen. } \pi \text{ cos. } \phi'}{\text{cos. } \delta} \text{ sen. } h}{1 - \frac{\text{sen. } \pi \text{ cos. } \phi'}{\text{cos. } \delta} \text{ cos. } h}$$

Representando para abreviar por m el coeficiente de sen. h y cos. h, se puede escribir la ecuacion de este modo:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\text{sen. } \pi \text{ cos. } \phi'}{\text{cos. } \delta} \\ \text{tan. } \beta &= \frac{m \text{ sen. } h}{1 - m \text{ cos. } h} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Como la última es de la misma forma que la (4), es reductible á serie por el mismo método, y se hallará en segundos con la exactitud suficiente.

$$\beta = \frac{m \text{ sen. } h}{\text{sen. } 1''} + \frac{m^2 \text{ sen. } 2h}{2 \text{ sen. } 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

El signo de β, segun lo indican las fórmulas, depende del de h; de suerte que será positiva la paralaje de ascension recta al Oeste del meridiano, y negativa al Este. Siendo $a' = a - \beta$ la expresion de la ascension recta aparente, se deduce que al Oeste, la paralaje disminuye la verdadera y al Este la aumenta. En cuanto al ángulo horario aparente $h' = h + \beta$ siempre resulta aumentado numéricamente por ser en todos casos del mismo signo h y β.

Ejemplo.—¿Cuál será la ascension recta aparente de la luna el dia 1º de Diciembre de 1870, á la hora sideral $T = 22^h\ 6^m\ 3.^s37$ de un lugar cuya latitud geocéntrica es $\phi' = 19°\ 19'\ 0.''0$, sabiendo que en ese instante la ascension recta verdadera de la luna es $a = 0^h\ 19^m\ 31.^s66$, su declinacion $\delta = -3°\ 31'\ 00.''6$ y su paralaje corregida..... $\pi = 54'\ 48.''0$?

El ángulo horario geocéntrico (pág. 252) será $h = -2^h\ 13^m\ 28.^s29$

que convertido en arco es: $h = -33^\circ\ 22'\ 4.''3$. Apliquemos la fórmula (11).

sen. π	8.2024883		
cos. ϕ'	9.9748361		
cos. δ	—9.9991814		
m	8.1781430	.....	8.17814
sen. h	9.7403725—	cos. h	9.92177
			8.09991
Numerador	7.9185155—		0.012587
Denominador	9.9944988	.....	0.987413
tan. β	7.9240167—	$\beta = -0^\circ\ 28'\ 51.''5$	

El valor de β expresado en tiempo es $-1^m\ 55^s.43$, por lo cual la ascension recta y el ángulo horario aparente, serán en este caso:

$$a' = 0^h\ 19^m\ 31^s.66 + 1^m\ 55^s.43 = 0^h\ 21^m\ 27^s.09$$
$$h' = -33^\circ\ 22'\ 4.''3 - 28'\ 51.''5 = -33^\circ\ 50'\ 55.''8$$

Si se quiere hacer uso de la fórmula (12), se tiene:

m	8.17814	m^2	6.3563		
sen h	9.74037—	sen. $2h$	9.9632—	Primer térm?	$= -1709.''8$
sen. $1''$	—4.68557	2 sen. $1''$	—4.9866	Segundo „	$= -\ 21.\ 5$
	3.23294—		1.3329—	$\beta = -1731.''3 = -28'\ 51.''3$	

148.—Para calcular la paralaje γ de declinacion tenemos que en los triángulos astronómicos aparente PZA' y verdadero PZA, es comun el azimut $a = PZA'$; y por consiguiente siendo iguales los dos valores de cos. a resulta la ecuacion:

$$\frac{\text{sen. } \delta' - \text{sen. } \phi' \text{ cos. } z'}{\text{sen. } z'} = \frac{\text{sen. } \delta - \text{sen. } \phi' \text{ cos. } z}{\text{sen. } z}$$

Ejecutando las operaciones y recordando que..... $z' - z = p = \text{sen. } \pi \text{ sen. } z'$, obtendrémos:

$$\text{sen. } \delta' = (\text{sen. } \delta - \text{sen. } \pi \text{ sen. } \phi') \frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z}$$

Se tiene, ademas, por la comparacion de los valores de sen. a que dan los mismos triángulos:

$$\frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z} = \frac{\text{sen. } h' \cos. \delta'}{\text{sen. } h \cos. \delta} \quad \ldots\ldots (14)$$

y así sustituyendo se halla fácilmente:

$$\tan. \delta' = \tan. \delta \left(1 - \frac{\text{sen. } \pi \text{ sen. } \phi}{\text{sen. } \delta}\right) \frac{\text{sen. } h'}{\text{sen. } h} \quad \ldots\ldots (15)$$

ecuacion que suministra la declinacion aparente en funcion de la geocéntrica y de los ángulos horarios aparente y verdadero.

Generalmente es mejor calcular el efecto $\gamma = \delta - \delta'$ para aplicarlo como correccion á la declinacion geocéntrica δ. A este fin, representando por b la cantidad $\frac{\text{sen. } \pi \text{ sen. } \phi}{\text{sen. } \delta}$, tomemos la tangente de γ, y sustituyamos en su valor el precedente de tan. δ', esto es:

$$\tan. \gamma = \frac{\tan. \delta - \tan. \delta \, (1 - b) \frac{\text{sen. } h'}{\text{sen. } h}}{1 + \tan.^2 \delta \, (1 - b) \frac{\text{sen. } h'}{\text{sen. } h}}$$

Como la relacion $\frac{\text{sen. } h'}{\text{sen. } h}$ difiere muy poco de la unidad, hagamos:

$$\frac{\text{sen. } h'}{\text{sen. } h} = 1 + x$$

de donde resulta:

$$x = \frac{\text{sen. } h' - \text{sen. } h}{\text{sen. } h} = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2} \beta \cos. \frac{1}{2} (h' + h)}{\text{sen. } h}$$

y el valor de tan. γ se convierte en:

$$\tan. \gamma = \frac{\tan. \delta - (1 - b)(1 + x) \tan. \delta}{1 + (1 - b)(1 + x) \tan.^2 \delta} = \frac{\left(b (1 + x) - x\right) \tan. \delta}{\sec.^2 \delta - \left(b (1 + x) - x\right) \tan.^2 \delta}$$

Multiplicando numerador y denominador por cos.^{2} δ, se obtiene:

$$\tan. \gamma = \frac{\left(b (1 + x) - x\right) \text{sen. } \delta \cos. \delta}{1 - \left(b (1 + x) - x\right) \text{sen.}^2 \delta}$$

Restableciendo $\frac{\text{sen. } h'}{\text{sen. } h}$ por $1 + x$, y sustituyendo los valores de x y de b, harémos para abreviar:

$$n = \frac{\text{sen. } \pi \text{ sen. } \phi' \text{ sen. } h'}{\text{sen. } h} - \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}\beta \cos. \frac{1}{2}(h' + h) \text{ sen. } \delta}{\text{sen. } h}$$

con lo cual se tendrá:

$$\tan \gamma = \frac{n \cos. \delta}{1 - n \text{ sen. } \delta} \qquad \ldots\ldots (16)$$

Esta fórmula puede tambien reducirse á serie para calcularla en segundos con mas comodidad con logaritmos de pocas decimales, y resultará:

$$\gamma = \frac{n \cos. \delta}{\text{sen. } 1''} + \frac{n^2 \text{ sen. } 2\,\delta}{2 \text{ sen. } 1''} \qquad \ldots\ldots (17)$$

Ejemplo.—Calculemos la declinacion aparente de la luna con los mismos elementos del párrafo anterior, á saber:

$\pi =$ 0° 54′ 48.″0 $\qquad \delta =$ — 3° 31′ 00.″6

$\phi' =$ 19 19 0. 0 $\qquad h =$ — 33 22 4. 3

y como en aquella aplicacion se halló $\beta =$ — 28′ 51.″3, se tendrá, haciendo uso de las fórmulas (16), y recordando que $h' = h + \beta$.

sen. π.....	8.2024883	2.....	0.3010300		
sen. ϕ'.....	9.5195510	sen. $\frac{1}{2}\beta$.....	7.6228908—		
sen. h'.....	9.7458580—	cos. $\frac{1}{2}(h' + h)$.....	9.9205620		0.0053398
sen. h.....	—9.7403725—	sen. δ.....	8.7877564—		—0.0007796
	7.7275248	sen. h'.....	—9.7403725—	$n =$	0.0061194
			6,8918667—		

n.....	7.7867088	.....	7.78671		
cos. δ.....	9.9991814	sen. δ.....	8.78776—		
Num.....	7.7858902		6.57447—	$\gamma =$	0° 20′ 59.″4
Den.....	—0.0001630			$\delta =$	— 3 31 0. 6
			—0.0003754		
tan. γ.....	7.7857272	Den =	1.0003754	$\delta' =$	— 3° 52′ 00.″0

Aunque en todo el cálculo he empleado logaritmos de siete cifras, no hay inconveniente en tomarlos de cinco al determinar el valor de n, que siempre es una pequeña fraccion; así como tampoco lo hay en sustituir π sen. 1″ y β sen. 1″ por sen π y 2 sen. $\frac{1}{2}\beta$,

expresando estos arcos en segundos. Hagámoslo así al aplicar la serie (17).

π.....	3.51693	β.....	3.23842—	
sen. ϕ.....	9.51955	cos. $\frac{1}{2}(h'+h)$.....	9.92056	
sen. h'.....	9.74586—	sen. δ.....	8.78776—	
sen. $1''$.....	4.68557	.....	4.68557	0.00534
sen. h'.....	—9.74037—	.....	—9.74037—	—0.00078
	7.72754		6.89194—	$n = 0.00612$

n.....	7.78675	n^2.....	5.5735		
cos. δ	9.99918	sen. $2\,\delta$.....	9.0879—	1.er térm.º =	0° 21′ 00.″0
sen. $1''$.....	—4.68557	2 sen. $1''$.....	—4.9866	2.º ,, =	— 0. 5
	3.10036		9.6748—	γ =	0° 20′ 59.″5
				δ =	—3 31 0. 6
				δ' =	—3° 52′ 00.″1

La misma sustitucion del arco en segundos por el seno puede hacerse en el valor de m al calcular la fórmula (13).

Es necesario tener el mayor cuidado con el juego de los signos, y dar á cada línea trigonométrica el que le corresponda, segun el valor que tenga el arco. En las aplicaciones anteriores, por ejemplo, se ha visto que los valores negativos de h y δ produjeron algun cambio de signos en diversas partes de las fórmulas, y en último resultado unas coordenadas aparentes numéricamente mayores que las geocéntricas. Por esto al calcular las fórmulas importa no omitir los signos que van despues de los logaritmos para indicar los de las cantidades á que pertenecen.

149.—Cuando se han calculado los efectos de la paralaje en la ascension recta y en la declinacion de la luna, es tambien muy fácil determinar el aumento de su semidiámetro, que puede obtenerse en funcion de las coordenadas aparentes y verdaderas. Eliminando, en efecto, la relacion $\frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z}$ en las ecuaciones (7) y (14), se halla por valor del semidiámetro aparente:

$$s' = s\,\frac{\text{sen. } h' \cos.\,\delta'}{\text{sen. } h \cos.\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

y si se prefiere calcular el aumento $s' - s$, supondrémos:

$$\frac{\text{sen. } h'}{\text{sen. } h} = 1 + x \qquad \frac{\cos.\,\delta'}{\cos.\,\delta} = 1 + y$$

valores que sustituidos en el de s' dan por resultado:

$$s' - s = s\,x + s\,y + s\,x\,y$$

En el número anterior hallamos el valor de x y por el mismo método puede determinarse el de y; pero atendiendo á la pequeñez de los efectos β y γ de la paralaje, tomarémos los arcos en segundos por sus senos, á saber:

$$\left.\begin{aligned} x &= \beta \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(h+h')}{\text{sen. } h} \text{sen. } 1'' \\ y &= \gamma \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\cos.\ \delta} \text{sen. } 1'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

y como el término $s\,x\,y$ seria muy pequeño por contener el factor sen.^{2} 1", bastará generalmente calcular solo los dos primeros, que dan:

$$s' - s = s\,x + s\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

En el ejemplo precedente el semidiámetro tabular era $s = 14'\,57.''7$, y así para calcular el aparente, tendrémos:

$\beta = -1731''$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(h+h') = -\ 33^\circ\ 36'\ 30''$

$\gamma = +1259$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\delta+\delta') = -\ 3\ 41\ 30$

β	3.2383—	γ	3.1000		
cos. $\frac{1}{2}(h+h')$...	9.9206	sen. $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$...	8.8088—		
sen. $1''$	4.6856	.....	4.6856	$s\,x$ ..... +	11.''4
sen. h	—9.7404—	cos. δ	—9.9992	$s\,y$ ..... —	0. 4
x	8.1041	y	6.5952—	$s' - s =$	11. 0
s	2.9533	.....	2.9533	$s =$	14 57. 7
$s\,x$	1.0574	$s\,y$	9.5485—	$s' =$	15' 8.''7

150.—Antes de terminar este Capítulo es preciso hacer una indicacion de mucha importancia. Al calcular los efectos de la paralaje en la ascension recta y en la declinacion, he partido del supuesto de que el centro de la tierra se considere tambien como el de la esfera celeste en el hecho de haber tomado como datos las coordenadas

geocéntricas de la luna, y de haber definido la paralaje por el ángulo bajo el cual se veria el radio de la tierra desde el astro. Con tal hipótesis es indispensable hacer uso de la latitud geocéntrica, de manera que en la figura 41ª el punto Z representará el zenit geocéntrico del observador, punto en que su radio encuentra á la esfera celeste. En la Parte Primera de este libro se ha expuesto el modo de calcular la latitud geocéntrica conociendo la geográfica, y la Tabla de la pág. 35 suministra la reduccion con la mayor facilidad, de modo que el cálculo de los efectos de la paralaje no presenta inconveniente alguno. Pero tambien se pueden determinar las coordenadas aparentes haciendo uso de la latitud geográfica, con tal que se suponga el centro de la esfera celeste en algun punto de la línea vertical del observador, y que se reduzcan las coordenadas geocéntricas de la luna á lo que serian vistas desde ese punto. De todos los puntos de la vertical, el extremo de la normal mayor es el que ofrece la ventaja de no demandar mas que la reduccion de la declinacion geocéntrica, pues hallándose á la vez en el eje de la tierra y en el meridiano del observador, el ángulo horario de la luna, y en consecuencia su ascension recta, es exactamente la geocéntrica.

Siguiendo este nuevo método deberémos comenzar por tomar la paralaje en el sentido del ángulo bajo el cual se veria desde la luna la normal del observador. Si designamos como ántes por π_0 la paralaje horizontal ecuatorial, por n la altura de la estacion sobre el nivel del mar y por N la normal mayor, tendrémos las ecuaciones:

$$\text{sen. } \pi_0 = \frac{a}{\Delta} \qquad \text{sen. } \pi = \frac{N+n}{\Delta}$$

de las que resulta la relacion siguiente de los arcos, que es sensiblemente igual á la de los senos:

$$\frac{\pi}{\pi_0} = \frac{N+n}{a} = \frac{1}{(1-e^2 \text{ sen.}^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{n}{a}$$

Elevando el binomio del denominador al numerador hasta la segunda potencia de e, se obtendrá por último:

$$\pi = \pi_0 + \tfrac{1}{2} \pi_0 e^2 \text{ sen.}^2 \phi + \pi_0 \frac{n}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Esta fórmula no difiere de la (2) mas que en el signo del segundo término; y como los valores de este constan en la primera Tabla de la pág. 264, se ve que para hallar la paralaje horizontal referida á la normal mayor, serán aditivas las dos correcciones por latitud y altura.

Calculemos ahora la reduccion de la declinacion geocéntrica de la luna. Sea C (fig. 42ª) el centro de la tierra, $O\,H$ la normal del observador que ocupa el punto O en la superficie del globo, y $E\,C\,E'$ el plano del ecuador. Siendo M la proyeccion de la luna L sobre este plano, tendrémos que $L\,C\,M$ es la declinacion geocéntrica, que designaré por d, y su distancia polar será $L\,C\,P = 90° - d$. Llamando δ la declinacion tal como se veria desde H, resulta que $L\,H\,P = 90° - \delta$, seria la distancia polar vista desde ese punto comun al eje y á la normal. El triángulo $L\,C\,H$ da la ecuacion:

$$\Delta \text{ sen. } L = C\,H \cos.\ \delta$$

y como el ángulo L es igual á $L\,C\,P - L\,H\,P = \delta - d$, y la distancia del centro al extremo de la normal tiene por valor (pág. 14): $C\,H = \frac{a\,e^2 \text{ sen. } \phi}{r}$, se obtendrá sustituyendo:

$$\text{sen. } (\delta - d) = \frac{a\,e^2 \text{ sen. } \phi \cos.\ \delta}{\Delta\, r} = \frac{N}{\Delta}\, e^2 \text{ sen. } \phi \cos.\ \delta$$

La forma de esta ecuacion indica desde luego la extremada pequeñez de la diferencia $\delta - d$, de manera que nos será permitido introducir en ella algunas simplificaciones sin que se altere su exactitud. En primer lugar puede tomarse sen. π_0 por $\frac{N}{\Delta}$, en atencion á que a y N difieren muy poco respecto de Δ; y en segundo no habrá inconveniente en emplear cos. d en vez de cos. δ. Con estas modificaciones, y tomando los pequeños arcos por sus senos, se tendrá:

$$\delta - d = \pi_0\, e^2 \cos.\ d \text{ sen. } \phi$$

que expresa la reduccion de la declinacion geocéntrica al extremo de la normal. Para facilitar las aplicaciones he calculado la Tabla que va á continuacion de los logaritmos de $A = \pi_0\, e^2 \cos.\ d$, y que tiene por argumento la paralaje ecuatorial y la declinacion geocén-

trica de la luna. Con ayuda de ese factor, la declinacion tal como se veria desde el extremo de la normal, es:

$$\delta = d + A \text{ sen. } \phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

y hacienndo uso de este valor pueden aplicarse las fórmulas de las paralajes de ascension recta y de declinacion, empleando tambien la latitud geográfica.

Logaritmos del factor A *para calcular la reduccion de la declinacion geocéntrica de la luna al extremo de la normal.*—Argumentos: π_0 *y* d.

Declinacion geocéntrica.	53′	55′	57′	59′	61′
d = 0°	1.327	1.343	1.358	1.373	1.388
2	.326	.343	.358	.373	.388
4	.326	.342	.357	.372	.387
6	.324	.340	.356	.371	.385
8	.322	.339	.354	.369	.384
10	.320	.336	.352	.367	.381
12	.317	.333	.349	.364	.378
14	.314	.330	.345	.360	.375
16	.310	.326	.341	.356	.371
18	.305	.321	.337	.352	.366
20	.300	.316	.331	.346	.361
22	.294	.310	.326	.341	.355
24	.287	.304	.319	.334	.349
26	.280	.297	.312	.327	.342
28	.273	.289	.304	.319	.334
30	1.264	1.280	1.296	1.311	1.325

En las aplicaciones de las fórmulas de las paralajes que se han hecho en los números precedentes se emplearon las coordenadas geocéntricas de la luna y la latitud tambien geocéntrica 19° 19′ 00″ de México. Reduzcamos ahora la paralaje y la declinacion al extremo de la normal, á fin de aplicar las mismas fórmulas con la latitud geográfica 19° 26′ 12.″3. La paralaje ecuatorial que dan las Efemérides es 54′ 48.″0, que fué la misma que se empleó en aquellos ejemplos, porque las correcciones por latitud y altura fueron numéricamente iguales y de distintos signos; pero en el caso actual tendrémos:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 54' \ 48.''0 \\ \text{Correc. por } \phi &= + \ \ 1. \ 2 \\ \text{Correc. por } n &= + \ \ 1. \ 2 \\ \hline \pi &= 54' \ 50.''4 \end{aligned}$$

Tomando ahora el log. A con el valor de la paralaje ecuatorial y $d = -3° 31'$, se halla:

$$\begin{array}{lll} A \ldots\ldots\ldots & 1.341 & \\ \text{sen. } \phi \ldots\ldots\ldots & 9.519 & \\ \hline \delta - d \ldots\ldots\ldots & 0.860 \ldots\ldots\ldots & \begin{array}{rr} d = & -3° 31' 00.''6 \\ \delta - d = & +7.\ \ 2 \\ \hline \delta = & -3° 30' 53.''4 \end{array} \end{array}$$

Si con los nuevos datos, á saber: $\pi = 54' 50.''4$, $\phi = 19° 26' 12.''3$ y $\delta = -3° 30' 53.''4$ se aplican ahora las fórmulas (12) y (16), se hallará $\beta = -28' 51.''5$, que es el mismo valor que se obtuvo por el otro método, y $\gamma = +21' 6.''7$. En consecuencia la declinacion aparente, será:

$$\begin{array}{rl} \delta = - & 3° 30' 53.''4 \\ \gamma = + & 0\ \ 21\ \ \ 6.\ \ 7 \\ \hline \delta' = - & 3° 52' 00.''1 \end{array}$$

valor tambien igual al del núm. 148.

151.—Hay muchos casos en que es indiferente calcular los efectos de la paralaje por uno ú otro procedimiento; pero cuando se trata de comparar, por ejemplo, la distancia zenital calculada, con el valor que se haya obtenido por medio de la observacion directa, me parece preferible hacer uso de la paralaje horizontal reducida por la fórmula (21) al extremo de la normal del observador, puesto que la medida de aquella distancia angular se refiere al zenit verdadero y no al geocéntrico. Lo mismo puede decirse cuando se desea calcular la distancia zenital geocéntrica de la luna empleando las ecuaciones (9) ó (10), pues en la determinacion de la paralaje de altura p no hay inconveniente en emplear la horizontal reducida por el nuevo método.

Ya que se pudo una form.ª para obtener la paralaje de altura en funcion de la dist. zenital aparente, teniendo en cuenta la altura sobre el nivel del mar, hace falta otra para obtener la misma paralaje en funcion de la zenital verdadera teniendo en cuenta la dicha altura n sobre el nivel del mar.

CAPITULO V.

DISPOSICION Y USO DE LAS EFEMÉRIDES.

152.—Las tablas astronómicas de los Almanaques náuticos, de "*La Connaissance des temps*", del "*Jahrbuch*" de Berlin y de otras publicaciones de este género, suministran las coordenadas y otros elementos relativos al sol, á la luna, á los planetas y á las principales estrellas fijas, así como otros varios datos astronómicos con cuyo auxilio se facilitan las aplicaciones de la ciencia. Por lo regular esos libros se publican con anticipacion de tres ó cuatro años respecto de aquel para el cual están calculados, de manera que el astrónomo puede hacer de antemano las predicciones de todos los fenómenos que tenga interes en observar.

Los elementos de las Efemérides se refieren á determinado meridiano. Los de los Almanaques inglés y americano están referidos al de Greenwich como primer meridiano, si bien el último suministra tambien la mayor parte de los datos con relacion al de Washington. "La Connaissance des temps" se refiere al meridiano de Paris, el "Jahrbuch" al de Berlin, &c. Todos los elementos están calculados para ciertos intervalos de tiempo del meridiano principal, tanto mas cortos, en general, cuanto mas rápida es la variacion de los mismos elementos.

La disposicion y el órden que tienen las tablas de las obras mencionadas son muy semejantes, de suerte que haciendo una breve descripcion de las del Almanaque americano, por ejemplo, será muy fácil comprender las de cualquiera otra publicacion de la misma es-

pecie. Esta obra presenta ademas ciertas ventajas dependientes de sus numerosos datos, que me inclinan á recomendarla de preferencia.

Ocupan las primeras páginas del Almanaque las tablas del sol y de la luna, las cuales están arregladas por meses. En la primera página de cada mes, al lado del dia y de la fecha, constan por su órden la ascension recta, la declinacion y el semidiámetro del sol, así como el tiempo sideral que invierte el semidiámetro en pasar por el meridiano, y la ecuacion del tiempo. Todos estos elementos están calculados para el instante del medio dia verdadero de Greenwich, acompañados los dos primeros y el último de sus variaciones horarias, con el objeto de facilitar las interpolaciones para cualquiera otro instante.

En la segunda página correspondiente á cada mes constan igualmente la ascension recta del centro del sol, su declinacion y la ecuacion del tiempo, con sus variaciones horarias, calculadas para el momento del medio dia medio de Greenwich, y ademas para la misma hora la ascension recta del sol medio, que ocupa la última columna de la página, con el título de "Tiempo sideral".

La tercera página de cada mes contiene el dia del año contado sin interrupcion desde 1 hasta 365; y en seguida la longitud y la latitud del sol, (*) así como el logaritmo de su distancia á la tierra, y la hora media que se cuenta al comenzar el dia sideral.

La página cuarta del mes contiene el semidiámetro geocéntrico y la paralaje horizontal ecuatorial de la luna con sus diferencias ó variaciones horarias; y tambien la hora media del tránsito de su centro por el meridiano, así como la edad de la luna. Estos datos están calculados para el medio dia medio de Greenwich, y los dos primeros tambien para la media noche, de manera que se tienen con intervalos de 12^h de tiempo medio.

Las ocho páginas siguientes traen la ascension recta y la declinacion del centro de la luna calculadas de hora en hora de tiempo medio de Greenwich para todos los dias del mes; y presentan ademas sus diferencias por un minuto. Estas tablas terminan con las horas de las fases de la luna, y con las de su apogeo y su perigeo.

(*) La longitud y la latitud astronómicas constituyen otro sistema de coordenadas, poco usado en las aplicaciones mas usuales de la Astronomía. La latitud es la distancia angular de un astro á la eclíptica, contada en un arco perpendicular á su plano; y la longitud es el arco de la eclíptica contado desde el punto equinoccial hasta el pié del que mide la latitud.

Las páginas restantes del mes están destinadas á las "Distancias lunares," las cuales expresan las distancias angulares del centro de la luna á los de varios planetas y estrellas principales, tales como las veria un observador colocado en el centro de la tierra. Estos datos, que sirven para la determinacion de las longitudes geográficas, están calculados de tres en tres horas de tiempo medio de Greenwich.

A continuacion de las tablas del sol y de la luna vienen las Efemérides de los principales planetas, en las que constan sus posiciones (ascension recta y declinacion), las horas de sus culminaciones, sus paralajes horizontales y sus semidiámetros, todo referido al tiempo medio de Greenwich.

El resto del Almanaque está referido á Washington como primer meridiano, y comienza con una tabla en que constan la paralaje del sol, la oblicuidad de la eclíptica y otros diversos elementos relativos al mismo astro calculados para cada diez dias del año. Vienen en seguida varios datos referentes á las estrellas fijas, y las ascensiones rectas y declinaciones de unas 200 estrellas principales, calculadas para cada diez dias en los momentos de sus respectivos tránsitos por el meridiano de Washington. Estas posiciones son las *aparentes*, quiere decir, ya afectadas por la precesion de los equinoccios, por la nutacion del eje de la tierra y por la aberracion de la luz, que son las tres causas que alteran ligeramente las ascensiones rectas y declinaciones *medias*. Tambien en las posiciones aparentes se ha tomado ya en cuenta el pequeño movimiento propio de las estrellas, de suerte que el calculador solo tiene que interpolarlas para el dia en que las necesite, sin ocuparse de otra clase de correcciones. Las interpolaciones pueden hacerse casi á la simple vista, atendida la pequeñez de las variaciones, las cuales constan en las mismas tablas al lado de las coordenadas respectivas.

Despues de las estrellas trae el Almanaque americano las Efemérides del sol para los medios dias medio y verdadero del meridiano de Washington, las cuales son semejantes á las que se refieren al de Greenwich y que ántes se han explicado. En seguida las de la luna, y por último, las de los planetas principales, referidas tambien al meridiano de Washington. Vienen despues los elementos necesarios para la prediccion de los eclipses del sol y de la luna que deben verificarse en el año; y tambien los referentes á las oculta-

ciones de estrellas por la luna que son visibles en algun lugar del globo. El Almanaque termina con las tablas del planeta Júpiter y sus satélites, en las que constan los eclipses de estos y sus tránsitos sobre el disco del planeta. Lo restante del libro está destinado á la explicacion de sus diversas partes, y presenta tambien algunas tablas auxiliares de mas ó ménos importancia.

153.—Los datos, segun se ha visto, están calculados á intervalos de tiempo mas ó ménos cortos, en razon de la rapidez é irregularidad de sus variaciones; así, por ejemplo, todos los elementos del sol solo constan para cada 24^h del meridiano principal; miéntras que las coordenadas de la luna están dadas de hora en hora. Cuando las variaciones son sensiblemente uniformes, la interpolacion se ejecuta con la mayor facilidad, pues toda la operacion se reduce á aplicar al elemento de que se trate, una correccion proporcional al tiempo trascurrido desde la hora para la cual conste en la tabla. Supongamos, por ejemplo, que se desee calcular la declinacion del sol á la hora media H' de Greenwich el dia 30 de Noviembre de 1870. Se ve en el Almanaque que ese dia la declinacion á 0^h, ó á medio dia medio, es $-21°\ 40'\ 42.''0$ y su variacion horaria en el mismo instante, $v = -24.''27$; luego expresando á H' en horas y fracciones, se tendrá:

$$\delta = -21°\ 40'\ 42.''0 - H'v$$

En general, si es l' un elemento cualquiera á medio dia, v su variacion ó movimiento horario, y H' un número de horas contado desde aquel instante, su valor á la hora H', es: $l = l' + H'v$.

154.—El anterior procedimiento es en muchos casos suficientemente exacto; pero cuando se desea la mayor precision posible es preciso atender á los cambios que de un momento á otro sufre el valor de v, pues muchas veces no puede suponerse constante sin error. En efecto, el sentido en que deben tomarse los valores de v que constan en las tablas, es el de la velocidad ó variacion que en esos instantes tendria el elemento l si continuase variando de una manera uniforme; pero como generalmente esta hipótesis deja de ser cierta en un espacio considerable de tiempo, conviene tomar en cuenta la variacion de velocidad de este modo. Si designamos por h el intervalo constante de tiempo que hay entre dos valores consecutivos v_1 y v_2 de la variacion, y que es de 24^h respecto del sol, ten-

tendrémos que $v_2 - v_1$ representa su irregularidad en h horas, y $\frac{v_2 - v_1}{h}$ en la unidad de tiempo. Siendo H' la hora para la cual se desea calcular el elemento l, calcularémos el valor de la variacion en el instante medio $\frac{1}{2} H'$, y entónces será permitido suponer que es constante durante el tiempo H'. Adoptarémos segun esto:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_1 + \frac{(v_2 - v_1)\, H'}{2\, h} \\ \text{y por consiguiente: } l &= l' + H'\, v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por ejemplo, refiriéndonos al caso anterior del 30 de Noviembre de 1870, supongamos que se desea calcular la declinacion para las 14^h de Greenwich. Tendriamos:

El dia 30 de Nov..... $v_1 = -24.''27$
El dia 1º de Dic..... $v_2 = -23.\ 23$

$$v_2 - v_1 = +\ 1.''04$$

$$v = -24.''27 + \frac{7 \times 1.''04}{24} = -23.''97$$

Este valor de v, que representa la variacion media en las 14^h, da para la declinacion:

$$\delta = -21^\circ\ 40'\ 42.''0 - 23.''97 \times 14 = -21^\circ\ 46'\ 17.''6$$

Si hubiéramos adoptado como constante el valor v del dia 30, habria resultado un error de $4''$ próximamente.

155.—Este método de interpolacion, tan sencillo como exacto, es aplicable á cualquiera elemento que vaya acompañado de su variacion en la unidad de tiempo; y lo único de que debe cuidarse es de expresar H' en la misma especie de unidades á que se refiera v, y elegir su valor de manera que represente una fraccion del intervalo constante h. Por ejemplo, si se desea la posicion de la luna para las $8^h\ 24^m\ 36^s$ de Greenwich, tenemos que como están dadas de hora en hora las Efemérides de ese astro, deberémos partir de su posicion á las 8^h é interpolar por los $24^m\ 36^s$, que expresados en minutos son $24^m.6$. Este será el valor de H' que multiplicado por la variacion v por minuto, calculada para el instante medio $12^m.3$,

dará la correccion que debe sufrir el elemento que conste en las tablas para 8^h.

156.—He supuesto hasta ahora que el instante para el cual se desea obtener un elemento expresa tiempo de Greenwich, ó sea del meridiano de las Efemérides; pero el caso mas general es el de calcularlo para la hora H de otro meridiano cualquiera. Este caso, sin embargo, se reduce al anterior por medio de la diferencia de longitud. Siendo en efecto L la longitud geográfica del lugar respecto del meridiano de las Efemérides, expresada en tiempo, la hora que se cuenta en este en el mismo instante físico es: $H' = H + L$. Así, pues, por la simple adicion de la longitud tomada con su signo, se halla la hora contemporánea del meridiano principal, y en consecuencia puede aplicarse el método que se ha explicado.

157.—Hay otro procedimiento para hacer las interpolaciones que es mas general que el anterior por no necesitar las variaciones en la unidad de tiempo. Llamemos y el valor de un elemento cualquiera y x la cantidad de que depende, y que en las tablas astronómicas es el tiempo. El elemento y será por consiguiente una funcion de x, de la forma general:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Supongamos ahora que se haya formado una tabla de valores de y, calculada para valores equidiferentes de x, tales como $x = -h$, $x = 0$, $x = +h$, $x = +2h$, &c., y propongámonos determinar con su ayuda los coeficientes indeterminados b, c, d, &c. Atribuyendo á x los valores expresados, los correspondientes de y serán:

$$y_{-1} = a - bh + ch^2 - dh^3$$
$$y_0 = a$$
$$y_{+1} = a + bh + ch^2 + dh^3$$
$$y_{+2} = a + 2bh + 4ch^2 + 8dh^3$$

Si cada uno de ellos se resta del que le sigue, se tendrá una serie de residuos, que llamarémos *diferencias primeras*, y que resultarán independientes de a, que es el valor de y cuando $x = 0$. Restando de igual manera cada diferencia primera de la que le sigue, se obtiene la serie de *diferencias segundas*, en las cuales se ha eliminado

el término $b\,h$. La misma operacion dará las *diferencias terceras*, y así sucesivamente, de modo que las series son:

Diferencias primeras.	*Diferencias segundas.*	*Dif. terceras.*
$b\,h - c\,h^2 + d\,h^3$		
$b\,h + c\,h^2 + d\,h^3$	$2\,c\,h^2$	
$b\,h + 3\,c\,h^2 + 7\,d\,h^3$	$2\,c\,h^2 + 6\,d\,h^3$	$6\,d\,h^3$

Para determinar los coeficientes b, c, d, &c., en funcion de estas diferencias supongamos que el valor de x que entra en la forma general, esté comprendido entre $x = 0$ y $x = + h$. Entónces adoptarémos la diferencia primera que proviene de la sustraccion $y_{+1} - y_0$, y que es la segunda ó central en la serie anterior. Habiendo igual razon para tomar cualquiera de las dos diferencias segundas, haremos uso de su promedio; y designando por Δ_1, Δ_2 y Δ_3 respectivamente las diferencias primera, segunda y tercera adoptadas, tendrémos las siguientes ecuaciones para la determinacion de los coeficientes:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= b\,h + c\,h^2 + d\,h^3 \\ \Delta_2 &= 2\,c\,h^2 + 3\,d\,h^3 \\ \Delta_3 &= 6\,d\,h^3 \end{aligned}$$

La última da el valor de d, que sustituido en la segunda suministra el de c; y sustituyendo los dos en la primera, resulta el de b. Esos valores son:

$$b = \frac{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{12}\Delta_3}{h}$$

$$c = \frac{\frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{4}\Delta_3}{h^2}$$

$$d = \frac{\frac{1}{6}\Delta_3}{h^3}$$

Introduciendo ahora estos coeficientes en la expresion general de y, y haciendo para abreviar:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x}{h} \\ A &= \Delta_1 - \tfrac{1}{2}\Delta_2 + \tfrac{1}{12}\Delta_3 \\ B &= \tfrac{1}{2}\Delta_2 - \tfrac{1}{4}\Delta_3 \\ C &= \tfrac{1}{6}\Delta_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

el valor del elemento será:

$$y = a + A\,t + B\,t^2 + C\,t^3$$

Al aplicar estas fórmulas es preciso seguir el mismo procedimiento que al desarrollarlas, esto es: tomar cuatro de los elementos de las Efemérides, elegidos de tal manera que el que se busca esté comprendido entre el segundo y el tercero. Calculemos el siguiente ejemplo: supongamos que se quiere saber cuál fué la ascension recta del limbo visible ó iluminado de la luna el 19 de Noviembre de 1858, al pasar este astro por el meridiano de un lugar cuya longitud es $L = 6^h\ 36^m\ 42^s$ al Oeste de Greenwich.

El Almanaque náutico inglés trae las ascensiones rectas del borde visible de la luna en los instantes de sus tránsitos superior é inferior por el meridiano de Greenwich, quiere decir, para intervalos de 12^h de longitud. Como el tránsito de que se trata debió verificarse entre el superior y el inferior de Greenwich el 19 de Noviembre, tomarémos los datos siguientes:

			Dif. prim.	Dif. seg.	Dif. terc.
Nov. 18.—Paso inf.....		$1^h\ 59^m\ 39^s.38$	$29^m\ 13^s.17+$		
„ 19.—Paso sup.....	$a =$	$2\ 28\ 52.55$	$30\ 38.05+$	$1^m\ 24^s.88+$	
„ 19.—Paso inf.....		$2\ 59\ 30.60$	$32\ 3.32+$	$1\ 25.27+$	$0^s.39+$
„ 20.—Paso sup.....		$3\ 31\ 33.92$			

En este caso t será igual á $\frac{L}{h} = \frac{6^h\ 36^m.7}{12^h} = \frac{6^h.612}{12^h} = 0.551$, y de acuerdo con las fórmulas tendrémos:

$$\Delta_1 = 1838^s.05 \qquad \Delta_2 = 85.07 \qquad \Delta_3 = 0^s.39$$

por lo cual los coeficientes serán:

$$A = 1795^s.54 \qquad B = 42^s.44 \qquad C = 0^s.06$$

A.....	3.2541951	B.....	1.62778	C.....	8.7781
t.....	9.7411516	t^2.....	9.48230	t^3.....	9.2235
	2.9953467		1.11008		8.0016

$$\begin{aligned} A\,t &= 989^s.34 \\ B\,t^2 &= 12.88 \\ C\,t^3 &= 0.01 \\ \hline y - a &= 1002^s.23 = 16^m\ 42^s.23 \\ a &= 2\ 28\ 52.55 \\ \hline y &= 2^h\ 45^m\ 34^s.78 \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior todas las diferencias resultan positivas;

pero muchas veces no es así, y es preciso el mayor cuidado con los signos, no olvidando que invariablemente debe restarse cada cantidad de la que le sigue, dando á las restas ó diferencias sucesivas el signo que les corresponda segun las reglas del álgebra.

158.—Cuando no son considerables los intervalos h ó cuando no son muy irregulares las variaciones de los elementos, las diferencias segundas resultan sensiblemente iguales, y entónces pueden suponerse nulas las terceras. Con esta modificacion las fórmulas serán:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x}{h} \\ A &= \Delta_1 - \tfrac{1}{2}\Delta_2 \\ B &= \tfrac{1}{2}\Delta_2 \\ y &= a + At + Bt^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

en las que Δ_2 representa siempre el promedio de las dos diferencias segundas.

Calculemos de esta manera el ejemplo del núm. 154, tomando las declinaciones del sol para los dias 29 y 30 de Noviembre y 1 y 2 de Diciembre de 1870.

Nov. 29.....	—21° 30′ 47.″1	—9′ 54.″9			
„ 30.. a =	—21 40 42. 0	—9 30. 0	+24.″9	$t = \frac{14^h}{24^h} = 0.58333$	
Dic. 1.....	—21 50 12. 0	—9 4. 8	+25. 2		
„ 2.....	—21 59 16. 8				

$$A = -570.''0 - 12.''5 = -582.''5 \qquad B = +12.''5$$

A	2.76530—	B	1.0969	$At =$	— 5′ 39.″8
t	9.76591	t^2	9.5318	$Bt^2 =$	+ 4. 2
	2.53121—		0.6287	$y - a =$	— 5′ 35.″6
				$a =$	—21 40 42. 0
				$y =$	—21° 46′ 17.″6

Este método de interpolacion se usa mucho, especialmente para calcular la posicion de la luna por medio de las Efemérides horarias de este astro. Presentaré los ejemplos siguientes para ejercicio del lector. Dada la posicion de la luna á las horas de Greenwich que van á continuacion, ¿cuál será la que tenga á $4^h\ 5^m\ 31.^s4$, tiempo medio de México, siendo $L = 6^h\ 36^m\ 28.^s6$ la longitud de esta ciudad?

	ASCENSION RECTA.	DECLINACION.
A 9 h.....	23 h 16 m 37 s 76	..... —9° 22′ 28.″2
„ 10	23 18 36. 34	..... —9 11 31. 8
„ 11	23 20 34. 71	..... —9 00 33. 4
„ 12	23 22 32. 89	..... —8 49 33. 1

Resolucion.—Se tendrá: $t = 0.7$, y

$$\alpha = 23^h\ 19^m\ 59^s.22 \qquad \delta = -\ 9°\ 3'\ 51.''1.$$

159.—La última de las ecuaciones (3) puede aplicarse á la determinacion de la hora á la cual un astro tiene una posicion dada (vease la pág. 241). En tal caso y representa ese elemento conocido; las Efemérides suministran los coeficientes A y B en funcion de las diferencias primeras y segundas; y solo queda por incógnita la cantidad $t = \frac{x}{h}$. Siendo necesariamente t una fraccion del intervalo constante h, puede resolverse la ecuacion por aproximaciones sucesivas. Se tiene desde luego:

$$t = \frac{y - a}{A} - \frac{B}{A} t^2$$

é introduciendo en el segundo término el valor aproximativo $t = \frac{y-a}{A}$, resulta:

$$t = \frac{y - a}{A} - \frac{B}{A}\left(\frac{y - a}{A}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Ejemplo.—Dadas las ascensiones rectas horarias que se han empleado en la aplicacion precedente, supongamos qué se desee saber á qué hora de Greenwich tiene la luna $23^h\ 19^m\ 59^s.22$ por ascension recta.

Las diferencias son $\Delta_1 = 118^s.37$ y $\Delta_2 = -\ 0^s.20$; por consiguiente hallarémos $A = 118^s.47$, $B = -\ 0^s.10$, y tomando por a la ascension recta á 10^h, se tiene:

$y = 23^h\ 19^m\ 59^s.22$
$a = 23\ \ 18\ \ 36.\ 34$
$y - a = +\ \ 1^m\ 22^s.88 = +\ 82^s.88$..... 1.9184497 B..... 9.0000—
A..... —2.0736084..... ..... —2.0736
9.8448413.....cuad..... 9.6897
6.6161—
+0.69959
—0.00041

De aquí resulta $t = +0.69959 + 0.00041 = +0.70000$. Como en esas tablas de la luna el intervalo h es de 1^h ó de 3600^s, tendrémos $x = 0.7 \times 3600^s = 2520^s = 42^m\ 00^s$; y por tanto la hora que se busca es $H' = 10^h 42^m 00^s$ de Greenwich, ó bien $H = 4^h 5^m 31^s.4$ de México.

Por el mismo método puede hacerse la prediccion de las fases de la luna, puesto que este problema se reduce á determinar las horas en que el sol y la luna difieren en ascension recta 0^h, 6^h, 12^h ó 18^h, que corresponden respectivamente á la neomenia, al cuarto creciente, al plenilunio y al cuarto menguante. Calculemos, por ejemplo, la oposicion en ascension recta de Diciembre de 1870. La simple inspeccion de las posiciones del sol y de la luna da á conocer que el plenilunio se verificará el dia 7 de Diciembre entre las 14^h y las 15^h de Greenwich; por consiguiente calculemos las ascensiones rectas del sol y tomemos las de la luna para las horas siguientes:

	Ascensiones rectas del sol.	Ascensiones rectas de la luna.	Diferencias.
A 13^h	$16^h\ 58^m\ 15^s.39$	..... $4^h\ 56^m\ 4^s.21$	$11^h\ 57^m\ 48^s.82$
„ 14	16 58 26. 33	..... 4 58 9. 68	11 59 43. 35
„ 15	16 58 37. 27	..... 5 00 15. 35	12 1 38. 08
„ 16	16 58 48. 21	..... 5 2 21. 21	12 3 33. 00

La columna de las diferencias se ha formado restando las del sol de las ascensiones rectas de la luna despues de aumentarles 24^h, y para hallar el momento en que esa diferencia es exactamente de 12^h, harémos la interpolacion con los datos:

$$y - a = 16^s.65 \qquad A = +114^s.63 \qquad B = +0^s.10$$

Del cálculo resulta $t = 0^h.1452 = 8^m\ 43^s$, y así el plenilunio se verificará á las $14^h\ 8^m\ 43^s$ de Greenwich, ó á las $7^h\ 30^m\ 15^s$ de México próximamente.

160.—Todos estos problemas se resuelven acaso con mas facilidad por medio de los movimientos ó variaciones horarias que constan en las tablas ó que se calculan fácilmente de este modo. Diferenciando la última fórmula (3) respecto de t, se halla:

$$\frac{d\,y}{d\,t} = A + 2\,B\,t$$

ecuacion que expresa la variacion de la coordenada y respecto de la del tiempo á la hora t. Por consiguiente haciendo á $\mathrm{d}x = 1^{\mathrm{h}}$, y atendiendo á que $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{h}$, resulta para el valor del movimiento horario:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{A + 2Bt}{h} \quad \ldots\ldots (5)$$

Ejemplo.—Con los datos $A = -582.''5$ y $B = +12.''5$ del núm. 158, calculemos el movimiento horario del sol en declinacion el dia 30 de Noviembre á 7^{h} de Greenwich. Se tendrá: $t = \frac{7}{24} = 0.29$.

$$\begin{array}{r} A = -582.''5 \\ 2Bt = +\ 7.\ 2 \\ \hline -575.''3 \end{array} \qquad v = -\frac{575.''3}{24} = -23.''97$$

resultado idéntico al del núm. 154.

Para las Efemérides de la luna, se tiene $h = 1^{\mathrm{h}}$, y así sustituyendo los valores (3) de A y B, resulta:

$$v = \Delta_1 + (t - \tfrac{1}{2})\,\Delta_2 \quad \ldots\ldots (6)$$

Notemos que cuando t es igual á $\frac{1}{2}$, se obtiene $v = \Delta_1$, lo cual indica que las diferencias primeras pueden considerarse como las variaciones horarias correspondientes á la mitad del intervalo que hay entre las horas de dos coordenadas consecutivas.

Con ayuda del movimiento horario es muy fácil determinar la hora en que un astro adquiere una posicion dada. Sea, en efecto, l este elemento, y l' el que mas se aproxima á l en las Efemérides del astro. Si designamos por H' la hora correspondiente á l' y por H la que se busca, tendrémos, siendo v la variacion horaria,..... $v : 3600^{\mathrm{s}} :: l - l' : H - H'$ de donde resulta:

$$H = H' + \frac{3600^{\mathrm{s}}}{v}(l - l') \quad \ldots\ldots (7)$$

Para mayor exactitud debe calcularse el valor de v para el instante medio $\frac{1}{2}(H + H')$, determinando primero el valor aproximativo de H por el mismo método. Repitiendo el primer ejemplo del núm. 159, calculemos la hora de Greenwich en que la luna tiene

$23^h\,19^m\,59^s.22$ de ascension recta, tomando los datos que constan al fin del núm. 158. Por ellos vemos que la ascension recta que mas se aproxima á la anterior es la correspondiente á $H' = 11^h$, que es $23^h\,20^m\,34^s.71$, de modo que se tiene: $l - l' = -35^s.49$. Para determinar el valor aproximativo de H hagamos uso de la diferencia primera $118^s.37$ en vez de v, y se hallará en horas:

$$H - H' = -\frac{35.5}{118.4} = -0^h.3$$

Así, pues, tomarémos $H = 10^h.7$. En consecuencia, el instante medio vendrá á ser $10^h.85$, y calcularémos el valor de v por la fórmula (6) tomando $t = 0.85$.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 118^s.37 \\ -0.2 \times 0.35 &= -0.07 \\ v &= 118^s.30 \end{aligned}$$

y entónces la ecuacion (7) dará:

$$H = 11^h - \frac{3600^s \times 35^s.49}{118.30} = 11^h - 18^m\,00^s = 10^h\,42^m\,00^s$$

que es precisamente el resultado que se obtuvo por la fórmula (4).

CAPITULO VI.

TEORIA Y USO DEL SEXTANTE.

161.—Los arcos celestes que se miden habitualmente para la resolucion de todos los problemas de la Astronomía práctica son las distancias zenitales y los ángulos azimutales de los astros; por con-

siguiente un círculo repetidor, y mejor aún un teodolito astronómico ó altazimut, son suficientes para obtener los datos necesarios en todas las aplicaciones. Sin embargo, el sextante y todos los demas instrumentos de reflexion se emplean igualmente con el mismo objeto, y si bien los resultados que proporcionan son por lo general inferiores á los que se obtienen con un buen altazimut ó algun otro aparato de precision, presentan en cambio la ventaja inestimable de su fácil trasporte y de su sencillo manejo, siendo tambien susceptible de suministrar, en manos hábiles, resultados verdaderamente notables por su exactitud.

El principio que sirve de fundamento á la construccion de los instrumentos de reflexion es el siguiente: si un rayo luminoso $A\,E$ (fig. 43ª) sufre sucesivamente dos reflexiones $E\,e$ y $e\,C$ en dos espejos E y e, el ángulo $A\,C\,B$ formado por la primera direccion $A\,C$ con la última $B\,C$ es doble del ángulo $E\,D\,e$ que forman los planos de los dos espejos. Con el fin de demostrar esta propiedad, llamemos α el ángulo de incidencia en el primer espejo, esto es, el formado por el rayo $A\,E$ con la normal $E\,N$ al espejo en el punto E; y β el de incidencia $E\,e\,n$ en el segundo espejo. Entónces el triángulo $E\,e\,C$, en el cual $2\,\alpha$ es el ángulo externo, da la ecuacion:

$$C = 2\,\alpha - 2\,\beta$$

Por la misma razon el triángulo $E\,e\,D$, en que el ángulo externo es igual á $90° - \beta$, suministra esta otra:

$$D = \alpha - \beta$$

y por consiguiente resulta: $C = 2\,D$.

En virtud de este principio, si se coloca la vista en un punto cualquiera de $e\,C$ se verá la imágen refleja del punto A como si el rayo luminoso viniera de otro punto B situado en la prolongacion de $C\,e$; ó en otros términos, el objeto A visto por la doble reflexion estaria en coincidencia con otro objeto B visto directamente. Si, pues, de alguna manera se logra ver directamente la señal B á la vez que A por reflexion, y se consigue medir el ángulo de los espejos cuando se haya establecido la coincidencia de ambas señales, el doble de este será el que forman los objetos.

La primera de estas condiciones se ha llenado dejando sin platear ó sin estañar una parte del cristal de que está formado el espejo *e*, de modo que al traves de la mitad diáfana puedan verse los objetos situados en la direccion *B C;* y la segunda haciendo que el espejo *E* se mueva con una alidada sobre un arco graduado, como lo indica la fig. 44ª, que representa el sextante. El arco *O A*, que comunmente es de 60° á 70°, está dividido doblemente, quiere decir, de 120° á 140° con el fin de que las lecturas suministren desde luego el ángulo de los objetos, doble del de los espejos. En el centro del arco está fijo en la alidada *E L* el espejo *E*, llamado espejo mayor, y por consiguiente se mueve con ella; miéntras que el espejo menor *e*, fijo al limbo, no tiene mas que el pequeño movimiento necesario para comprobar y corregir su posicion como se dirá despues. Un telescopio cuyo eje es paralelo al plano del limbo, y al cual está unido por medio de un collar *C*, recibe las imágenes del objeto que se ve directamente al traves de la parte superior del espejo menor, que no está estañada, y del que se ve despues de la primera reflexion en el espejo mayor, y de la segunda en la mitad inferior del espejo *e*. En la parte posterior del limbo hay un mango de madera por el cual se toma el instrumento para servirse de él, pues por lo regular no se fija en un apoyo, sino que se tiene en la mano.

162.—Para que el sextante dé con precision el ángulo de dos objetos, es necesario, 1º que su limbo sea paralelo al plano en que se verifica la doble reflexion; pero como este plano es perpendicular al de los espejos, resulta que estos deben ser exactamente perpendiculares al plano del limbo; 2º que el cero *O* de la graduacion se halle en la direccion del radio *E O*, en la cual son paralelos los planos de ambos espejos, puesto que solo en ese caso formarán un ángulo nulo; 3º que la línea de colimacion del telescopio sea tambien paralela al plano de la reflexion, ó sea al del limbo; 4º que la alidada gire precisamente en el centro del arco graduado. Veamos cómo se comprueban estas condiciones principales.

La primera se examina moviendo la alidada hasta colocarla próximamente en medio del arco, como la representa la figura. Entónces, si se sitúa la vista en *E*, lo mas cerca que se pueda del plano del limbo, se verá directamente la parte del arco graduado que queda hácia el extremo *A*, y la misma por reflexion en el espejo. Si la imágen refleja se ve exactamente en la prolongacion de la directa

de manera que ambas presenten el aspecto de un solo plano, existe la perpendicularidad entre el espejo mayor y el limbo; pero de lo contrario, será preciso mover el primero por medio de los tornillos que fijan su armadura metálica á la placa de la alidada, hasta conseguir la coincidencia de los dos arcos directo y reflejo. Como por lo general los fabricantes hacen esta rectificacion bastante bien, suele suceder que el espejo esté desprovisto del pequeño movimiento necesario para corregir su posicion; en tal caso, si se le nota algun ligero error, lo que debe hacerse es introducir entre su armadura y la alidada una hoja de papel mas ó ménos grueso, segun la magnitud del error, colocándola del lado anterior ó del posterior del espejo, segun el sentido en que convenga moverlo, y volviendo en seguida á apretar los tornillos. Se estima que la vista puede apreciar muy bien una inclinacion de 3′ á 4′ del plano ó arco reflejo respecto del directo; y como un error que no exceda de esta cantidad no tiene influencia sensible en la medida de los ángulos, se deduce que el método de comprobacion indicado suministra siempre la precision necesaria si se practica con esmero.

163.—Una vez corregido el espejo mayor, si hacemos de manera que el menor le sea paralelo en una posicion cualquiera, habrémos conseguido colocar tambien su plano perpendicular al del limbo. Con este fin se dirige el telescopio á un objeto muy distante, ó mejor á una estrella pequeña; y luego que se tiene en el campo su imágen directa, se lleva la alidada hácia el cero *O* de la graduacion. Entónces se presentará en el campo del anteojo otra imágen del mismo objeto, que es la que proviene de la doble reflexion; y si en el movimiento de la alidada las dos imágenes llegan á sobreponerse exactamente, se tiene la prueba de que existe el paralelismo de los dos espejos; mas si por el contrario, la imágen refleja se ve pasar á un lado de la directa sin que pueda conseguirse su superposicion, se moverá el espejo menor por medio de un tornillo colocado en su parte posterior, y á veces debajo del limbo; y se repetirán las pruebas hasta lograr la exacta coincidencia de ambas imágenes.

Al hacer esta y otras comprobaciones análogas, es preciso tener cuidado de que las dos imágenes se vean con la misma intensidad. Esto se consigue subiendo ó bajando el anteojo, esto es, alejándolo ó acercándolo al plano del limbo por medio de un tornillo que hace variar la distancia del collar del telescopio al limbo sin alterar el

paralelismo del eje de colimacion y de este plano. En virtud de este movimiento, resulta en efecto que el objetivo del anteojo recibirá mayor cantidad de rayos reflejos si es pequeña su distancia al limbo; porque la parte diáfana del espejo menor, por la cual recibe los rayos directos, comienza á cierta altura respecto del limbo. Por el contrario, si se aleja el telescopio de este plano, será mayor la cantidad de rayos que reciba de la imágen directa, la cual por consiguiente, se verá mas brillante que la refleja. Dando, pues, al collar del anteojo, la posicion conveniente, lo que es muy fácil despues de dos ó tres ensayos, se presentarán las dos imágenes sensiblemente con la misma intensidad.

164.—Luego que se tiene seguridad de que ambos espejos son perpendiculares al limbo, se examina si el vernier de la alidada señala exactamente el cero de la graduacion cuando se hacen coincidir las dos imágenes de un mismo objeto, por ser esta la posicion en que son paralelos los planos de los espejos. Generalmente sucederá que al sobreponer las dos imágenes de una estrella por ejemplo, moviendo al efecto el tornillo de aproximacion de la alidada hasta lograr su exacta coincidencia, el vernier en vez de indicar precisamente 0°, señalará cierta lectura e_0; mas como la posicion que entónces ocupa la alidada corresponde al paralelismo de los espejos, se infiere que el cero ú orígen de la graduacion deberia hallarse en el punto e_0, y esta lectura representará por consiguiente el *error inicial* ó bien *el error del cero*, como se le llama comunmente. En algunos sextantes puede hacerse desaparecer ese error, porque están provistos del mecanismo necesario para comunicar pequeños movimientos al espejo menor al derredor de una línea perpendicular al limbo; y entónces lo que debe hacerse es poner en coincidencia el cero de la alidada con el de la graduacion, y observando la estrella, mover el espejo menor hasta que se confundan las dos imágenes. Otros sextantes no tienen ese mecanismo, que en realidad no es necesario; porque una vez hallado el valor de e_0, se aplica como correccion á todos los ángulos que se midan. Por otra parte, aun cuando se destruya de pronto el error, no permanece nulo por mucho tiempo; y no es raro que en el curso de una sola serie de observaciones varie sensiblemente de valor, lo cual se nota cuando se determina al comenzar y al terminar la serie, que es lo mas conveniente en todos casos.

Siendo, pues, e_0 el error inicial, y G la indicacion del sextante cuando se mide con él un ángulo cualquiera, el arco verdadero será $G - e_0$. Debe advertirse que la graduacion del limbo se prolonga un poco hácia la parte opuesta á la numeracion creciente; porque puede suceder que el paralelismo de los espejos corresponda á algun punto de ese arco adicional, en cuyo caso el valor de e_0 se considerará como negativo, y el ángulo correcto será $G + e_0$. (*) Tambien conviene advertir que cuando tal cosa suceda, debe tenerse cuidado de hacer la lectura con el vernier en sentido opuesto, quiere decir, tomando su última division por primera, la penúltima por segunda, &c. Así, por ejemplo, si el instrumento da una aproximacion de 10″, el vernier estará generalmente numerado de 0 á 10; y entónces, en la cifra 10 se supondrá 0, en la 8 se supondrá 2, &c.

Con el fin de obtener el valor de e_0 sensiblemente independiente de los pequeños errores de observacion, deben hacerse varias lecturas correspondientes á otras tantas coincidencias, y adoptar el término medio, como en el ejemplo siguiente, que se refiere á observaciones de distintas estrellas de segunda ó tercera magnitud:

$$\begin{array}{r} 1'\,55'' \\ 1\ 50 \\ 2\ 00 \\ 1\ 55 \\ 2\ \ 5 \\ \hline e_0 = 1'\,57.''0 \end{array}$$

Obtenidas estas lecturas en la parte positiva del arco, el ángulo correspondiente á cualquiera indicacion G del instrumento, será $G - 1'\,57.''$

El error inicial se determina tambien por medio del sol midiendo con el sextante su semidiámetro, por ser esta operacion susceptible de mas exactitud que la superposicion de las dos imágenes de su limbo. A este fin, dirigiendo el telescopio hácia ese astro, se mueve la alidada con el tornillo de aproximacion hasta que la imágen re-

(*) Muchas veces se representa algebraicamente el ángulo correcto por la expresion general $G + e_0$, atribuyendo á e_0 el signo positivo cuando el paralelismo de los espejos corresponda á un punto del arco adicional ó negativo, y así lo he representado en mis "*Nuevos Métodos astronómicos;*" pero se comprende que ambas formas de la expresion dan resultados necesariamente idénticos cuando se aplican atribuyendo á e_0 el signo que le corresponda de acuerdo con la convencion que se haya establecido.

fleja se ponga en contacto con la directa, tanto hácia un lado como hácia el otro de esta, y leyendo las dos indicaciones, cuyo término medio da el valor de e_0. En efecto, puesto que al coincidir los centros la lectura seria e_0, cuando los bordes están en contacto los centros distarán $2s$, siendo s el semidiámetro del sol, y las dos lecturas serán en consecuencia:

$$e_0 + 2s = g_1$$
$$e_0 - 2s = g_2$$

de donde resulta:

$$e_0 = \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2)$$
$$s = \tfrac{1}{4}(g_1 - g_2)$$

Tomemos por ejemplo las siguientes observaciones del sol hechas con el mismo sextante á que se refiere el anterior:

$+ 33' 45''$	$- 29' 50''$
$+ 33\ 45$	$- 29\ 40$
$+ 33\ 40$	$- 29\ 40$
$+ 33\ 40$	$- 29\ 45$
$g_1 = + 33' 42.''5$	$g_2 = - 29' 43.''7$

$$e_0 = + \frac{3' 58.''8}{2} = + 1' 59.''4 \qquad s = \frac{63' 26.''2}{4} = 15' 51.''5$$

Las cuatro lecturas positivas se obtuvieron estableciendo el contacto del borde inferior de la imágen refleja con el superior de la directa, tales como se veian al traves del telescopio; y las negativas, obtenidas en el arco de exceso, provinieron de los contactos del limbo superior de la refleja con el inferior de la imágen directa.

Aunque la concordancia del semidiámetro obtenido por la observacion con el que suministran las efemérides del sol no constituya en realidad una verdadera prueba de la exactitud con que se haya determinado el error inicial, da sin embargo una fuerte presuncion en su favor. En el caso que consideramos el semidiámetro tabular era $15' 52.''4$ el dia de la observacion, que concuerda bastante bien con el que suministró la medida. Siempre que al determinar el error por este método, esté el sol poco elevado sobre el horizonte, debe hacerse uso del semidiámetro horizontal; porque los dos bordes del vertical, diversamente afectados por la refraccion, darán al disco

una apariencia algo elíptica. En consecuencia, teniendo hácia arriba el limbo del sextante, se establecerán los contactos de los limbos laterales de las imágenes, en lugar de establecer los de los bordes superior é inferior, con el sextante vertical. Debe tambien advertirse que en toda clase de observaciones solares se usan los helioscopios *M* y *m* que se colocan delante de ambos espejos y que sirven para mitigar la intensidad de la luz. Por lo comun el sextante tiene varios de estos helioscopios de diversos colores, y se combinan dos ó mas con el fin de obtener cada una de las imágenes del color y de la intensidad que se desee, procurando que sean tales que no fatiguen la vista, tanto por el mal que puede causar una luz demasiado viva, como por la mayor precision con que pueden establecerse los contactos. Mas bien que hacer uso de esos helioscopios, es conveniente servirse de uno solo colocado delante del ocular del anteojo; porque si existe algun defecto en los que están delante de los espejos, afectará ese defecto á una sola de las imágenes, haciéndolas acaso aparecer en contacto cuando no lo están realmente. No sucede lo mismo con el helioscopio ocular cuyo error, si existe, afecta por igual á las dos imágenes y en consecuencia no altera su situacion relativa.

165.—Expliquemos ahora el modo de comprobar el paralelismo del telescopio y del limbo. Como lo que se observa con el sextante no es la coincidencia de las señales con la línea de colimacion, sino el contacto de las imágenes, su telescopio no tiene retícula, y está provisto únicamente de dos hilos paralelos cuyo objeto es solo el de marcar con alguna aproximacion el centro del campo, que es el lugar en donde deben observarse los contactos. Así, pues, la línea de colimacion será la que une el centro óptico del objetivo con el medio del espacio que separa los hilos; y esta línea es la que ha de ser paralela al plano del sextante. Para cerciorarse de si existe ó no ese paralelismo, se coloca el instrumento horizontalmente sobre una mesa, por ejemplo, y despues de haber hecho girar el telescopio al derredor de su eje hasta que los hilos queden próximamente paralelos al plano del limbo, se establece á la distancia de 6^m á 8^m por lo ménos, una señal que pueda verse al traves del anteojo y que se halle en la prolongacion de aquel plano. En seguida se mide la distancia del limbo al centro del objetivo, y esta se toma hácia arriba de la señal establecida. Si entónces se ve esta última en el telesco-

pio, exactamente entre los dos hilos, existe el paralelismo; pero en el caso contrario se moverán los tornillos pequeños que tiene el collar del anteojo en su parte superior é inferior, y que le comunican movimiento en un plano perpendicular al del sextante, hasta que se vea la señal en el centro del campo.

Estas marcas pueden hacerse en una pared á la distancia indicada, dirigiendo una visual en el plano mismo del instrumento; pero es mas exacto poner sobre el arco graduado dos cubos pequeños de madera ó de metal, cuya altura sea precisamente igual á la del centro del objetivo respecto del limbo, y entónces la visual dirigida por las caras superiores de esa especie de pínulas, determina desde luego una señal situada en un plano paralelo al del limbo, y que por consiguiente es la que debe verse á la mitad de la distancia de los hilos. Algunos sextantes están provistos de dos láminas metálicas del tamaño conveniente para que colocadas sobre el arco, dén una visual paralela al limbo y á la misma altura que el anteojo, el cual por otra parte puede acercarse mas ó ménos á ese plano, segun he dicho al hablar de la intensidad de las imágenes. Se estima que cuando el ángulo formado por el telescopio con el limbo no excede de 6′ á 8′, no produce error sensible en los ángulos observados con el sextante; y para alcanzar ese grado de aproximacion al tratar de nulificar el error, basta evidentemente que la marca no se desvíe de la visual paralela al limbo una cantidad superior 0.002 de la distancia, ó sea $0^{m}.02$ por 10^{m}, lo cual siempre me parece fácil. Despues de explicar el manejo del sextante verémos otro medio de comprobar el paralelismo de su plano con la línea de colimacion.

166.—El error mas influente del sextante proviene de su excentricidad, esto es, de la falta de coincidencia exacta que puede existir entre el centro del movimiento de la alidada y el centro de la graduacion; coincidencia que se juzga muy difícil de lograr, á no ser por efecto de la casualidad; y como el arco limitado del instrumento no permite mas que el uso de un vernier, no es posible eliminar el efecto de la excentricidad por medio de dos ó mas lecturas, como sucede en todos los demas goniómetros.

El método mas sencillo de hallar el error que por esta causa tenga un sextante consiste en comparar sus medidas angulares con las que suministre un buen teodolito. A este fin se coloca el sextante en una mesa ó en un tripié, y se miden con él los ángulos que for-

men entre sí varios objetos muy distantes y situados cerca del horizonte, á fin de que puedan verse en medio del campo en la posicion que guarda el instrumento. Los mismos ángulos se miden despues con el teodolito, y las diferencias que se encuentren entre los resultados se considerarán como otras tantas correcciones correspondientes á las respectivas lecturas del sextante, con las cuales se formará una tabla que por interpolacion permita hallar las correcciones para cualquiera lectura del instrumento. Cinco ó seis ángulos que abracen todo el arco del sextante son por lo general suficientes.

Conviene indicar aquí que las correcciones determinadas de esta manera corresponden en rigor al punto de la graduacion en que se lea la coincidencia de una de sus divisiones con otra del vernier, y no al punto del limbo que corresponderia al ángulo obtenido, el cual puede distar mucho del primero. Supongamos, por ejemplo, que la lectura suministre el ángulo $25° 19' 40''$ en un sextante que dé una aproximacion de $10''$. Estando dividido el grado en 6 partes, es claro que directamente no pudo apreciarse mas que el arco $25° 10'$, y que el vernier proporcionó la fraccion restante $9' 40''$; pero como la coincidencia de cada division del vernier con una del limbo hace avanzar $10'$ el punto en que ambas parecen formar una sola línea, resulta que por cada minuto obtenido con el vernier el punto de coincidencia adelantará $1°$. Segun esto, la lectura de $9' 40''$ hecha con el vernier, supone la coincidencia de las divisiones en un punto que dista $9° 40'$ de la graduacion obtenida directamente en el limbo, y en consecuencia será el que corresponde á la division..... $25° 10' + 9° 40' = 34° 50'$. Así, pues, si al comparar los ángulos del sextante con los que dé el teodolito, se halla que cuando el primero indica por ejemplo $25° 19' 40''$, el segundo da $25° 19' 40'' + s$, deberá considerarse que la correccion del sextante es de $+ s$ segundos en el punto $34° 50'$ de su graduacion, que es en el que se verificó la coincidencia con el vernier.

Se comprende que no es preciso al hacer la lectura de cada ángulo anotar tambien el punto de coincidencia; porque puede deducirse despues como lo hemos hecho, esto es, convirtiendo en grados y minutos respectivamente los minutos y segundos obtenidos con el vernier, y sumando este arco con la indicacion directa del limbo. Es claro, por otra parte, que esta regla solo es aplicable al caso que he considerado; pero fácilmente se encontrarán reglas análogas cuan-

do sea diversa la aproximacion que dé un sextante á causa de estar dividido de otra manera.

Mas adelante se explicarán otros medios de determinar las correcciones de la graduacion originadas por el pequeño error de excentricidad que casi siempre tienen los sextantes; y solo añadiré en este lugar que cuando se miden con estos instrumentos los ángulos formados por objetos terrestres, produce algun error la distancia que necesariamente existe del eje del telescopio al centro de la graduacion. Este error no es otra cosa mas que el pequeño ángulo bajo el cual se veria aquella distancia desde la señal; y por consiguiente solo tiene valor apreciable cuando se observan objetos muy inmediatos. Si las señales distan 6 ó 7 kilómetros por lo ménos, puede suponerse el error sensiblemente nulo; pero si están mas cercanas, lo que debe hacerse es eliminarlo determinando por medio de ellas la correccion inicial, pues afectada esta del mismo error, suministra el ángulo verdadero al aplicarla á las lecturas obtenidas. Este método es el que por tanto conviene adoptar al comparar las medidas angulares del sextante con las del teodolito.

167.—Puede emplearse el sextante para medir un arco celeste cualquiera; pero se usa con mas frecuencia para la medida de las alturas angulares de los astros sobre el horizonte, pues aunque suele aplicarse tambien á la de los ángulos azimutales, tiene el inconveniente de demandar el auxilio del cálculo para reducirlos al horizonte, en atencion á que solo da directamente las distancias angulares en el plano de los objetos.

Para medir con el sextante la altura de un astro se hace uso del *horizonte artificial*, que consiste en un receptáculo pequeño M (fig. 45ª) de hierro ó de madera, lleno de un líquido que por lo general es el mercurio, por ser uno de los mejores reflectores. El receptáculo es comunmente rectangular, de 0^m08 á 0^m10 por 0^m06 á 0^m07, y se cubre con una pieza metálica $B\,C\,D$, terminada por dos láminas $B\,C$ y $C\,D$, de vidrio, con el objeto de impedir que la superficie del mercurio se mueva por la accion del viento, así como para preservarla del polvo ú otros cuerpos extraños. Al traves de esas láminas se hacen las observaciones, por lo cual es de mucha importancia que las dos caras de cada una sean exactamente paralelas, pues de lo contrario desviarian la direccion de los rayos luminosos.

Siendo $M\,A$ la direccion en que se ve un astro A, su altura an-

gular será AMH. El rayo luminoso AM que emite el astro, se reflejará en la superficie del mercurio, de manera que colocando la vista en T, lo verémos por reflexion en A', quiere decir, deprimido respecto del horizonte una cantidad angular $HMA' = AMH$; de donde resulta que el ángulo AMA' es doble de su altura. Este ángulo es el que se mide con el sextante: á este fin teniendo el instrumento de modo que su limbo quede vertical, se dirige el telescopio al horizonte M para ver directamente la imágen A' del astro, y en seguida se mueve la alidada hasta que se vea en coincidencia con A' la imágen del mismo astro A despues de sufrir la doble reflexion en los dos espejos del sextante. La indicacion de este corregida por el error inicial, el de excentricidad, &c., dará la doble altura AmA' ó AMA', pues es claro que MA y mA son paralelas por ser nula la pequeña distancia Mm respecto de la del astro.

Siempre que se observa de este modo una estrella ó un planeta de disco muy pequeño, se hace coincidir su imágen A' vista directamente en el horizonte con la reflejada por los espejos; pero cuando se trata de un astro de disco considerable, como el sol y la luna, es mas exacto poner en contacto uno de los bordes de A' con otro de A, de suerte que lo que se mide realmente es la altura angular de un limbo del astro, de la cual se deduce en seguida la del centro por la adicion ó la sustraccion del semidiámetro. Para no equivocarse respecto del borde que haya de observarse, téngase presente que como por una parte la reflexion en el mercurio origina una inversion de los objetos, y por otra el telescopio produce nueva inversion, resulta que la imágen directa A' se ve en el horizonte en su posicion natural, de modo que si se pone en contacto con su limbo inferior el borde superior de la imágen refleja, se habrá medido la doble altura del inferior del astro; y por el contrario, si se establece el contacto en la parte superior de la imágen del horizonte, se obtendrá la doble altura del limbo superior del astro.

Miéntras no se adquiere alguna práctica es algo difícil ver á la vez la imágen refleja y la del horizonte, ya sea porque no pueda estimarse con suficiente aproximacion la cantidad angular que debe moverse la alidada segun la altura del astro, ya sea porque no se conserve vertical el plano del sextante. Para vencer esas primeras dificultades conviene proceder de esta manera: colocándose delante del horizonte en la posicion propia para ver la imágen reflejada en

el mercurio, se eleva el sextante hácia el astro con la alidada en cero próximamente. Entónces se verán directamente las dos imágenes, y si se mueve la alidada en el sentido de la numeracion creciente del limbo, se irá separando la imágen refleja de la directa, de manera que para conservarla en el campo del telescopio, será preciso ir bajando gradualmente el sextante hácia el horizonte. Continuando así el movimiento lento é igual de la alidada y de todo el instrumento, se llegará á tener dirigido el telescopio al horizonte, en cuyo caso sin que haya salido del campo la imágen refleja se verá tambien directamente la del mercurio. Una vez que estén inmediatas ambas imágenes, se fija la alidada con el tornillo de presion y se establece exactamente el contacto con el de aproximacion.

Las observaciones de astros muy luminosos, especialmente del sol, no ofrecen tanta dificultad, y en todo caso se hallan pronto las imágenes mirando directamente la del mercurio con el juego de helioscopios que se crea conveniente colocar delante del espejo menor. En seguida colocando delante del mayor uno solo de los helioscopios mas claros, se mueve la alidada sin dejar de ver la imágen del horizonte hasta que se presente la refleja, lo cual es entónces muy fácil á causa de la intensidad de su luz. Hecho esto se pone delante del espejo mayor la combinacion conveniente de helioscopios despues de haber fijado la alidada, y se procede á establecer los contactos como se ha dicho.

Como en el curso de estas operaciones puede desviarse algo el sextante de la verticalidad, suele suceder que aunque la alidada haya llegado á la posicion conveniente, no se vean desde luego las dos imágenes en el campo. Por eso conviene siempre hacer oscilar ligeramente el instrumento al derredor del eje del telescopio como eje de movimiento, ó sea al derredor de la visual dirigida á la imágen del horizonte. Ejecutando simultáneamente estos movimientos, quiere decir, el de la alidada y el de oscilacion, sin dejar de ver la imágen directa del horizonte, se adquiere muy pronto la práctica necesaria para hallar inmediatamente las dos imágenes.

168.—Cuando la estrella que va á observarse está cerca de otra ú otras que tengan casi el mismo brillo, es fácil confundirlas tomando la imágen directa de una en el horizonte y la refleja de otra. Para evitar este inconveniente así como tambien para no tener dificultad alguna en hacer que se presenten en el campo las dos imá-

genes de la misma estrella, puede hacerse uso de un nivel pequeño colocado en la alidada y formando con esta un ángulo igual al que forma el eje del telescopio con el radio que pasa por el cero de la graduacion. Un astrónomo ruso, Mr. Knorre, ha introducido esta utilísima mejora en el sextante, fundado en que el ángulo de que hice mencion es igual al que forma la alidada con el horizonte cuando están en contacto las dos imágenes de un astro, sea cual fuere la altura de este. En efecto, prolongando hasta el plano del horizonte la direccion $E\,L$ de la alidada, y atendiendo á que el ángulo $F\,E\,L$ es igual á la altura $a = O\,M\,L$ del astro, puesto que supongo en F el cero de la graduacion, el triángulo $M\,O\,L$ da: $T\,O\,L = a + L$. Pero designando por C el ángulo constante $T\,m\,F$ formado por el telescopio T con el radio del cero, se tiene tambien $T\,O\,L = a + C$; é igualando ambos valores, resulta $L = C$. Siendo en consecuencia invariable este ángulo para cada sextante, se infiere que colocado un nivel n en la alidada, de tal manera que forme con ella el mismo ángulo, bastará moverla, visando la imágen del horizonte, hasta que la burbuja ocupe el centro del tubo, para que se presente la imágen refleja al lado de la directa. Importa advertir que como la amplitud del campo del telescopio excede generalmente de 1°, no se necesita emplear un nivel sensible, ni mucho ménos que la burbuja permanezca precisamente en su centro, siendo bastante que el movimiento de la alidada la haga circular á lo largo del tubo.

El nivel debe fijarse á la alidada por medio de un apoyo que permita algun movimiento al tubo con el fin de rectificar su posicion. El que he mandado construir últimamente se fija por medio de una pinza y de un tornillo de presion, y tiene otro de aproximacion que hace bajar ó subir uno de los extremos del nivel, de manera que pueda variarse el ángulo formado por su tubo con la alidada. El modo de rectificarlo consiste en dirigir el telescopio al horizonte visando las dos imágenes del sol, y moviendo el tornillo de aproximacion hasta conseguir que cuando aquellas se confundan permanezca la burbuja cerca del medio del tubo. Esta sencilla operacion es bastante para que al observar un astro cualquiera visando directamente su imágen en el horizonte, se presente tambien la otra luego que por el movimiento de la alidada se haya hecho pasar la burbuja de un extremo á otro del tubo.

169.—La medida de las distancias zenitales ó de las alturas de los

astros sirve generalmente para la determinacion de la hora exacta ó para la de la latitud del lugar. En uno y en otro caso se anotan las horas de un cronómetro á la vez que se toman las alturas, de tal manera que la indicacion de este instrumento sea exactamente simultánea con la del instrumento angular. Muchas veces no es indispensable medir las alturas en momentos determinados, sino simplemente estar seguro de la simultaneidad de las horas y de las medidas angulares. En tales casos es cómodo practicar la operacion de manera que las alturas correspondan á un número exacto de grados ó de minutos del sextante, esperando al efecto que el astro adquiera la altura señalada de antemano con el cero del vernier. Si se observa, por ejemplo, un astro al Oriente del meridiano irá aumentando su altura; y si esta se mide primero aproximadamente, se podrá señalar en el limbo una indicacion algo mayor, y esperar, visando hácia el horizonte, á que se verifique el contacto de las dos imágenes, que es el instante que debe anotarse apuntando la hora, minuto y segundo que señale el cronómetro. Al Occidente las alturas, y en consecuencia las indicaciones del sextante, irán decreciendo; pero en lo demas se procederá absolutamente lo mismo que en el primer caso.

Casi nunca se practica una sola observacion sino que se repiten de 20′ en 20′ ó de 10′ en 10′ de la graduacion, segun que sea mas ó ménos rápido el movimiento ascendente ó descendente de los astros; y es de la mayor importancia acostumbrarse á emplear simultáneamente la vista y el oido para observar los contactos y para anotar las horas correspondientes. Con este fin, luego que se haya señalado en el limbo la graduacion conveniente, se apunta la hora y minuto del cronómetro, y comienzan á contarse en silencio los segundos ó las fracciones de segundo determinados por los sonidos que produce el volante, á la vez que con la vista en el telescopio se espera el contacto. El número de segundos que se cuente en ese instante, agregado á la hora y minutos que se apuntaron al principio, suministra la indicacion correspondiente del cronómetro. Despues de apuntarla se señala en el sextante la nueva altura para proseguir la observacion del mismo modo.

Algunos observadores no comienzan á contar los sonidos ó golpes del cronómetro sino desde el instante en que miran el contacto, y continúan contándolos hasta ver la indicacion de este instrumento,

de la cual restan el número de segundos que han contado para obtener la hora correspondiente á la observacion. Ambos métodos son igualmente buenos, y cada cual puede adoptar el que le parezca mas fácil, teniendo presente, sin embargo, que al aplicar este último procedimiento es preciso contar *cero* en el momento del contacto, pues es comun que los principiantes comiencen por 1, en cuyo caso cometen en la hora un pequeño error por defecto, puesto que cuentan un segundo, ó en general, un golpe de mas en el número sustractivo de segundos.

Cuando se observan los astros muy cerca del meridiano, ó bien cuando se toman las alturas de estrellas circumpolares, el movimiento ascensional es tan pequeño, que da lugar á bastante incertidumbre la apreciacion exacta de la hora correspondiente al contacto. En tales casos mas bien que esperarlo me parece mucho mejor establecerlo con el tornillo de aproximacion, aun cuando la lectura del limbo no produzca una decena exacta de minutos, sino que sea preciso estimar las fracciones que indique el vernier. Si para anotar el tiempo se sigue el primer método que se ha explicado, lo que debe hacerse es contar los golpes del cronómetro á la vez que se mueve el tornillo de aproximacion para acercar y sobreponer las dos imágenes; y si se sigue el segundo, se cuenta desde el instante en que estas se confundan.

A las reglas generales que he establecido para el manejo del sextante, conviene añadir la conveniencia de cambiar de posicion la cubierta del horizonte artificial, con el fin de eliminar del resultado algun error que pudiera provenir de la falta de paralelismo de las dos caras de sus vidrios. Para conseguirlo cuando se ejecuta una serie numerosa de observaciones, lo que se hace comunmente es practicar la mitad de las observaciones en una posicion de la cubierta, é invertirla despues para hacer la otra mitad. De esa manera el vidrio que al principio estaba del lado del observador, queda en seguida del lado del astro, y así es que si alguno de ellos no está terminado por caras exactamente planas y paralelas, el error que se origine de este defecto se producirá en sentidos opuestos, y por consiguiente desaparecerá del promedio de la serie.

Otra regla que siempre debe tenerse presente es la de observar los contactos en el centro del espacio comprendido entre los hilos del telescopio, los cuales conviene colocar paralelamente al plano del

limbo. Por lo general la luz de las estrellas mismas es suficiente para estimar con la aproximacion necesaria el centro del campo del telescopio; pero si no fuere así, bastará dirigir sobre el espejo menor una luz débil tal como la que produce una lámpara colocada á cierta distancia, y si es posible hácia atras del observador, con el fin de que no le impida ver las imágenes de una estrella pequeña. La necesidad de observar los contactos en medio del campo, suponiendo que la línea de colimacion esté bien rectificada, proviene de que en ese punto es donde se obtiene el ángulo verdadero, pues á uno ú otro lado de esa direccion resultaria mayor del que debe ser.

En las explicaciones precedentes he supuesto que el observador hace uso á la vez del instrumento angular y del cronómetro sirviéndose simultáneamente de la vista y del oido. Esta práctica es indudablemente la mejor; pero muchas personas acaso por falta de costumbre, siguen la de ejecutar sus observaciones con un ayudante que lee las indicaciones del cronómetro. Por medio de la palabra preventiva "atencion," pronunciada 15^s ó 20^s ántes del instante en que estiman que debe verificarse el contacto, ó en general, el fenómeno que observan, indican al ayudante que comience á contar los golpes del cronómetro; y por la ejecutiva "op," ú otra voz monosílaba breve, expresan el momento de la observacion para que el lector del cronómetro apunte la correspondiente indicacion de este instrumento. Proceder de esta manera es sin duda mas fácil que contar á la vez el tiempo; pero repito que es preferible acostumbrarse desde un principio al otro método, tanto por ser independiente de la ayuda de otra persona, cuanto por no introducir en los resultados un elemento variable de error, que puede provenir del modo especial que cada uno tiene de apreciar las fracciones de segundo.

Los marinos emplean mucho el sextante por ser el único que es posible usar sin apoyo fijo; pero no pudiendo servirse del horizonte artificial á causa del movimiento de las embarcaciones, lo que hacen es medir las alturas respecto del horizonte sensible del mar. Con este objeto dirigen el telescopio á la línea que limita la vista, y mueven la alidada hasta que alguno de los bordes del astro se vea tangente á esa línea. Aplicando en seguida la correccion por la depresion del horizonte (Tomo I, pág. 463), obtienen la altura aparente del mismo borde.

170.—Siguiendo estrictamente todas las reglas que se han ex

puesto, y practicando con el mayor cuidado posible todas las rectificaciones del sextante, juzgo que con alguna práctica podrá alcanzarse cuanta exactitud es susceptible de proporcionar este instrumento; y solo falta indicar el modo de deducir la distancia zenital aparente del astro que se haya observado. Designando por e_0 el error inicial, por G la lectura obtenida y por c la correccion que corresponda al punto de coincidencia, segun lo expuesto en la pág. 303, tendrémos que la doble altura corregida por los errores instrumentales es:..... $2a = G + c - e_0$. La altura aparente será pues: $a = \frac{1}{2}(G + c - e_0)$ y en consecuencia la distancia zenital:

$$z' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(G + c - e_0)$$

Esta cantidad es la que corregida por refraccion, paralaje y semidiámetro suministra la distancia zenital verdadera del centro del astro, segun lo indican las expresiones generales de la pág. 269.

Tratándose de una serie de observaciones, G y c representan respectivamente los promedios de las lecturas del limbo y de las correcciones que les corresponden. En cuanto á e_0 expresa el término medio de los errores iniciales determinados al comenzar y al terminar la serie. Aquí conviene advertir que ya sea á consecuencia de algunos pequeños movimientos que tengan los espejos, ó bien simplemente á causa de la diversa direccion en que obra la pesantez en las diferentes partes del sextante, suelen notarse en algunos de estos instrumentos ligeros cambios en el valor de e_0, segun sean las alturas de los astros por cuyo medio se determinen. La existencia de este defecto se comprueba fácilmente midiendo el error inicial con estrellas diversamente elevadas y comparando los resultados, pues de ese modo si se hallan diferencias sensibles puede aplicarse una correccion en cada caso particular; pero es mas seguro eliminarlo completamente determinando el valor de e_0 en la misma posicion que guarda el sextante en cada observacion. A este fin se mide el error inicial con el telescopio dirigido al horizonte, estableciendo la coincidencia de las dos imágenes reflejadas por la superficie del mercurio. Practicada esta operacion al principio y al fin de la serie, se obtiene el valor de e_0 que conviene á la posicion del sextante en que se observa el astro.

171.—En la obra de Mr. W. H. Simms que tiene por título "*The*

sextant and its applications", publicada en Lóndres en 1858, trata el autor ampliamente de todos los errores del sextante y la manera de corregirlos ó de llevarlos en cuenta. Aunque el plan de mi libro no me permita exponer todos los procedimientos de Mr. Simms, me propongo indicar sus principales resultados, que son los que importa consignar en una obra práctica; pues el lector que lo desee puede consultar aquel tratado para imponerse de los fundamentos de que se derivan las conclusiones del autor. (*)

Si designamos por G una lectura cualquiera del sextante, por e_0 su error inicial, por η el pequeño ángulo formado por el telescopio con el plano del limbo, por λ otra pequeña cantidad angular que proviene de la falta de paralelismo de las dos caras que limitan el espejo mayor y finalmente por c el efecto de la excentricidad, Mr. Simms establece la siguiente expresion del ángulo correcto:

$$A = G - e_0 - \eta^2 \text{ tan. } \tfrac{1}{2} G \text{ sen. } 1'' + B\lambda + c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

en la cual B representa un coeficiente que depende del índice de refraccion n del vidrio, y del ángulo β de incidencia en el espejo menor, ó sea el formado por el telescopio con el mismo espejo. Llamando g el punto de coincidencia correspondiente á la lectura G (pág. 303), las expresiones de B y c son:

$$B = \sqrt{\frac{n^2 - \text{sen.}^2 (\tfrac{1}{2} G + \beta)}{\text{cos.}^2 (\tfrac{1}{2} G + \beta)}} - \sqrt{\frac{n^2 - \text{sen.}^2 \beta}{\text{cos.}^2 \beta}}$$

$$c = b \text{ sen. } \tfrac{1}{4} g \text{ cos. } (\omega + \tfrac{1}{4} g) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La cantidad b que entra en el valor de c es una constante para cada instrumento, que depende de su radio y de la pequeña distancia que haya del centro del movimiento de la alidada al centro de la graduacion. El ángulo ω es el formado por la direccion de la pequeña distancia que acaba de mencionarse con el radio que pasa por el cero de la division.

172.—Una vez conocida la expresion general del ángulo correcto, se determinan por la observacion para cada sextante las cons-

(*) Tambien puede consultarse la obra de Mr. Chauvenet que lleva por título «*A Manual of spherical and practical Astronomy*,» Filadelfia, 1864. El Capítulo IV del tomo II se ocupa de los instrumentos de reflexion con la amplitud y el acierto que caracterizan á ese excelente tratado de Astronomía práctica.

tantes η, β, λ, b y ω, de la manera que procuré trazar brevemente. La determinacion de η supone conocido el espacio angular a comprendido entre los hilos del telescopio, el cual se mide haciendo girar el tubo hasta que los hilos queden sensiblemente perpendiculares al plano del limbo, y visando en seguida un objeto, de manera que por el movimiento de la alidada la imágen directa se coloque en uno de los hilos y la refleja en el otro. Entónces siendo γ la lectura y e_0 la indicacion correspondiente á la coincidencia de ambas imágenes, se tiene: $a = \gamma - e_0$.

Para determinar ahora la constante η se mide el ángulo entre dos objetos distantes, estableciendo la coincidencia de sus imágenes no en el centro del campo, sino sucesivamente en cada uno de los hilos, situados de nuevo en su posicion natural paralela al limbo. Siendo G_1 y G_2 las dos lecturas que se obtengan, el valor de η es:

$$\eta = (3.2352) \frac{G_1 - G_2}{a} \tan. \tfrac{1}{4} (G_1 + G_2) \text{..................} (3)$$

Con este valor ya podrá calcularse el término $- \eta^2 \tan. \frac{1}{2} G \text{ sen. } 1''$ que forma parte de la expresion general (1), ó tomarlo de la Tabla siguiente, sin olvidar que esta correccion es siempre sustractiva.

G	10'	20'	30'	40'	50'
10°	0.″2	0.″6	1.″4	2.″4	3.″8
20	0. 3	1. 2	2. 8	4, 9	7. 7
30	0. 5	1. 9	4. 2	7. 5	11. 7
40	0. 6	2. 5	5. 7	10, 2	15. 9
50	0. 8	3. 3	7. 3	13. 0	20. 3
60	1. 0	4. 0	9. 1	16. 1	25. 2
70	1. 2	4. 8	11. 0	19. 6	30. 6
80	1. 5	5. 9	13. 2	23. 4	36. 6
90	1. 7	7. 0	15. 7	27. 9	43. 6
100	2. 1	8. 3	18. 7	33. 3	52. 0
110	2. 5	10. 0	22. 4	39. 9	62. 3
120	3. 0	12. 1	27. 2	48. 4	75. 6

Se ve por la expresion de η y por la Tabla de las correcciones que origina, que el efecto de ese error crece rápidamente con el valor del ángulo. Por eso para determinarlo con precision importa mucho elegir dos objetos cuya distancia angular exceda de 90°, y si es posible, que sea tan grande como la pueda medir el sextante.

Aplicando este método á un sextante mio cuyos hilos formaban un ángulo $a = 64'$, medí varias series de distancias de la Polar á las estrellas α *Pegasi* y α *Piscis australis* poniendo los contactos en los

dos hilos sucesivamente, y obtuve por término medio de cuatro determinaciones $\eta = 12.'0$, siendo los resultados extremos 10.'6 y 13.'1. En consecuencia la mayor correccion originada por η, que es la correspondiente á la graduacion extrema 120° del instrumento, es solo de $-4.''5$.

173.—Pasemos ahora á la determinacion de λ. Como el coeficiente B de este error en la fórmula general, es una funcion de β, lo primero que debe hacerse es medir este ángulo, que por lo regular está comprendido entre 18° y 20°. Se puede obtener su valor aproximativo midiendo los lados del triángulo que tiene por vértices el medio del espejo mayor, el del menor y el centro del collar en que se atornilla el telescopio. Calculando con estos datos el ángulo cuyo vértice está en el espejo menor, se obtendrá el valor de β, que es la mitad de aquel.

Para medirlo con mas exactitud, se desatornilla la armadura del espejo mayor para separarlo de la alidada. Entónces colocado horizontalmente el sextante, y llevando su alidada hácia el extremo del arco, se dirige el telescopio á un objeto distante. A la vez que este se mire directamente, se observará en coincidencia con él, la imágen de otro objeto, reflejada por el espejo menor y cuyos rayos incidentes han podido herirlo á causa de la remocion del mayor. Es claro que estos dos objetos forman entre sí un ángulo de $180° - 2\beta$, y por tanto, si el observador se fija bien en el que produce la imágen refleja, á fin de que lo pueda distinguir de los objetos inmediatos, quedará en aptitud de medir el ángulo $180° - 2\beta$ con un teodolito ó con el mismo sextante despues de repuesto el espejo mayor en su lugar. El sextante, sin embargo, no permite medir de una sola vez un ángulo tan considerable; pero puede hacerse la operacion por partes, sirviéndose de un objeto intermedio para tomar los ángulos que forma con aquellos y cuya suma da el valor de $180° - 2\beta$, del que se deducirá en seguida el de β. De esta manera encontré que en mi sextante, β es de 18.°8.

Con el valor de este ángulo pueden ya calcularse los de B para diversos valores de G desde 0° hasta 125°, que es el límite ordinario del sextante; pero como en todos los instrumentos de construccion moderna el ángulo β está comprendido entre 18° y 20°, pongo en seguida una Tabla de los coeficientes B que corresponden á los valores 18°, 19° y 20° de β, y de la cual se puede interpolar.

G	β			G	β		
	18°	19°	20°		18°	19°	20°
0°	0.00	0.00	0.00	80°	0.81	0.86	0.91
10	0.03	0.03	0 04	90	1.14	1.22	1 30
20	0.07	0.08	0.08	100	1.64	1.76	1.90
30	0.13	0.13	0.14	105	1.99	2.16	2.34
40	0 20	0 21	0 22	110	2 46	2 68	2 94
50	0.29	0.31	0.32	115	3.09	3.41	3.78
60	0.41	0.44	0 47	120	4.00	4.48	5.05
70	0.58	0.61	0.65	125	5.40	6.19	7.20

Tomando de esta Tabla el coeficiente B que corresponda al valor de β en el instrumento que se examine, se mide la distancia angular entre dos objetos, ó mejor entre dos estrellas. Sea A el ángulo exacto, G la indicacion del sextante y e_0 su error inicial: la ecuacion (1) dará:

$$A = G - e_0 - \eta^2 \text{ tan. } \tfrac{1}{2} G \text{ sen. } 1'' + B\lambda + c$$

En seguida se quita el espejo mayor y se invierte, de manera que su borde superior quede hácia abajo y vice versa. Se comprueba su perpendicularidad y se determina de nuevo el error inicial, que designaré por e'_0, pues generalmente no será igual el primitivo. Con esta segunda posicion del espejo, se vuelve á medir el mismo ángulo A, y como el valor de λ producirá un efecto contrario, tendrémos, designando por G' la nueva lectura y suponiendo iguales las pequeñas correcciones por η y por la excentricidad, como lo son sensiblemente en realidad:

$$A = G' - e'_0 - \eta^2 \text{ tan. } \tfrac{1}{2} G \text{ sen. } 1'' - B\lambda + c$$

La combinacion de estas dos ecuaciones produce:

$$\lambda = \frac{(G' - G) - (e'_0 - e_0)}{2B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Cuando A expresa la distancia angular aparente de dos estrellas, varia generalmente de la primera observacion á la segunda; pero es muy fácil tomar en cuenta la variacion como en el ejemplo siguiente hecho entre otros para corregir mi sextante. El 6 de Noviembre de 1861 medí la distancia de la Polar á α *Piscis australis*, cuyo valor

exacto era $A = 119° 8' 4.''8$, y habiendo hallado $G = 119° 9' 10.''8$, $e_0 = 28.''0$, y siendo $-4.''4$ la correccion por n, se tiene la ecuacion:

$$119° 8' 4.''8 = 119° 9' 10.''8 - 28.''0 - 4.''4 + 4.16\,\lambda + c$$

ó bien reduciendo:

$$-33.''6 = 4.16\,\lambda + c$$

Al dia siguiente habiendo invertido el espejo, volví á medir la distancia entre las mismas estrellas, cuyo valor calculado era..... $A = 119° 8' 9.''4$, hallando $G' = 119° 8' 18.''3$ y $e'_0 = 3.''9$. Por consiguiente la nueva ecuacion será:

$$119° 8' 9.''4 = 119° 8' 18.''3 - 3.''9 - 4.''4 - 4.16\,\lambda + c$$

que reducida produce:

$$-0.''6 = -4.16\,\lambda + c$$

Combinando las dos ecuaciones se obtiene:

$$8.32\,\lambda = -33.''0$$
$$2.00\,c = -34.\ 2$$

de las que resulta $\lambda = -3.''97$ y $c = -17.''10$. Por muchas observaciones de la misma especie encontré en término medio $\lambda = -4.''4$. Tomando de la Tabla precedente los valores de B que corresponden á $\beta = 18.°8$, se podrá calcular por consiguiente la correccion $B\lambda$ que conviene á cada lectura G de este sextante. Es claro que el cálculo da el valor de λ con el signo correspondiente á la primera posicion del espejo, y que para la segunda deberá tomarse con signo contrario.

El valor de la distancia A se determina calculando para el instante preciso de la observacion las distancias zenitales verdaderas de las estrellas y sus azimutes, por las fórmulas (3) y (4) de las páginas 239 y 240. Restando la refraccion se obtienen las distancias zenitales aparentes; y entónces en el triángulo formado por el zenit y las dos estrellas se conocerán dos lados y el ángulo comprendido, siendo los primeros las distancias zenitales aparentes y el segundo la diferencia de los azimutes de las dos estrellas. La resolucion dará en consecuencia el tercer lado, que es el valor de A. Conviene

escoger las estrellas de manera que A sea considerable para que lo sea tambien el divisor $2\,B$ de la fórmula (4), pues así se disminuirá el efecto de los pequeños errores de observacion.

174.—Obtenidos de este modo dos valores c_1 y c_2 de la correccion de excentricidad, correspondientes á los puntos g_1 y g_2 de coincidencia, tendrémos, segun la ecuacion (2):

$$c_1 = b \text{ sen. } \tfrac{1}{4} g_1 \cos. (\omega + \tfrac{1}{4} g_1)$$
$$c_2 = b \text{ sen. } \tfrac{1}{4} g_2 \cos. (\omega + \tfrac{1}{4} g_2)$$

Eliminando la constante b se obtiene sin dificultad la otra constante ω, por la fórmula:

$$\tan. \omega = \frac{c_1 \text{ sen. } \frac{1}{2} g_2 - c_2 \text{ sen } \frac{1}{2} g_1}{2 (c_1 \text{ sen.}^2 \frac{1}{4} g_2 - c_2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{4} g_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

y por último cualquiera de las ecuaciones primitivas da:

$$b = \frac{c_1}{\text{sen. } \frac{1}{4} g_1 \cos. (\omega + \frac{1}{4} g_1)} = \frac{c_2}{\text{sen. } \frac{1}{4} g_2 \cos. (\omega + \frac{1}{4} g_2)} \quad \ldots\ldots (6)$$

Aplicando este método hallé para mi sextante, $\omega = -81° 2'$ y log. $b = 1.652 -$, pudiendo por tanto calcular el valor de la correccion c para cualquiera punto g de coincidencia, por medio de la fórmula (2).

175.—Cuando se hayan determinado las cuatro constantes n, λ, b y ω del instrumento, se construyen Tablas de las tres correcciones:

$$c = b \text{ sen. } \tfrac{1}{4} g \cos. (\omega + \tfrac{1}{4} g) \qquad c' = -n^2 \tan. \tfrac{1}{2} G \text{ sen. } 1'' \qquad c'' = B\lambda$$

con lo cual para cualquiera lectura G y su correspondiente coincidencia g, se tendrá por ángulo correcto:

$$A = G - e_0 + c + c' + c''$$

Con el fin de presentar la forma de estas Tablas, pongo á continuacion las que formé para mi sextante desde 40° hasta 120°, que es la parte de la graduacion que se usa con mas frecuencia.

g	c
40°	— 2.″5
50	3. 6
60	4. 7
70	6. 0
80	7. 4
90	9. 0
100	10. 6
110	12. 3
120	—14. 1

G	c'
40°	— 0.″9
50	1. 2
60	1. 5
70	1. 8
80	2. 2
90	2. 6
100	3. 1
110	3. 7
120	— 4. 5

G	c''
40°	0.″8
50	1. 2
60	1. 7
70	2. 4
80	3. 4
90	4. 8
100	7. 0
110	10. 6
120	17. 5

La última está calculada con $\lambda = 4''$ y con los valores de B que corresponden á $\beta = 18.°8$. Como λ resultó negativa para la primera posicion del espejo, las correcciones de esta Tabla serán sustractivas siempre que se emplee el sextante con el espejo en esa primera posicion, y positivas para la segunda. Ademas, las Tablas segunda y tercera tienen el mismo argumento G; y por consiguiente es cómodo formar de ambas una sola Tabla colectiva para cada posicion del espejo, reuniendo las correspondientes correcciones, de esta manera:

PRIMERA POSICION.	
G	$c' + c''$
40°	— 1.″7
50	2. 4
60	3. 2
70	4. 2
80	5. 6
90	7. 4
100	10. 1
110	14. 3
120	—22. 0

SEGUNDA POSICION.	
G	$c' + c''$
40°	— 0.″1
50	0. 0
60	+ 0. 2
70	0. 6
80	1. 2
90	2. 2
100	3. 9
110	6. 9
120	+13. 0

Estas correcciones y las que suministra la primera Tabla con el punto de coincidencia g por argumento, permiten corregir inmediatamente las lecturas del sextante. Aunque por comodidad para las aplicaciones se formen estas últimas Tablas colectivas, conviene, sin embargo, conservar las primitivas; porque los valores de c' dependiendo de η, que es susceptible de variacion, puesto que representa el pequeño ángulo del telescopio con el limbo, si este error se hace variar se habrán modificado igualmente los valores de c', en cuyo caso será muy fácil formar una nueva Tabla colectiva de estos y los de c'' que no varian. Por otra parte, creo que aplicando con todo

el cuidado posible el método de correccion del núm. 165, puede tenerse seguridad de reducir el error n á un valor bastante pequeño para que sea permitido suponer su influencia sensiblemente nula; y entónces serán solo c y c'' las correcciones de los ángulos.

Tales son los resultados prácticos del método de Mr. Simms para determinar y llevar en cuenta los principales errores del sextante; y espero que se comprenderá toda su importancia sabiendo que en muchos de estos instrumentos asciende á mas de 1′ la suma de los errores, y que acaso todos ellos están sujetos á uno considerable de excentricidad.

176.—La teoría del sextante es igualmente aplicable al círculo de reflexion, ya sea simple ó repetidor. La ventaja esencial de estos últimos respecto de aquel consiste en que el principio de la repeticion elimina casi del todo el error de excentricidad; pero en cambio son de un manejo algo mas complicado. En el círculo de reflexion ademas de la alidada que se mueve con el espejo mayor, hay otra á la cual está fijo el menor y el telescopio, que se mueven con ella sin que se altere su posicion relativa, quiere decir, el ángulo que forma la línea de colimacion con este último espejo. Las dos alidadas tienen movimientos independientes, y un vernier cada una de ellas.

Suponiendo que las divisiones estén numeradas de izquierda á derecha, para medir con este instrumento el ángulo de dos objetos se fija la alidada del espejo mayor en 0° ó en otro punto cualquiera del limbo, y teniendo el telescopio dirigido á la señal de la derecha, se mueve el círculo hasta que la imágen de la izquierda, doblemente reflejada, se vea en contacto con ella. Entónces se fija la alidada del espejo menor, y mirando directamente la señal de la izquierda, se pone en movimiento la otra alidada en el sentido de la numeracion creciente hasta que se vea por la doble reflexion el objeto de la derecha en coincidencia con el de la izquierda. Como en este movimiento ha recorrido la alidada del espejo mayor un arco cuya numeracion es doble del ángulo de las señales, la semidiferencia de sus indicaciones suministrará el valor de este ángulo. Si se desea repetir la medida se vuelve á comenzar la operacion partiendo de la posicion en que haya quedado fijada la alidada del espejo mayor, y por el mismo procedimiento se obtiene de nuevo el doble ángulo, ó bien el cuádruplo respecto de la primera indicacion del vernier de esta

alidada al comenzar la serie. De una manera idéntica se obtiene el séxtuplo, el óctuplo, &c., del mismo ángulo.

En la fábrica de Pistor & Martin, de Berlin, se construyen en la actualidad sextantes y círculos de reflexion llamados prismáticos, por tener un prisma de cristal en lugar del espejo menor. Presentan sobre los instrumentos comunes la ventaja de permitir la medida de ángulos de cualquiera amplitud, á causa de la situacion del prisma muy inmediato al objetivo del telescopio. Por lo demas, su uso es del todo semejante al de los demas intrumentos de reflexion.

CAPITULO VII.

DETERMINACION DE LA HORA.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES.

177.—En la pág. 239 se ha dado una idea general de la resolucion de este problema, la cual consiste esencialmente en calcular el ángulo horario del astro con los datos: distancia zenital z medida directamente, latitud φ de la estacion y declinacion δ del astro; y en combinar despues el ángulo horario calculado con la ascension recta, á fin de obtener la hora exacta de la observacion, que comparada con la que señalaba el cronómetro en el mismo instante, da

á conocer el error de este instrumento respecto del tiempo real de la estacion.

Si siempre pudieran suponerse exactos todos los elementos del cálculo, no habria inconveniente en aplicar esta resolucion, cualquiera que fuese la posicion del astro respecto del meridiano del observador; pero como en la práctica es casi imposible alcanzar esa rigurosa precision, se hace indispensable investigar en qué circunstancias tienen la menor influencia posible los pequeños errores que pueden existir en los datos suministrados por la observacion directa, y aun en los que se toman de las Tablas astronómicas. Con este objeto, suponiendo en z, ϕ y δ los pequeños errores ó variaciones $\triangle z$, $\triangle \phi$ y $\triangle \delta$, el ángulo horario h resultará con el error $\triangle h$, que consideraré como el resultante de los anteriores, ó sea como una funcion de los mismos; y en consecuencia, limitándome á sus primeras potencias á causa de su pequeñez, el error del ángulo horario será de la forma:

$$\Delta h = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}\Delta z + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\phi}\Delta \phi + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta}\Delta \delta$$

Los coeficientes de los errores se deducen de la ecuacion fundamental siguiente, que contiene todos los elementos del problema.

$$\cos.\ z = \operatorname{sen}.\ \phi \operatorname{sen}.\ \delta + \cos.\ \phi \cos.\ \delta \cos.\ h$$

Diferenciándola sucesivamente respecto de cada uno de los datos, resulta:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = \frac{\operatorname{sen}.\ z}{\cos.\ \phi \cos.\ \delta \operatorname{sen}.\ h}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\cos.\ \phi \operatorname{sen}.\ \delta - \operatorname{sen}.\ \phi \cos.\ \delta \cos.\ h}{\cos.\ \phi \cos.\ \delta \operatorname{sen}.\ h} = \frac{\tan.\ \delta - \tan.\ \phi \cos.\ h}{\operatorname{sen}.\ h}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta} = \frac{\operatorname{sen}.\ \phi \cos.\ \delta - \cos.\ \phi \operatorname{sen}.\ \delta \cos.\ h}{\cos.\ \phi \cos.\ \delta \operatorname{sen}.\ h} = \frac{\tan.\ \phi - \tan.\ \delta \cos.\ h}{\operatorname{sen}.\ h}$$

178.—Estos valores, sustituidos en la expresion del error $\triangle h$, miden la influencia de los que se suponen en los datos, y aun permiten corregir el ángulo horario luego que se conocen las magnitudes de las correcciones $\triangle z$, $\triangle \phi$ y $\triangle \delta$; pero por ahora investiguemos cuáles son las condiciones que reducen á un *minimum* estos coefi-

cientes. Comenzando por el de Δz, vemos que si se designa por a el azimut del astro, el triángulo astronómico da:

$$\text{sen. } h \cos. \delta = \text{sen. } a \text{ sen. } z$$

Introduciendo este valor en el coeficiente $\frac{dh}{dz}$, se halla:

$$\frac{dh}{dz} = \frac{1}{\cos. \phi \text{ sen. } a}$$

El exámen de esta expresion indica que si bien su valor no puede ser nulo, adquiere el menor posible cuando $\phi = 0°$ y $a = 90°$, esto es, cuando la estacion se halla en el ecuador y se observa un astro en el plano del primer vertical. Es claro que el observador no es dueño de llenar la primera condicion, puesto que tiene necesidad de operar en determinada latitud; pero aquellas consideraciones demuestran que el método de distancias zenitales, por lo que respecta al error que pueda cometerse en este elemento, es mas favorable en las bajas que en las altas latitudes en igualdad de circunstancias, á causa del valor considerable de los cosenos de arcos pequeños. Para una latitud dada, el coeficiente tiene su *minimum* cuando $a = 90°$, en cuyo caso será:

$$\frac{dh}{dz} = \frac{1}{\cos. \phi} = \text{sec. } \phi$$

Se ve que este valor es constante; y que en consecuencia, cuando un astro pasa por el primer vertical, su movimiento ascendente ó descendente es proporcional al tiempo, quiere decir, asciende ó desciende espacios iguales en tiempos iguales. Esta conclusion tambien es sensiblemente cierta cuando el azimut del astro difiere poco de 90°, puesto que los senos de arcos próximos á un cuadrante varian con mucha lentitud; y como por otra parte en las mismas circunstancias es poco sensible el movimiento azimutal de los astros, se infiere que aun para azimutes que se alejen 20° ó 30° del primer vertical tanto hácia el Norte como hácia el Sur, siempre puede admitirse que en 10^m ó 12^m que dure una serie de observaciones, el movimiento ascensional es sensiblemente proporcional al tiempo, de modo que el promedio de las distancias zenitales medidas, siempre

corresponderá al promedio de las horas anotadas en el cronómetro. Se comprenderá toda la importancia de esta conclusion por el simple hecho de que autoriza la repeticion de las medidas, y en consecuencia la adopcion de promedios en vez de observaciones sencillas ó individuales.

179.—Pasemos al coeficiente de $\triangle \phi$. Cuando el triángulo astronómico es rectángulo en el zenit, se tiene: cot. ϕ = cot. δ cos. h, ó bien: tan. δ = tan. ϕ cos. h, por lo cual en ese instante:

$$\frac{dh}{d\phi} = 0$$

lo que demuestra que un pequeño error en la latitud no tiene influencia en la determinacion de la hora siempre que se observe el astro en el primer vertical. Es evidente que poco ántes ó poco despues de ese momento será muy pequeña la diferencia tan. δ — tan. ϕ cos. h, y que por tanto, con un astro cerca del primer vertical podrá el observador determinar exactamente la hora local, aun cuando tenga alguna incertidumbre respecto de su verdadera latitud, porque el error quedará multiplicado por una fraccion sumamente pequeña. Tambien esta conclusion es de grande importancia en la práctica, puesto que muchas veces el astrónomo ignora casi completamente la latitud de la estacion que ocupa, y procediendo como se ha indicado puede determinar bien su tiempo para corregir en seguida el valor de la latitud supuesta. Estas correcciones sucesivas son muy frecuentes en la aplicacion de la Astronomía, y siempre conducen á muy buenos resultados si se guían los trabajos de acuerdo con las indicaciones de la teoría, análogas á las precedentes.

180.—El coeficiente de $\triangle \delta$ no se nulifica cuando $a = 90°$, sino cuando el triángulo astronómico es rectángulo en el astro. En efecto, en tal caso se tiene: cot. δ = cot. ϕ cos. h, ó lo que es lo mismo, tan. ϕ = tan. δ cos. h, y por consiguiente:

$$\frac{dh}{d\delta} = 0$$

La condicion de que sea recto el ángulo paraláctico no puede tener lugar, sin embargo, mas que cuando la declinacion del astro sea mayor que la latitud del lugar; y como siendo recto ese ángulo, el plano

vertical $Z\,A'$ (fig. 46ª) que pasa por el astro A' es tangente á su círculo $R\,A'\,S$ de declinacion, resulta que en ese momento adquiere el mayor valor posible su azimut $P\,Z\,A'$. Así, pues, la condicion de un azimut considerable es en todos casos la mas conveniente para nulificar ó disminuir los efectos de los pequeños errores existentes en los datos necesarios para la determinacion de la hora.

181.—Adviértase que solo pueden pasar por el primer vertical $Z\,O$ los astros cuyas declinaciones están comprendidas dentro de los límites 0° y ϕ. El que tuviera nula su declinacion cortaria aquel plano en el punto O del horizonte, por ser comun al ecuador $E\,O$; y el que tuviera por declinacion una cantidad igual á ϕ, describiria el círculo $Z\,Q$, tocando por consiguiente al primer vertical en el zenit. Se deduce de aquí que el número de astros susceptibles de un azimut de 90°, es en general tanto menor, cuanto mas pequeña es la latitud de la estacion; y que ciñéndose estrictamente á ese valor del azimut, el número de las estrellas útiles para observaciones de tiempo se reduce aun por la necesidad de no medir sus alturas muy cerca del horizonte á causa de las irregularidades de la refraccion, pues se recordará (pág. 256) que nunca se juzgan dignas de confianza las observaciones practicadas á mas de 80° de distancia zenital. Esto no obstante, como todas las ventajas de un azimut de 90° existen casi en el mismo grado á 20° ó 30° á un lado y otro del primer vertical, se infiere que en cualquiera latitud se puede contar siempre con un gran número de estrellas propias para la determinacion del tiempo; y que la única regla práctica que establecen las consideraciones precedentes es la de evitar las observaciones cerca del meridiano, y por consiguiente las de estrellas circumpolares y en nuestras regiones las de estrellas australes cuyas declinaciones sean grandes numéricamente; porque unas y otras nunca pueden tener azimutes considerables. Pongo á continuacion una Tabla de las distancias zenitales mas convenientes para las observaciones de tiempo en cada latitud, y que se refiere á estrellas de diferentes declinaciones. Siendo ϕ del mismo signo y mayor que δ, pasará el astro por el primer vertical, y en el momento de su tránsito por ese plano, se tendrá la relacion siguiente, por ser el triángulo astronómico rectángulo en el zenit:

$$\cos.\ z = \frac{\text{sen.}\ \delta}{\text{sen.}\ \phi}$$

Si por el contraio, δ es mayor que ϕ, en el instante en que el plano vertical que pasa por la estrella es tangente á su círculo de declinacion, se tendrá:

$$\cos. z = \frac{\text{sen. } \phi}{\text{sen. } \delta}$$

Por medio de estas relaciones se ha calculado la Tabla, la cual por consiguiente solo se refiere á estrellas cuyas declinaciones tengan el mismo signo que la latitud.

Distancias zenitales mas favorables para la determinacion de la hora.

	DECLINACION DEL ASTRO.						
LATITUD.	*5°*	*10°*	*15°*	*20°*	*25°*	*30°*	*35°*
15°	70° 19′	47° 52′	00° 00′	40° 49′	52° 14′	58° 50′	63° 11′
20	75 14	59 29	40 49	00 00	35 20	46 50	53 24
25	78 6	65 44	52 14	35 20	00 00	32 15	42 32
30	79 58	69 41	58 50	46 50	32 15	00 00	29 20
35	81 16	72 23	63 11	53 24	42 32	29 20	00 00

Cuando ϕ y δ sean de signos contrarios, solo se procurará observar el astro cuando tenga el mayor azimut posible.

Habiendo estudiado la influencia de cada uno de los errores $\triangle z$, $\triangle \phi$ y $\triangle \delta$, notemos por la inspeccion de sus coeficientes que deben producir efectos contrarios á un lado y otro del meridiano, puesto que el ángulo horario es positivo al Oeste y negativo al Este. Si, pues, se observan dos estrellas de declinacion poco diferente y próximamente con el mismo azimut, el promedio de los resultados podrá considerarse independiente de pequeños errores constantes que existan en los datos. Esta indicacion es muy útil para el observador que no conozca con precision el valor de su latitud, los errores de su instrumento angular, ó bien que carezca de los medios de estimar con exactitud la refraccion atmosférica.

182.—Presentemos ahora algunas aplicaciones que hagan com-

prender perfectamente todos los detalles de la práctica de este método, comenzando por reunir las fórmulas que deben emplearse.

$$\left.\begin{aligned} z &= z' + r - p \pm s \\ a &= \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} (\phi - \delta) \\ b &= \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2} (\phi - \delta) \\ \text{sen. } \tfrac{1}{2} h &= \sqrt{\frac{\text{sen. } a \text{ sen } b}{\text{cos. } \phi \text{ cos. } \delta}} \\ T &= a + h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se recordará que z' representa la distancia zenital aparente, tal como la da el instrumento despues de corregida por los errores de este; que r, p y s indican respectivamente la refraccion, la paralaje de altura y el semidiámetro del astro, siendo este último aditivo ó sustractivo, segun que se haya observado el borde superior ó el inferior, y teniendo presente que p y s son nulos siempre que se trate de una estrella; y por último, que el valor de h se convertirá en tiempo para combinarlo con la ascension recta del astro á fin de obtener la hora sideral de la observacion, siendo h positivo al Oeste y negativo al Este del meridiano.

Si designamos ahora por t la hora del cronómetro, correspondiente al instante de la observacion, y por $\triangle t$ la correccion que necesita, tendrémos: $T = t + \triangle t$, y en consecuencia:

$$\Delta t = T - t \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La correccion $\triangle t$ se considerará positiva si el cronómetro está atrasado, puesto que en tal caso su indicacion t será menor que la hora real T; y negativa si está adelantado.

Lo anterior supone que se haga uso de un cronómetro sideral; pero si fuere solar, se convertirá la hora T en tiempo medio (pág. 247) para hacerla comparable con la de aquel instrumento.

Ejemplo.—El 17 de Diciembre de 1861 hice con sextante y cronómetro solar las siguientes observaciones de la estrella α *Orionis* al Este del meridiano en un lugar cuya latitud es $\phi = 19° 25' 53.''5$:

CRONOMETRO.	SEXTANTE.	
$9^h\ 24^m\ 8^s.7$	$97°\ 35'\ 10''$	Termóm^o libre $t = 5.°0$
„ 25 20.5	98 9 50	Termóm^o fijo.. $\tau = 7.5$
„ 26 14.3	98 35 15	Barómetro..... $p = 0^m.5^c0$
„ 27 21.0	99 5 10	Error inicial... $e_0 = 20.''0$
Promedios... $t = 9^h\ 25^m\ 46^s.12$	$98°\ 21'\ 21.''2$	

La suma de las demas correcciones del sextante era: $c = -32.''6$; y la posicion de la estrella: $a = 5^h\ 47^m\ 44^s.41$ y $\delta = +7°\ 22'\ 41''.4$.

Sextante.....	98° 21′ 21.″2				
$e_0 =$	— 20. 0				
$c =$	— 32. 6				
$2\,a =$	98 20 28. 6				
$a =$	49 10 14. 3				
$z' =$	40 49 45. 7	ρ.....	1.7029	$\phi =$	19° 25′ 53.″5
$r =$	+ 39. 8	b.....	9.8889	$\delta = +$	7 22 41. 4
$z =$	40° 50′ 25.″5	l.....	0.0082	$\phi - \delta =$	12° 3′ 12.″1
		f.....	0.0002		
		r.....	1.6002		
$\frac{1}{2}\,z =$	20° 25′ 12.″7				
$\frac{1}{2}\,(\phi - \delta) =$	6 1 36. 0				
$a =$	26 26 48. 7	sen.....	9.6487186		
$b =$	14 23 36. 7	sen.....	9.3954670		
			9.0441856		
		cos. ϕ.....	—9.9745291		
		cos. δ.....	—9.9963891		
$\frac{1}{2}\,h =$	—20° 7′ 27.″8				
$h =$	— $2^h\,40^m\,59^s.71$	sen.^{2} $\frac{1}{2}\,h$.....	9.0732674		
$a =$	5 47 44. 41				
		sen. $\frac{1}{2}\,h$.....	9.5366337		
$T =$	$3^h\ 6^m\ 44^s.70$				
$A =$	17 45 28. 36	Ascension recta del sol medio.			
$T - A =$	9 21 16. 34				
red. $(T-A) =$	— 1 31. 95	Tabla de la pág. 249.			
$H =$	$9^h\ 19^m\ 44^s.39$	Hora media.			
$t =$	9 25 46. 12	Hora cronométrica.			
$\Delta\,t =$	— $6^m\ 1^s.73$	Correccion del cronómetro.			

Cuando se observa una estrella al Oeste del meridiano, no ofrece mas diferencia el cálculo respecto del anterior, que la del signo positivo del ángulo horario, el cual por tanto se suma con la ascension recta para hallar la hora sideral correspondiente. Se ha dicho ya que la conversion de esta en hora media es indispensable cuando se usa un cronómetro solar, y aunque la reduccion no presenta dificultad alguna, se comprende desde luego que bajo el aspecto de la brevedad del cálculo, hay ventaja en servirse de un cronómetro sideral, puesto que su indicacion es inmediatamente comparable con la hora T.

183.—En las observaciones del sol se verifica lo contrario po razones análogas, y especialmente por la de que el resultado del cálculo suministra directamente la hora verdadera si está el sol al Oeste; y

si está al Este se obtiene la hora astronómica verdadera, restando de 24^h el ángulo horario que da el cálculo. En seguida no queda mas que convertirla en hora media con ayuda de la ecuacion del tiempo, y compararla con la indicacion del cronómetro solar para hallar la correccion de este. Así, pues, designando por H la hora media real y por E la ecuacion del tiempo, la expresion $H = h + E$ remplaza á la última de las fórmulas (1), y por consiguiente la correccion del cronómetro será:

$$\Delta t = H - t = h + E - t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

expresion en que se sustituye $24^h - h$ en lugar de h, cuando se haya observado el sol al Este.

La determinacion de la hora por observaciones solares me parece, sin embargo, algo mas laboriosa que por medio de las estrellas, no solo por ser preciso tomar en cuenta la paralaje de distancia zenital y aun el semidiámetro, si es que no se observa mas que uno de los bordes, sino principalmente por la necesidad de interpolar la declinacion del astro para el instante de la observacion. Como esta hora es precisamente la incógnita del problema, resulta que es necesario proceder por aproximaciones sucesivas de este modo: siendo t la hora del cronómetro y Δt la correccion que se le supone, $t + \Delta t$ representará aproximadamente la hora media local, y $H' = t + \Delta t + L$ la correspondiente del primer meridiano. Para el momento H' se calcula la declinacion del sol (vease el núm. 154), y con este y los demas datos se procede al cálculo de h y por consiguiente de Δt; mas si este valor resulta muy diferente del que se supuso al principio, será preciso repetir el cálculo haciendo uso de la correccion Δt determinada por el primero para hallar la hora media del primer meridiano é interpolar con mas exactitud la declinacion. Por otra parte, esta coordenada nunca varia con mucha rapidez, de suerte que si se conoce la correccion del cronómetro con aproximacion de 1^m ó 2^m, lo cual casi siempre es fácil, no habrá necesidad de repetir el cálculo por ser suficientemente exacto el resultado del primero, pues se recordará la poca influencia de un pequeño error de la declinacion en el ángulo horario de un astro cuando se observa con un azimut considerable.

184.—Puede tambien eliminarse la correccion por el semidiámetro

observando los dos limbos del sol alternativa ó sucesivamente; porque siendo proporcional al tiempo el movimiento ascensional del astro, el promedio de las distancias zenitales de los bordes dará la del centro correspondiente al término medio de las horas. Siempre he acostumbrado á seguir este procedimiento tomando, con graduaciones equidistantes del instrumento angular, varias alturas ó distancias zenitales del primer limbo (el superior al Este y el inferior al Oeste), y volviendo á hacer que el instrumento señale las mismas indicaciones para observar el segundo.

Ejemplo. El 8 de Enero de 1863 hice de esa manera las siguientes observaciones con un cronómetro solar en una estacion (Chapultepec) cuya posicion es próximamente $\phi = 19° 25' 15''$ y..... $L = 6^h 36^m 39^s$.

ANGULO HORARIO DEL SOL AL OESTE DEL MERIDIANO.

Limbo inferior.	*Sextante.*	*Limbo superior.*	
$3^h 31^m 3^s.0$.....	48° 30'.....	$3^h 33^m 55^s.0$	Termómetro libre..... 16.°5
„ 31 29.0	48 20	„ 34 20.5	„ fijo..... 16. 0
„ 31 55.0	48 10	„ 34 48.0	Barómetro..... $0^m.587$
„ 32 21.5	48 00	„ 35 15.0	Error inicial..... 6.''2
„ 32 48.5.....	47 50.....	„ 35 41.0	
9 37.0		23 59.5	
$3^h 31^m 55^s.4$		$3^h 34^m 47^s.9$	

El promedio de las horas $t = 3^h 33^m 21^s.65$ es la del paso del centro del sol por la distancia zenital correspondiente á la indicacion media $G = 48° 10'$ del sextante. Suponiendo al cronómetro un atraso de $3^m 3^s$ respecto del tiempo medio local, se halla $H' = 10^h 13^m 4^s$ por hora media contemporánea de Greenwich, y con ella la declinacion $\delta = -22° 13' 4.''0$ del sol, y $E = +7^m 4^s.78$ por ecuacion del tiempo.

Sextante.....	48° 10' 00''	ρ..... 2.1139	π..... 0.9542
$e_0 =$	$-$ 6. 2	b..... 9.8867	sen. z..... 9.9605
$c =$	$-$ 25. 0	l..... 9.9895	
$2a =$	48 9 28. 8	f..... 9.9995	p..... 0.9147
$a =$	24 4 44. 4	r..... 1.9896	

		$\phi =$	19° 25' 15''
$z' =$	65° 55' 15.''6	$\delta =$	$-$22 13 4
$r =$	$+$ 1 37. 6	$\phi - \delta =$	41° 38' 19''
$p =$	$-$ 8. 2		
$z =$	65° 56' 45''		

$\frac{1}{2}\,z = 32°\ 58'\ 22.''5$
$\frac{1}{2}\,(\phi - \delta) = 20\ 49\ 9.\ 5$

$a = 53°\ 47'\ 32''$ ..... sen..... 9.9068090
$b = 12\ 9\ 13$ ..... sen..... 9.3233209

9.2301299
cos. ϕ..... —9.9745586
cos. δ..... —9.9664953

$\frac{1}{2}\,h = 26°\ 10'\ 26.''9$
$h = 3^h\ 29^m\ 23^s.\ 59$.....(Hora verdadera) 9.2890760
$E = +\ 7\ \ 4.\ 78$
sen. $\frac{1}{2}\,h$..... 9.6445380

$H = 3^h\ 36^m\ 28^s.\ 37$
$t = 3\ 33\ 21.\ 65$

$\Delta\,t = +\ 3^m\ 6^s.\ 72$

El resultado del cálculo comprueba la suficiente exactitud de la primera hipótesis $3^m\ 3^s$, y por consiguiente es inútil repetirlo; porque el pequeño cambio de declinacion del sol en $3^s.7$ que hay de diferencia respecto del atraso supuesto, no influye en manera alguna en el valor de h.

185.—Cuando se halle una diferencia notable entre el valor supuesto de $\triangle\,t$ y el calculado, me parece que corregir el primer resultado es preferible á repetir toda la operacion. Puede procederse, al efecto, de esta manera: hallamos al principio de este Capítulo el coeficiente diferencial de h respecto de δ, que es el siguiente, expresando la variacion d h en segundos de tiempo.

$$\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,\delta} = \frac{1}{15}\left(\frac{\text{tan. }\phi}{\text{sen. }h} - \frac{\text{tan. }\delta}{\text{tan. }h}\right)$$

Llamando ahora c la correccion supuesta al cronómetro, y c' la que resulta del cálculo, consideremos que d δ representa la variacion de declinacion en el tiempo $c' - c$. Si, pues, designamos por v su movimiento horario, se tendrá:

$$\mathrm{d}\,\delta = \frac{v\,(c' - c)}{3600}$$

Sustituyendo este valor en el de d h y despejando, resulta:

$$\mathrm{d}\,h = \frac{v\,(c' - c)}{15 \times 3600}\left(\frac{\text{tan. }\phi}{\text{sen. }h} - \frac{\text{tan. }\delta}{\text{tan. }h}\right)$$

y como $h + \mathrm{d}\,h$ representa el ángulo horario correcto, la verdadera correccion del cronómetro será:

$$\Delta t = c' + (5.26761)\,(c' - c)\,v\,\left(\frac{\text{tan. }\phi}{\text{sen. }h} - \frac{\text{tan. }\delta}{\text{tan. }h}\right) \ldots\ldots\ldots (4)$$

fórmula en la cual se ha introducido el logaritmo de la constante, y que calculada con logaritmos de cuatro ó cinco decimales, da el valor correcto de $\Delta\, t$ con mas facilidad que por la repeticion del primer cálculo. Es claro que los valores de δ y h que entran en ella son los mismos de la primera resolucion, y que puede tomarse por v la variacion horaria que consta en las Efemérides del sol para el dia de la observacion, sin que sea necesario interpolarla para el instante de esta. En lo que sí es preciso mucho cuidado es en el juego de los signos.

186.—Para la determinacion de la hora, como para todas las demas operaciones astronómicas, es preferible en general servirse de un instrumento fijo, tal como un círculo y especialmente un altazimut. Habiéndose explicado ya en otras partes de esta obra el manejo de esos instrumentos, solo añadiré que pueden usarse ó repitiendo las medidas de las distancias zenitales y haciendo tantas lecturas diferentes del ángulo y del tiempo cuantas sean las veces que se vise el astro con la interseccion de los hilos de la retícula, ó bien fijando el instrumento en una graduacion conveniente y anotando las horas del cronómetro en los instantes en que el astro, en virtud de su movimiento, pasa por cada uno de los hilos horizontales del telescopio. Este último método es mas cómodo, pues solo hay necesidad de ir variando gradualmente el azimut del telescopio por medio del tornillo de aproximacion del círculo horizontal, á fin de que el astro pase por los hilos horizontales cerca de su interseccion con el vertical del centro. Esta precaucion tiene por objeto evitar el error que podria originarse de la falta de horizontalidad perfecta de los hilos, aunque ya se ha indicado (pág. 91) el modo de comprobarla.

Sea cual fuere el método de observacion que se adopte, es muy conveniente medir las distancias zenitales en las dos posiciones del círculo, para eliminar el efecto de la colimacion vertical, segun se ha dicho en la pág. 425 del primer Tomo. Sin embargo, si se ha determinado previamente este error, puede emplearse el instrumen-

to en una sola posicion, aplicando á sus indicaciones la correccion constante correspondiente. Tambien es preciso no olvidar la otra correccion que proviene del nivel paralelo al círculo.

Por vía de ejercicio presentaré algunos datos y los principales resultados para que el lector los compare con los que obtenga al desarrollar todo el cálculo.

Ejemplo 1º—El 24 de Agosto último (1869) hice en México las siguientes observaciones con cronómetro solar y un teodolito astronómico que daba distancias zenitales con el círculo vertical á la derecha y alturas á la izquierda. En ambas posiciones se observaron los pasos de los dos limbos del sol por cada uno de los tres hilos horizontales de la retícula, con el fin de eliminar la correccion del semidiámetro. Las lecturas fueron: á la derecha, $b = 49° 17' 10''$ y á la izquierda, $a = 39° 29' 50''$, cada una de las cuales es promedio de dos vernieres.

	A la derecha.	A la izquierda.	NIVEL.	
			OCULAR.	OBJETIVO.
Limbo inferior....	$3^h 22^m 00^s.0$	$3^h 27^m 22^s.0$		
,,	22 44.0	,, 28 5.0	15.0	13.0
,,	23 27.5	,, 28 49.5	14.5	12.5
Limbo superior...	,, 24 14.5	,, 29 35.5		
,,	24 58.5	,, 30 18.5	Barómetro á 0°.....	$0.^m586$
,,	25 41.5	,, 31 3.0	Termómetro libre...	23.°0

Siendo de $15''$ el valor angular de cada division del nivel, deberá hallarse:

$$z' = 45° + \tfrac{1}{2}(b - a) + \tfrac{1}{4}\left((o + o') - (e + e')\right) v = 49° 53' 55''$$

y tomando $8.''6$ por paralaje del sol, resultará:

$$z = z' + r - p = 49° 54' 39.''2$$

La declinacion del sol, calculada para la hora de la observacion, era $\delta = +10° 52' 30.''8$, la ecuacion del tiempo $E = +2^m 00^s.66$ y la latitud del lugar, $\phi = 19° 26' 10''$. Con estos datos se encontrará:

Hora verdadera..... $V = h = 3^h 24^m 30^s.57$
Correccion del cronómetro..... $\Delta t =$ -0.39

Ejemplo 2º—Con los propios instrumentos observé en la noche de ese mismo dia la estrella α *Bootis* al Oeste. Su posicion era:

$$\alpha = 14^h\ 9^m\ 41^s\ 52 \qquad \delta = +\ 19°\ 52'\ 14.''8$$

A la derecha.	A la izquierda.	NIVEL.
$7^h\ 29^m\ 17^s\ 5$	$7^h\ 32^m\ 32^s\ 5$	OCULAR. OBJETIVO.
,, 30 2. 5	,, 33 16. 2	16.5 12.0
,, 30 46. 2	,, 34 00. 0	16.5 12.0
		Barómetro á 0°..... 0^m586
$b = 50°\ 7'\ 32.''5$	$a = 39°\ 9'\ 32.''5$	Termómetro libre..... 19.°0

Los principales resultados serán:

$$z = 50°\ 30'\ 26.''3 \qquad h = +\ 3^h\ 35^m\ 29.^s41$$
$$H = 7^h\ 31^m\ 39^s\ 31 \qquad \Delta t = +\ 0.11$$

Ejemplo 3º—El 7 de Enero de 1863 obtuve en Chapultepec (Log. $= 6^h\ 36^m\ 39^s$ y lat. $= 19°\ 25'\ 15''$) los siguientes datos, observando los dos limbos del sol al Este del meridiano: $z = 64°\ 49'\ 13.''4$ y $t = 8^h\ 40^m\ 36^s.50$. Contando el tiempo astronómicamente, se tendrá por fecha el 6 de Enero á $t = 20^h\ 40^m\ 36^s.50$ del cronómetro. Para el instante de la observacion se halló $\delta = -\ 22°\ 23'\ 13.''8$ y..... $E = +\ 6^m\ 31^s.96$.

Con estos elementos deberá encontrarse:

Angulo horario.....	$h = -\ 3^h\ 22^m 52^s.60$	$V = 20^h\ 37^m\ 7.40$
Hora verdadera.....	$V = 20\ 37\ 7.40$	$E = +\ 6\ 31.96$
Correccion del cronómetro, ...	$\Delta t = +\ 3\ 2.86$	$T = 20\ 43\ 39.36$
		$t = 20\ 40\ 36.50$
		$\Delta t = 3^m\ 2^s.86$

Recomiendo mucho al lector la resolucion de todos los ejemplos con arreglo á los tipos de cálculo que ántes se han presentado, pues esta es la única manera de adquirir la práctica indispensable para las aplicaciones.

187.—Es sumamente difícil, y casi puede decirse imposible, que los cronómetros y los péndulos, aun los de mejor construccion, marchen exactamente de acuerdo con el tiempo que están destinados á medir. Por lo general siempre adelantan ó atrasan diariamente algunos segundos, de manera que es enteramente indispensable determinar con frecuencia su correccion absoluta $\triangle t$ con el fin de dedu-

cir su variacion en la unidad de tiempo, ya sea esta el dia ó la hora. La variacion ó marcha de los guarda-tiempos no ofrece inconveniente alguno en las aplicaciones ni puede reputarse como un defecto de los instrumentos, con tal de que sea sensiblemente uniforme; porque tomándola en cuenta, siempre es posible saber la correccion absoluta que es necesario hacer á sus indicaciones en cualquiera instante. Es ciertamente ventajoso que sea pequeña la variacion de un guarda-tiempo en atencion á que los cálculos se abrevian algo de esa manera; pero lo mas esencial es la constancia en el adelanto ó atraso diario, aunque sea considerable numéricamente.

La marcha en la unidad de tiempo se determina hallando las correcciones Δt_1 y Δt_2 en dos momentos t_1 y t_2, pues designándola por v, se tendrá.

$$v = \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{t_2 - t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Segun que el denominador exprese dias ú horas, se obtendrá por esta fórmula la variacion diaria ú horaria. Las dos primeras aplicaciones del número precedente indican, por ejemplo, que el cronómetro tenia la correccion $\Delta t_1 = -0^s.39$ cuando su indicacion era $t_1 = 3^h.26^m$ próximamente, y que en seguida se le halló $\Delta t_2 = +0^s.11$ cuando señalaba $t_2 = 7^h\ 32^m$ con poca diferencia. Refiriéndose ambas correcciones al mismo dia, se ve que el tiempo trascurrido fué de $4^h\ 6^m = 4^h.1$, y en consecuencia su variacion horaria era:

$$v = \frac{0^s.11 + 0^s.39}{4.1} = +0^s.122$$

La marcha diaria seria $0^s.122 \times 24 = +2^s.93$. El mismo resultado se hallaria expresando en dias el tiempo trascurrido, que es $t_2 - t_1 = 0^d.1708$, y entónces:

$$v = +\frac{0^s.50}{0.1708} = +2^s.93$$

El signo positivo de v indica que el cronómetro atrasa respecto del tiempo medio real: cuando resulta negativo da á conocer que adelanta en la unidad de tiempo.

Con el fin de determinar con mas precision el valor de v debe pro-

curarse que sea grande el denominador de la fórmula, porque así se fraccionan mas los pequeños errores que tengan las correcciones absolutas $\triangle t_1$ y $\triangle t_2$.* El cronómetro á que me refiero tenia en aquella época una marcha diaria de mas de 3^s, y se ve que la produce algo menor el cálculo hecho con las determinaciones de su correccion en un intervalo de algunas horas solamente. El 21 de Agosto, por ejemplo, á $t_1 = 3^h\ 22^m$ tenia un adelanto de $9^s.67$, y el 24 del mismo mes á $7^h\ 32^m$, un atraso de $0^s.11$. Haciendo el cálculo con estos datos y expresando en dias el tiempo trascurrido, resulta:

$$v = \frac{0.11 + 9.67}{3.17} = + 3^s.09$$

Los cronómetros suelen sufrir irregularidades en su marcha aunque se manejen con el mayor cuidado y sin exponerlos á movimientos rápidos ni á cambios bruscos de temperatura. Por eso es indispensable determinar cada dos ó tres dias, si es posible, su correccion absoluta, y con mas frecuencia aún, si se tiene motivo para temer la influencia de alguna causa de alteracion. De ese modo puede admitirse sin error sensible que es uniforme su marcha en el intervalo de una á otra observacion; y entónces se podrá calcular su correccion absoluta en cualquiera instante intermedio. Sea, en efecto, t_1 el momento en que se haya determinado la correccion $\triangle t_1$ y llamemos v la variacion hallada para la unidad de tiempo. Cuando el instrumento señale la hora t habrá trascurrido respecto de aquel instante una duracion $t - t_1$, y en consecuencia su correccion á la hora t, será:

$$\Delta t = \Delta t_1 + (t - t_1)\, v \qquad \ldots\ldots (6)$$

expresando la duracion $t - t_1$ en la misma unidad á que se refiera v.

Ejemplo.—¿Cuál será la hora exacta cuando un cronómetro señala $t = 4^h\ 25^m\ 19^s.2$, teniendo un adelanto diario de $11^s.4$ y habiéndose hallado 2 dias 9 horas ántes que atrasaba $7^m\ 32^s.35$ respecto del tiempo real?

$$\begin{array}{rl} \Delta t = + & 7^m\ 32^s.35 \\ -2.375 \times 11.4 = - & 27.07 \\ \hline \Delta t = + & 7^m\ \ 5^s.28 \\ t = & 4\ \ 25\ \ 19.20 \\ \hline \textbf{Hora exacta} = & 4^h\ 32^m\ 24^s.48 \end{array}$$

* Esto es que ~~[illegible]~~ no debe ser corto el intervalo ~~[illegible]~~ $t_2 - t_1$ ni tan grande que produzca irregularidades por irregularidades en el intermedio

188.—El sol es casi el único de los astros que tienen disco y paralaje apreciables que se emplea para la determinacion de la hora, y aun cuando su observacion no ofrezca dificultad alguna, juzgo de la mayor importancia consignar aquí un nuevo método de observarlo, que se debe á Mr. Quetelet y que presenta grandes ventajas respecto del procedimiento comun. Consiste en sacar un poco el tubo del ocular del telescopio hasta que comiencen á verse con vaguedad los hilos de su retícula. Entónces sucederá que dirigido el telescopio hácia el sol, y poniendo delante del ocular una hoja de papel ó de carton, podrán verse en él tanto las imágenes de los hilos como la del astro. Por consiguiente, estando fijo el círculo en la graduacion conveniente, se observarán con la mayor comodidad y exactitud los instantes en que los limbos del sol son tangentes á los hilos, para anotar las horas correspondientes del cronómetro. Esta manera de observar á la vez que mas fácil, tiene tambien la ventaja de que amplificada así la imágen del astro y dándole la intensidad que se quiera para que no fatigue la vista, permite apreciar los instantes de los contactos de los hilos con los bordes con mas seguridad que por medio de la vision directa. Se comprende por supuesto que la retícula debe hallarse en el foco estelario del objetivo, lo mismo que en el método ordinario, pues de otra manera no podrian pintarse en el mismo plano las imágenes del sol y de los hilos.

El fundamento de este procedimiento proviene de que alejando el ocular de la retícula, en vez de formar una imágen virtual hácia adelante, la forma real hácia atras. En consecuencia, sacando mas ó ménos el tubo del ocular, se puede acercar ó alejar el plano en que se pintan las imágenes, y el observador es dueño de elegir de esa manera la distancia que juzgue mas á propósito para obtenerlas de la amplitud é intensidad convenientes, sin necesidad de la interposicion de un helioscopio. En todos casos es muy poco lo que debe sacarse el ocular.

Como los rayos directos del sol al caer sobre el carton ó el papel molestarian la vista, y acaso impedirian ver con claridad las imágenes, debe ponerse cerca del ocular ó en el objetivo del telescopio un disco de carton que los intercepte. De ese modo solo se reciben en la hoja de papel los rayos que han pasado por el interior del telescopio y que son los que producen las imágenes.

CAPITULO VIII.

DETERMINACION DE LA HORA.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

189.—Las consecuencias que se deducen del análisis hecho al principio del Capítulo precedente respeto de las mejores condiciones en que conviene observar un astro con el fin de hallar la hora, me condujeron á encontrar un procedimiento de observacion, que reuniendo todas las indicaciones de aquel análisis, presentase ademas la ventaja de eliminar completamente del resultado las distancias zenitales medidas, y en consecuencia los errores que podrian afectarlas. Este procedimiento, ampliamente desarrollado, consta en las secciones I y II del primer Capítulo de mis "*Nuevos Métodos astronómicos*," y á esta obra puede ocurrir el lector en busca de mas detalles; pues aquí solo me limitaré á exponer su parte práctica.

Consiste el nuevo procedimiento en observar dos estrellas elegidas de manera que lleguen á la misma distancia zenital á horas poco diferentes, la una al Este y la otra al Oeste del meridiano, y en lo posible con un azimut considerable (próximo á 90°); en anotar las correspondientes indicaciones del cronómetro; y en servirse de estas, como únicos datos obtenidos por la observacion, para determinar la correccion que necesiten.

Se comprende que no entrando como elemento en la resolucion del problema la distancia zenital comun á las dos estrellas, se evitan

tambien todas las operaciones preliminares para la preparacion de ese elemento, como son las relativas al cálculo de la refraccion y á las correcciones instrumentales; circunstancia que á su vez produce la ventaja de no hacer indispensables las indicaciones del barómetro y del termómetro, y la de permitir el uso de un instrumento incorrecto para practicar la observacion. Desarrollemos las sencillas fórmulas que resuelven el problema.

190.—Designando por h y δ respectivamente el ángulo horario y la declinacion de la estrella occidental, y por h' y δ' los mismos elementos de la oriental, se tienen las dos ecuaciones:

$$\cos. z = \text{sen. } \phi \text{ sen. } \delta + \cos. \phi \cos. \delta \cos. h$$
$$\cos. z = \text{sen. } \phi \text{ sen. } \delta' + \cos. \phi \cos. \delta' \cos. h'$$

de las que resulta por diferencia:

$$\tan. \phi \, (\text{sen. } \delta - \text{sen. } \delta') = \cos. \delta' \cos. h' - \cos. \delta \cos. h$$

Descomponiendo ambos miembros en factores, esta ecuacion puede escribirse así: (*)

$$2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \cos. \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \tan. \phi = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\cos. \delta' - \cos. \delta)(\cos. h' + \cos. h) \\ +\tfrac{1}{2}(\cos. \delta' + \cos. \delta)(\cos. h' - \cos. h) \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de las sumas y diferencias de los cosenos, se halla:

$$\text{sen } \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \tan \phi = \begin{cases} \text{sen } \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \text{ sen } \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \cos \tfrac{1}{2}(h + h') \cos \tfrac{1}{2}(h - h') \\ +\cos \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \text{ sen } \tfrac{1}{2}(h + h') \text{ sen } \tfrac{1}{2}(h - h') \end{cases}$$

Dividiendo toda la ecuacion por $\cos. \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \cos. \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(h - h')$, y haciendo para abreviar:

$$\left.\begin{aligned} \tan. \psi &= \tan. \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \tan. \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \cot. \tfrac{1}{2}(h - h') \\ \gamma &= \frac{\tan. \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \tan. \phi}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(h - h')} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

se hallará sin dificultad alguna:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}(h + h') + \tan. \psi \cos. \tfrac{1}{2}(h + h') = \gamma$$

(*) En general, la diferencia $m' n' - m n$ de dos productos siempre puede ponerse bajo la fórmula. $m' n' - m n = \tfrac{1}{2}(m' - m)(n' + n) + \tfrac{1}{2}(m' + m)(n' - n)$.

Expresemos ahora la semisuma y la semidiferencia de los dos ángulos horarios en funcion de las horas anotadas en el cronómetro. Designando para esto por a y a' las ascensiones rectas de las estrellas occidental y oriental respectivamente; por t y t' las horas cronométricas de las observaciones; y por $\triangle t$ y $\triangle t'$ sus correspondientes correcciones, tendrémos que las horas siderales exactas, serán:

$$T = t + \Delta t$$
$$T' = t' + \Delta t'$$

y por consiguiente los ángulos horarios:

nº 121 pag. 237

$$h = t + \Delta t - a$$
$$h' = t' + \Delta t' - a'$$

Llamando ε su semisuma y θ su semidiferencia algebraicas, se obtendrá:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(h + h') &= \varepsilon = \tfrac{1}{2}(t + t') + \tfrac{1}{2}(\Delta t + \Delta t') - \tfrac{1}{2}(a' + a) \\ \tfrac{1}{2}(h - h') &= \theta = \tfrac{1}{2}(t - t') + \tfrac{1}{2}(\Delta t - \Delta t') + \tfrac{1}{2}(a' - a) \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

con lo cual la última de las ecuaciones (1) se convierte en la siguiente:

$$\text{sen. } \varepsilon + \text{tan. } \psi \text{ cos. } \varepsilon = \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Esta ecuacion es la que se trata de resolver para hallar el valor de ε, pues todas las demas cantidades son conocidas. El valor de θ ó $\frac{1}{2}(h - h')$ se compone de la diferencia de las ascensiones rectas y de la de las horas cronométricas, corregida por la pequeña cantidad $\frac{1}{2}(\triangle t - \triangle t')$, que representa la variacion del cronómetro en el intervalo $\frac{1}{2}(t - t')$. Luego que se haya determinado el valor de ε, la primera de las ecuaciones (2) dará á conocer la correccion del cronómetro.

Multiplicando ahora la ecuacion (3) por cos. ψ, resulta:

$$\text{sen. } \varepsilon \text{ cos. } \psi + \text{cos. } \varepsilon \text{ sen. } \psi = \gamma \text{ cos. } \psi$$

que equivale á la expresion:

$$\text{sen. } (\varepsilon + \psi) = \gamma \text{ cos. } \psi$$

En consecuencia, si representamos por ω la suma $\varepsilon + \psi$, tendrémos:

$$\text{sen. } \omega = \gamma \cos. \psi = \frac{\tan. \frac{1}{2} (\delta - \delta') \tan. \phi \cos. \psi}{\text{sen. } \theta} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

y una vez calculado este ángulo, se obtiene:

$$\varepsilon = \omega - \psi \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

191.— Las ecuaciones precedentes contienen toda la resolucion del problema. Reunamos por su órden las fórmulas que deben calcularse para que se comprenda mejor todo el procedimiento.

Las letras sin acento corresponden á la estrella occidental y las acentuadas á la oriental

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \frac{1}{2} (t - t') + \frac{1}{2} (\Delta t - \Delta t') + \frac{1}{2} (a' - a) \\ \tan. \psi = \tan. \frac{1}{2} (\delta - \delta') \tan. \frac{1}{2} (\delta + \delta') \cot. \theta \\ \text{sen. } \omega = \dfrac{\tan. \frac{1}{2} (\delta - \delta') \tan. \phi \cos. \psi}{\text{sen. } \theta} \\ \varepsilon = \omega - \psi \\ \frac{1}{2} (\Delta t + \Delta t') = \frac{1}{2} (a' + a) + \varepsilon - \frac{1}{2} (t + t') \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

El valor de θ, convertido en arco, permitirá el cálculo de ψ y el de ω. Con esto queda ε determinada en arco; mas reducida á tiempo y sustituida en la última fórmula, da á conocer la semisuma de las correcciones del cronómetro, la cual representa evidentemente su correccion en el instante medio $\frac{1}{2} (t + t')$ entre las horas á que se hayan observado las dos estrellas.

Por tratarse de observaciones de estrellas, todo el cálculo se ha desarrollado en la hipótesis de que sea sideral el cronómetro cuyas indicaciones son t y t'; pero si fuese solar, se convertirá en tiempo sideral la duracion $\frac{1}{2} (t - t') + \frac{1}{2} (\Delta t - \Delta t')$ por medio de la Tabla de la pág. 248. De este modo el valor de ε expresará tambien tiempo sideral, y será preciso convertir en hora media (pág. 247) la sideral $\frac{1}{2} (a' + a) + \varepsilon$ para hacerla comparable con las indicaciones del cronómetro, si este es solar.

La marcha $\frac{1}{2} (\Delta t - \Delta t')$ solo tiene valor apreciable cuando es de alguna consideracion el intervalo de tiempo $t - t'$ que trascur-

re de una observacion á la otra, ó bien cuando el cronómetro tiene una fuerte variacion diaria. Por esta circunstancia, y especialmente por las ventajas que resultan de terminar toda la operacion en poco tiempo, es de importancia escoger bien el momento en que conviene observar las dos estrellas que se hayan combinado con este objeto. Verémos despues que esto es siempre muy fácil; y por ahora presentemos una aplicacion de este método, que indudablemente es mas sencillo de lo que parece á primera vista.

Ejemplo.—En un lugar (S. Luis Potosí) cuya latitud es 22° 9′ 00″ y cuya longitud es de $6^h\ 43^m\ 49^s$, hice el 28 de Abril de 1867 las siguientes observaciones con sextante y un cronómetro solar que atrasaba cosa de 0.ˢ1 por hora.

γ^1 *Leonis* al O.		Sextante.	*a Bootis* al E.	
9^h	$47^m\ 50.^s5$	128° 00′	10^h	$1^m\ 54.^s0$
,,	48 33. 5	127 40	,,	1 10. 2
,,	49 17. 2	127 20	,,	0 27. 7
,,	50 00. 5	127 00	9	59 44. 5
,,	50 44. 0	126 40	,,	59 1. 5
,,	51 28. 0	126 20	,,	58 18. 5
,,	52 11. 5	126 00	,,	57 36. 0
Promedios..... $t =$	$9^h\ 50^m\ 00.^s74$	127° 00′	$t' =$	$9^h\ 59^m\ 44.^s63$

Se ve por estos datos que en ménos de un cuarto de hora se tomaron 7 alturas de cada estrella de 20′ en 20′ del sextante. Tambien se notará que las horas relativas á la estrella oriental crecen en el órden de las graduaciones del sextante, y se han escrito invertidas á fin de que cada una corresponda á la misma altura que la estrella occidental, la cual se observó primero. Las posiciones de las estrellas eran:

γ^1 *Leonis*..... $\alpha = 10^h\ 12^m\ 39.^s33$..... $\delta = +\ 20°\ 30'\ 38.''3$
a Bootis..... $\alpha' = 14\ 9\ 37.58$..... $\delta' = +\ 19\ 52\ 19.\ 9$

Apliquemos las fórmulas (6) omitiendo la marcha del cronómetro, por ser inapreciable en el corto intervalo trascurrido de una observacion á otra.

$\frac{1}{2}(t-t') = -\ 0^h\ 4^m\ 51^s.95$ tan. $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$..... 7.74408+ ..... 7.74408+
Acel. = —0. 80 tan. $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$..... 9.56559+ tan. ϕ... 9.60967+
$\frac{1}{2}(a'-a) =$ 1 58 29. 13 cot. θ..... 0.26702+ cos. ψ... 0.00000+
sen. θ... —9.67728+

$\theta = \begin{cases} 1^h\ 53^m\ 36^s.38 \\ 28°\ 24'\ 5.''7 \end{cases}$ tan. ψ..... 7.57669+ sen. ω... 7.67647+

$-\psi = -\ 0°\ 12'\ 58.''2+$
$\omega = 0\ 16\ 19.\ 2+$

$\frac{1}{2}(a'+a) = 12^h\ 11^m\ 8^s.45$
$\varepsilon = +0'\ 3'\ 21.''0$ ..... $\varepsilon = +\ 13.\ 40+$

Hora sideral = 12 11 21. 85
A corregida p.ª el lugar $A = -\ 2\ 25\ 3.72$
9 46 18. 13
Red. $(T-A) = -\ 1\ 36.05$
Hora media = $9^h\ 44^m\ 42^s.08$
$\frac{1}{2}(t+t') =$ 9 54 52. 68
$\frac{1}{2}(\Delta t+\Delta t') = -10^m\ 10^s.60$

En este ejemplo, habiéndose observado primero la estrella occidental, resulta negativo el valor de $\frac{1}{2}(t-t')$ y por eso se consideró con el mismo signo su reduccion á tiempo sideral; pero nótese que de una ú otra manera esta reduccion ó aceleracion aumenta el valor numérico de los intervalos de tiempo medio.

192.— El análisis de este método, hecho en la obra que cité al principio, conduce á las reglas siguientes para la eleccion de las dos estrellas que deben formar cada combinacion. 1ª Las mejores estrellas son las zenit-ecuatoriales (las que culminan entre el ecuador y el zenit), porque pueden observarse cerca del primer vertical. De consiguiente en las regiones intertropicales conviene elegir estrellas cuyas declinaciones no excedan de 30° á 40°. En nuestro país podrán tomarse por límites de declinacion desde 45° Norte hasta 25° Sur, sin ningun inconveniente. 2ª Se procurará que la diferencia de declinaciones de las dos estrellas que formen cada combinacion, ó sea cada par, no exceda de 15° ó 20° cuando mas, debiendo ser la de ascensiones rectas de 4^h á 8^h, y en general la que sea necesaria para que puedan observarse cómodamente ambas estrellas, la una al Este y la otra al Oeste del meridiano en poco tiempo. 3ª Las estrellas de cada par deberán ser próximamente de la misma magnitud, para que sus imágenes se presenten con el mismo brillo en el telescopio, y se tenga igual seguridad en las observaciones.

En mis "Nuevos Métodos" consta una Tabla (pág. 288) que contiene 48

combinaciones de estrellas notables por su brillo y propias para la aplicacion de este método de observacion. Pondré en seguida un extracto de aquella Tabla con dos pares de estrellas para cada mes del año.

PARES DE ESTRELLAS PROPIAS PARA DETERMINAR LA HORA

POR EL MÉTODO DE ALTURAS IGUALES.

Números.	AL ESTE.	AL OESTE.	hora sideral a que las estr. adq. la misma altura	ÉPOCA. ×	Log. $\frac{d\tau}{d\phi}$
1	β *Geminorum.*	α *Andromedæ.*	3h 49	Enero 3	5.2160+
2	β *Geminorum,*	α *Arietis.*	4 47	,, 17	7.7581—
3	β *Geminorum.*	β *Tauri.*	6 27	Febrero 12	6.5461+
4	α *Leonis.*	α *Tauri.*	7 18	,, 24	7.5820+
5	α *Leonis.*	α *Orionis.*	7 49	Marzo 4	7.9688+
6	β *Leonis.*	γ *Geminorum.*	9 7	,, 24	7.1241+
7	α *Bootis.*	γ *Geminorum.*	10 18	Abril 11	7.4453—
8	α *Bootis.*	β *Geminorum.*	10 57	,, 21	7.8945+
9	α *Bootis.*	γ^1 *Leonis.*	12 12	Mayo 10	6.9546+
10	α *Coronæ.*	δ *Leonis.*	13 17	,, 26	7.8833—
11	α *Ophiuchi.*	α *Leonis.*	13 45	Junio 3	5.6003—
12	α *Ophiuchi.*	β *Leonis.*	14 38	,, 16	7.4316+
13	α *Ophiuchi.*	α *Bootis.*	15 55	Julio 6	8.0786+
14	α *Aquilæ.*	α *Bootis.*	17 6	,, 23	8.0752+
15	α *Aquilæ.*	α *Serpentis.*	17 39	Agosto 1	7.3599—
16	ε *Pegasi.*	α *Serpentis.*	18 35	,, 15	7.3805—
17	α *Pegasi.*	α *Herculis.*	20 3	Setiemb. 7	5.6817+
18	α *Andromedæ.*	α *Lyræ.*	21 15	,, 25	8.0395+
19	α *Arietis.*	α *Ophiuchi.*	21 37	Octubre 1	7.8993—
20	α *Arietis.*	α *Aquilæ.*	22 42	,, 17	8.1369—
21	α *Ceti.*	α *Aquilæ.*	23 25	,, 28	7.6321+
22	α *Ceti.*	α *Pegasi.*	0 23	Noviem. 11	7.7951+
23	α *Aurigæ.*	α *Cygni.*	0 52	,, 19	6.9130—
24	α *Tauri.*	α *Pegasi.*	1 42	Diciemb. 2	7.2671—
25	β *Tauri.*	α *Andromedæ.*	2 40	,, 16	6.1572—

dτ y dφ están considerados en minutos de tpo. y arco respectivo

× hacia la cual cada par de estrellas adquiere la misma altura á las 9h medias

La cuarta columna contiene las horas siderales á las que las estrellas de cada par tienen la misma altura, la una al Oriente y la otra al Occidente del meridiano. Este dato designado por τ en la Tabla, es de mucha importancia para prepararse á la observacion; porque sabiendo la hora á que las dos estrellas llegan á la misma altura simultáneamente, puede escogerse el momento favorable para observarlas, teniendo presente que despues de aquella hora no se puede ya comenzar la operacion, puesto que la estrella oriental continuará ascendiendo y la occidental descendiendo. Es, pues, indispensable principiar ántes; y estimando en 5^m ó 6^m el tiempo que

demanda la observacion de cada estrella, y en otro tanto el que se necesita para preparar el instrumento, para visar la segunda, &c., creo que no será prudente comenzar despues de $\tau - 5^m$; porque de otra manera habrá peligro de perder la observacion de la segunda estrella. Es evidente, por supuesto, que puede principiarse todo el tiempo que se quiera ántes de esa hora; pero la doble observacion durará algo mas.

La hora τ está calculada por las mismas fórmulas (6) con la condicion de la simultaneidad, á saber $t = t'$, y suprimiendo las correcciones del cronómetro, puesto que se trata de determinar la hora sideral exacta, que será en consecuencia:

$$\tau = \tfrac{1}{2}(a' + a) + \omega - \psi$$

y como el valor de ω depende tambien de la latitud de la estacion, lo he calculado para $\phi = 24°$, que puede considerarse como la latitud media de la República. Para cualquiera otra latitud..... $\phi' = 24° + \triangle\phi$, se tendrá:

$$\tau' = \tau + \frac{d\tau}{d\phi}\triangle\phi$$

Los logaritmos de $\frac{d\tau}{d\phi}$ constan en la última columna de la Tabla, y por tanto es muy fácil hallar la hora de la igual altura simultánea para cualquiera otra latitud; porque introduciendo en esta fórmula el valor de $\triangle\phi$ en minutos, se obtendrá la correccion correspondiente tambien en minutos de tiempo. Calculemos, por ejemplo, la hora τ' para la latitud del lugar en que se hicieron las observaciones del núm. 191, y que se refieren al 9° par de la Tabla. Se tiene:..... $\triangle\phi = 22°\ 9' - 24° = -111'$.

$\frac{d\tau}{d\phi}$	6.9546+	
$\triangle\phi$	2.0453—	$\tau = 12^h\ 12^m$
	8.9999—	—0. 1
		$\tau' = 12^h\ 11^m.9$

193.—Por esta aplicacion se comprenderá que las mas veces puede prescindirse de la correccion, á no ser que tenga varios grados

el valor de $\triangle \phi$, ó que sea muy considerable el logaritmo de su coeficiente; porque nunca es preciso conocer con mucha precision el valor de τ, atendido el uso á que está destinado. Cuando se emplea para las observaciones un cronómetro solar, se convertirá τ en hora media, de la cual se deduce fácilmente la cronométrica si se conoce la correccion aproximativa de aquel instrumento. Verificándose así, en nuestro ejemplo, se halla que la hora media correspondiente á $\tau = 12^h\ 12^m$ es $H = 9^h\ 45^m$; y teniendo el cronómetro unos 10^m de adelanto, seria próximamente $9^h\ 55^m$ su indicacion en el instante de la igual altura simultánea de las dos estrellas. Por eso se principió la observacion cosa de 7^m ántes de esa hora.

La quinta columna de la Tabla suministra un dato que tambien sirve para formarse una idea de la hora mas avanzada á la cual puede comenzarse la observacion. Con el título de "Epoca" consta en la columna mencionada la fecha hácia la cual cada par de estrellas adquiere igual altura simultáneamente á las 9^h de la noche (tiempo medio); y como la hora sideral avanza cada dia cerca de cuatro minutos ($3^m 93$) respecto de la media, sabrémos que n dias despues de la "Epoca" las estrellas correspondientes llegarán simultáneamente á la misma altura á la hora media $9^h - 3^m 93\ n$. Si n se refiere á una fecha anterior á la de la Tabla, es claro que se tomará $9^h + 3^m 93\ n$ por hora media de la igualdad de alturas. En nuestro ejemplo la "Epoca" que corresponde al par núm. 9 es el 10 de Mayo; en consecuencia se tendrá $n = -12$ para el 28 de Abril, dia de la observacion, y así:

$$H = 9^h + 3^m 9 \times 12 = 9^h\ 47^m$$

que con el adelanto supuesto da $9^h\ 57^m$ próximamente por hora cronométrica de la altura igual y simultánea.

Cuando no se conoce ni aun aproximadamente el estado del cronómetro tampoco podrá aplicarse ninguno de los anteriores procedimientos; pero en tal caso se determina la hora conveniente para la observacion calculando el valor aproximativo de la distancia zenital comun á las dos estrellas en el instante τ. En efecto, siendo entónces $h = \tau - \alpha$ y $h' = \tau - \alpha'$ sus ángulos horarios, podrá calcularse z por las fórmulas (3) de la pág. 239, á saber:

$$\text{tan. } M = \frac{\text{tan. } \delta}{\text{cos. } h} \qquad \text{cos. } z = \frac{\text{sen. } \delta}{\text{sen. } M} \text{ cos. } (M - \phi)$$

Hagamos el cálculo para α *Bootis* con logaritmos de tres ó cuatro decimales, que es lo bastante para el objeto.

$r = 12^h\ 12^m$
$a = -\ 14\ 10$

$h = \begin{cases} -1^h\ 58^m \\ -29°\ 30' \end{cases}$

$\tan \delta$..... 9.5580
$\cos.\ h$.....—9.9397

$\tan.\ M$..... 9.6183

$M = 22°\ 33'$
$\phi = 22\ \ 9$

$M - \phi = 0°\ 24'$

$\text{sen.}\ \delta$..... 9.5814
$\cos.\ (M - \phi)$..... 0.0000
$\text{sen.}\ M$.....—9.5838

$\cos.\ z$..... 9.9476

$z = 27°\ 35'$

El mismo resultado daria la otra estrella con poca diferencia. Por consiguiente, siendo sextante el instrumento de que se hizo uso, su indicacion debia ser $G = 2\ (90° - z) = 124°\ 50'$ para la igualdad de altura simultánea. Ya con este dato y sin referencia alguna al cronómetro, cuya correccion se supone enteramente desconocida, sabrémos que si se da principio á la observacion con la estrella oriental, deberá ser con una graduacion del sextante menor que 125°, y por el contrario, algo mayor si se comienza con la occidental, como se hizo en efecto.

Es evidente que todos estos cálculos aproximativos para prepararse á observar, no son útiles mas que el primer dia en que se observe un par, puesto que en los siguientes la indicacion del instrumento angular ó la del cronómetro son suficientes para apreciar la hora conveniente, no olvidando que si el guarda-tiempo es solar deberá anticiparse cada dia unos 4^m. Por otra parte, el objeto de los mismos cálculos es únicamente el de emplear poco tiempo en la operacion; pero repito que puede comenzarse mucho ántes de la hora r, sin mas desventaja que la de ocupar mas tiempo, pues si la primera estrella se observa m minutos ántes de r, la otra llegará á la misma altura m minutos despues próximamente, de suerte que en toda la operacion se empleará el tiempo $2\ m$.

194.—Cuando se tiene necesidad de determinar la hora con alguna frecuencia, es útil bajo diversos conceptos servirse de los mismos pares de estrellas, y aun observarlas á las mismas alturas por todo el tiempo en que cómodamente sea posible hacerlo. Para esto notemos que como el tiempo sideral adelanta cosa de 2^h por mes respecto del solar, resulta que un mes ántes de su "Epoca", cada par de estrellas llegará á su igual altura simultánea hácia las 11^h de la noche,

y por el contrario, un mes despues la tendrá á eso de las 7^h. Por consiguiente, observando entre las 7^h y las 11^h, podrá emplearse durante dos meses cualquiera de las combinaciones de la Tabla.

Las ventajas de proceder así provienen en primer lugar, y segun se ha dicho, de la facilidad de hacer las observaciones conociendo de antemano las indicaciones aproximativas de los instrumentos; en segundo de que si por algun accidente solo puede observarse una de las estrellas de la combinacion, se tendrá lo bastante con este único dato para determinar el estado del cronómetro; y en tercer lugar de que toda observacion completa suministra los medios de hallar el error del instrumento angular que se emplee.

En efecto, puede admitirse sin error apreciable que durante cuatro ó cinco dias son constantes las coordenadas de una estrella, y que por consiguiente tendrá cada dia la misma altura á la misma hora sideral. Segun esto, la diferencia de las indicaciones del cronómetro dividida por el número de dias trascurridos desde la última observacion completa, da á conocer con suficiente precision su marcha diaria si el instrumento es sideral; y si es solar, llamando d la diferencia mencionada y n el número de dias, se tiene:

$$v = \frac{d}{n} - 3^m\ 55^s.91 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

puesto que $3^m\ 55^s.91$ representa el atraso diario del tiempo medio respecto del sideral. Por ejemplo, el 30 de Abril de 1867 solo pude hacer la observacion siguiente de α *Bootis*, habiendo perdido la de γ^1 *Leonis* á causa de la interposicion de las nubes:

	α Bootis al Este.	*Sextante.*
	$9^h\ 49^m\ 50^s.0$	$126°\ 00'$
	„ 50 53.5	126 30
	„ 51 57.7	127 00
	„ 53 1.0	127 30
	„ 54 5.5	128 00
Promedios.....	$t' = 9^h\ 51^m\ 57^s.54$	$127°\ 00'$

Como el dia 28 se habia obtenido $t' = 9^h\ 59^m\ 44^s.63$ observando

la estrella á la misma altura, resulta $d = 7^m\ 47^s.09$, y por consiguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,d &= \quad 3^m\ 53^s.54 \\ \text{Const.} &= -\ 3\ \ 55.91 \\ \hline v &= -\quad\ \ 2^s.37 \end{aligned}$$

Este procedimiento supone, á la verdad, que en las dos observaciones sean iguales la refraccion y el estado del instrumento. Lo primero es sensiblemente exacto, siempre que no sea considerable la distancia zenital de la estrella; y en cuanto á lo segundo, si se nota algun cambio en el error inicial, en las indicaciones de los niveles, &c., puede tomarse en cuenta introduciendo pequeñas correcciones en el valor de d. A este fin es fácil calcular el tiempo que invierte la estrella para ascender ó descender $1''$ por la simple comparacion de las indicaciones del instrumento angular con las correspondientes del cronométrico. Así, por ejemplo, en la última observacion de *a Bootis*, restando una de otra las dos indicaciones extremas, y teniendo en cuenta que el sextante da alturas dobles, se ve que la estrella empleó $4^m\ 15^s.5$ en ascender $1°$, y por consiguiente..... $\frac{255^s.5}{3600''} = 0^s.071$ por cada segundo. Esta será, pues, la cantidad que multiplicada por el número de segundos que haya de diferencia en las alturas suministrará la correccion de d, que se le aplicará con el signo que convenga.

195.—El error del instrumento de que se haga uso puede determinarse por medio de cualquiera observacion completa, si se cuenta con barómetro y termómetro para calcular el valor de la refraccion. En efecto, puesto que la observacion da la correccion del cronómetro independientemente de la lectura angular del clisímetro, se infiere que el observador puede calcular en seguida las horas exactas á las cuales tomó las alturas iguales; determinar estas aplicando las fórmulas (3) de la página 239; y finalmente, comparar el resultado con la indicacion del instrumento angular atendiendo al efecto de la refraccion. Sea z la distancia zenital calculada por aquellas ecuaciones y r la refraccion: la distancia zenital aparente será $z - r$, que comparada con la lectura del clisímetro, previas las correcciones conocidas por el estado de los niveles, por el error inicial &c., da por diferencia la correcion de este instrumento, ó con mas propiedad, la del punto de

la graduacion correspondiente al promedio de las lecturas. Suponiendo que se trate de un sextante, sea G la lectura media, e_0 el error inicial y $\triangle G$ la correccion que se va á determinar. La graduacion correcta, ó sea la doble altura aparente será, pues:..... $G + \triangle G - e_0$, y en consecuencia la distancia zenital aparente tiene por expresion $90° - \frac{1}{2}(G + \triangle G - e_0)$, que igualada á $z - r$, produce:

$$\triangle G = 2\,(90° + r - z) - (G - e_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Es claro que $\triangle G$ representa el efecto resultante de todos los errores que puede tener el instrumento, como son el de excentricidad, el que proviene de la falta de paralelismo entre el telescopio y el limbo, &c.; pero es tambien el que mas importa conocer con la práctica, y bajo este punto de vista, el método anterior para determinar las correcciones, sea acaso preferible por mas sencillo al que se ha expuesto en la pág. 312 y siguientes, si bien este último es superior como tipo de investigacion individual de todas las causas de error.

Determinemos el error del sextante que usaba yo en 1867 valiéndonos de los datos del núm. 191. Pueden calcularse desde luego los ángulos horarios, puesto que las fórmulas (6) dan la semisuma ε y la semidiferencia θ.

$h = T - \alpha = t + \Delta t - \alpha$

$\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}(t + \Delta t - \alpha) \quad \frac{1}{2}(h - h') = \theta$

$\frac{1}{2}h' = \frac{1}{2}(t' + \Delta t' - \alpha') \quad \frac{1}{2}(h + h') = \varepsilon$

$\frac{1}{2}(h - h') = \varepsilon = 0°\ 3'\ 21.''0$

$\frac{1}{2}(h + h') = \theta = 28\ 24\ 5.\ 7$

hor. al Oeste $= h = +28°\ 27'\ 26.''7$ hor. Este $= h' = -28°\ 20'\ 44.''7$

tan. δ.....	9.5729835	sen. δ.....	9.5445409
cos. h.....	—9.9440736	cos. $(M - \phi)$.....	9.9999464
tan M.....	9.6289099	sen. M.....	—9.5927743
$M = 23°\ 3'\ 00.''9$		cos. z.....	9.9517130
$\phi = 22\ 9\ 00.\ 0$			
$M - \phi = 0°\ 54'\ 00.''9$		$z = 26°\ 31'\ 14.''5$	

tan. δ'.....	9.5581095	sen. δ'.....	9.5314390
cos. h'.....	—9.9445313	cos. $(M' - \phi)$.....	9.9999978
tan. M'.....	9.6135782	sen. M'.....	—9.5797239
$M' = 22°\ 19'\ 49.''6$		cos. z.....	9.9517129
$\phi = 22\ 9\ 00.\ 0$			
$M' - \phi = 0°\ 10'\ 49.''6$		$z = 26°\ 31'\ 14.''6$	

Esta es la distancia zenital verdadera: atendiendo á este elemento y á las indicaciones de los instrumentos meteorológicos á la hora de la observacion, hallé por valor de la refraccion, $r = 22.''5$. Ademas, el error inicial era aquella noche $e_0 = 1'\ 50.''0$, por lo cual se tendrá:

$$\begin{aligned} 2\,(90° + r - z) &= 126°\ 58'\ 16'' \\ G - e_0 &= 126\ \ 58\ \ 10 \\ \Delta\, G &= \qquad\quad + 6'' \end{aligned}$$

Se obtiene, pues, por este ejemplo la correccion de $+ 6''$ para el punto $127°\ 00'$ del sextante; porque esta fué la graduacion media del instrumento al observar las dos estrellas. Es claro que deben repetirse las determinaciones de $\Delta\, G$ con el fin de obtener un promedio independiente de los pequeños errores accidentales.

De igual manera pueden hallarse las correcciones para cada 10° ó para cada 20° de la graduacion, desde el punto 30° ó 40° hasta el 120° ó 130°; y entónces por interpolacion se determinan para cualquiera indicacion del instrumento. Tambien se construye para mayor sencillez una curva con las graduaciones por absisas y los valores hallados de $\Delta\, G$ por ordenadas, de la cual se toma gráficamente la correccion que corresponde á cualquiera absisa. En esta clase de construcciones conviene mucho exagerar las dimensiones de las ordenadas para obtenerlas con mas precision por medio de la escala. Así, por ejemplo, si en el eje de las absisas se representan 10° por $0^m.01$, se podrán tomar las ordenadas de manera que cada segundo de $\Delta\, G$ quede representado por $0^m.001$.

196.—Ademas de las enunciadas, hay otra ventaja en servirse de los mismos pares de estrellas, la cual consiste en que por algun tiempo puede suponerse constante la parte de las ecuaciones (6) que depende de las posiciones de las estrellas y de la latitud. Así, haciendo:

$$C = \text{tan.}\ \tfrac{1}{2}\,(\delta - \delta')\ \text{tan.}\ \tfrac{1}{2}\,(\delta + \delta') \qquad\qquad D = \text{tan.}\ \tfrac{1}{2}\,(\delta - \delta')\ \text{tan.}\ \phi$$

los valores de tan. ψ y sen. ω serán:

$$\text{tan.}\ \psi = C\ \text{cot.}\ \theta \qquad\qquad \text{sen.}\ \omega = D\,\frac{\text{cos.}\ \psi}{\text{sen.}\ \theta}$$

Si, pues, se calculan las cantidades C y D con las posiciones cor-

respondientes al dia de la "Epoca" del par, no habrá por lo general inconveniente en emplear los mismos valores durante los dos meses en que aquel puede observarse entre las 7^h y las 11^h de la noche, lo que facilita considerablemente los cálculos.

197.—En muchas de las combinaciones que constan en nuestra Tabla se verifica que es pequeña la diferencia de declinaciones de las dos estrellas, la cual si no excede de un grado ó de grado y medio, permite una simplificacion importante en las fórmulas (6), pues tomando los arcos pequeños por sus senos y tangentes y la unidad por sus cosenos, se reducirán á la siguiente la segunda, la tercera y la cuarta de aquellas ecuaciones:

Como en tan φ del prod. de dos cantidades que consideramos en el caso estremo pequeñas $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$ y $\frac{1}{2}(h-h')=\theta$: podemos poner $\tan\phi=\phi$ $\cos\phi=1$

$$\epsilon = (8.5229)\,(\delta-\delta')\left(\frac{\tan.\,\phi}{\text{sen.}\,\theta} - \frac{\tan.\,\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\tan.\,\theta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

En esta, $\delta - \delta'$ expresa segundos de arco, y la constante es el logaritmo de $\frac{1}{30}$, pues se ha dividido por 15 el segundo miembro con el objeto de que ϵ resulte desde luego en segundos de tiempo. El cálculo es extremadamente sencillo con esta simplificacion aplicable á todas las combinaciones en que $\delta - \delta'$ no sea mayor que 1° 30′, segun se ha dicho.

198.—Cuando el método de alturas iguales se aplique con altazimut ú otro clisímetro provisto de niveles, importa atender á las indicaciones de estos á fin de tomar en cuenta la pequeña diferencia que puede producirse en la posicion del telescopio respecto de la vertical. A la verdad, durando la observacion tan poco tiempo y procurando no tocar el telescopio, puesto que el instrumento se dirige de una á otra estrella por medio del movimiento del círculo azimutal, es en general admisible que no varie la posicion del anteojo respecto del nivel. Puede suceder, sin embargo, que no sea exactamente vertical la columna del instrumento, en cuyo caso al pasar de una situacion á otra variarán las lecturas del nivel, aunque no se haya alterado la posicion de este relativamente al telescopio; mas como de una ú otra manera el estado del nivel indica que la línea de colimacion no forma exactamente los mismos ángulos con el horizonte, veamos cómo se corrigen por esta causa las observaciones. Llamando o y e respectivamente las lecturas ocular y objetiva de los extremos de la burbuja al observar la estrella occidental, o'

y e' las indicaciones semejantes que se refieren á la oriental, v el valor angular de sus divisiones y z la distancia zenital que se supone tiene el telescopio, sus distancias zenitales verdaderas son:

Al observar la estrella oriental..... $z_1 = z + \frac{1}{2}(o' - e')\,v$
Al observar la estrella occidental..... $z_2 = z + \frac{1}{2}(o - e)\,v$

Si designamos por t_1 y t_2 las horas anotadas en el cronómetro, y por s', s los tiempos que invierten las estrellas en elevarse ó descender 1″, las horas que corresponden á la igualdad real de alturas y que por consiguiente son las que deben entrar en el cálculo de las fórmulas (6), son:

$$\left.\begin{aligned} t' &= t_1 + \tfrac{1}{2}(o' - e')\,v\,s' \\ t &= t_2 - \tfrac{1}{2}(o - e)\,v\,s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Las cantidades s' y s se determinan, como se ha dicho al fin del núm. 194, por la comparacion del arco recorrido con el tiempo empleado en recorrerlo. Se procede exactamente como se explicó allí, siempre que el telescopio, provisto de un solo hilo horizontal, se haya ido colocando sucesivamente en graduaciones equidistantes para observar los pasos de las estrellas por sus diversas posiciones. Este modo de operar no es, sin embargo, el mas conveniente, tanto por ser molesto, cuanto porque pueden cometerse pequeños errores al poner las indicaciones del círculo, los cuales darian por resultado la falta de igualdad de alturas, condicion esencial del método; y por eso es mucho mejor hacer uso de varios hilos horizontales en la retícula con intervalos iguales, de 4′ á 6′. Entónces, fijando el telescopio con su tornillo de presion, sea cual fuere la indicacion del círculo, se observa el paso de la primera estrella por todos los hilos, y se procede lo mismo con la segunda despues de haberle dirigido el telescopio en virtud del movimiento azimutal del instrumento. En tal caso la determinacion de s' y s supone conocido el espacio angular que abrazan los hilos extremos; pero esto se consigue fácilmente ya sea midiéndolo por la diferencia de lecturas del círculo cuando aquellos se hacen coincidir con un objeto distante ó con la retícula de un colimador, ya sea observando una mira dividida puesta á una distancia dada y calculando el ángulo visual de la parte interceptada por los hilos. (Vease el Tomo primero, pág. 261 y 275).

En el Capítulo siguiente presentaré algunas observaciones hechas con altazimut de la manera que acaba de explicarse y que indudablemente es la mas exacta, terminando este con otro ejemplo de alturas iguales observadas con sextante, á fin de que el lector se familiarice con la aplicacion de las fórmulas (6).

El 9 de Mayo de 1867 observé las estrellas siguientes con los mismos instrumentos á que se refiere el ejemplo detallado del número 191.

α Bootis al Este.	Sextante.	*α Leonis* al Oeste.
$8^h\ 44^m\ 00^s.5$	$112°\ 00'$	$9^h\ 18^m\ 43^s.5$
„ 45 5.0	112 30	„ 17 37.0
„ 46 10.0	113 00	„ 16 31.5
„ 47 15.0	113 30	„ 15 26.0
„ 48 18.5	114 00	„ 14 18.5
„ 49 23.5	114 30	„ 13 13.5
„ 50 27.5	115 00	„ 12 9.5
„ 51 33.0	115 30	„ 11 2.0
„ 52 38.0	116 00	„ 9 55.0
$t' = 8^h\ 48^m\ 19^s.00$	$114°\ 00'$	$t = 9^h\ 14^m\ 19^s.61$

La posicion del lugar era $\phi = 22°\ 9'$, $L = 6^h\ 43^m\ 49^s$ próximamente, y las de las estrellas:

α Bootis..... $a' = 14^h\ 9^m\ 37^s.62$ $\quad \delta' = +19°\ 52'\ 32.''1$
α Leonis..... $a = 10\ 1\ 18.18$ $\quad \delta = +12\ 36\ 47.\ 8$

Atendiendo á estos elementos, se ve que $\delta - \delta'$ es negativa. El cálculo será por consiguiente:

$\frac{1}{2}(t-t') =$ $0^h\ 13^m\ 00^s.31$	tan. $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$... 8.80250—	.....	8.80250—
Acel. = 2.14	tan. $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$... 9.46444	tan. ϕ...	9.60967
$\frac{1}{2}(a'-a) = 2\ 4\ 9.72$	cot. θ..... 0.16611	cos. ψ...	9.99984
$\theta = \begin{cases} 2^h\ 17^m\ 12^s.17 \\ 34°\ 18'\ 2.''5 \end{cases}$	tan. ψ..... 8.43305—	sen. θ...	—9.75092
		sen. ω...	8.66109—

$\psi = -1°\ 33'\ 9.''5$
$\omega = -2\ 37\ 35.0$
$\varepsilon = -1°\ 4'\ 25.''5$

$\frac{1}{2}(a'+a) =$	$12^h\ 5^m\ 27^s.90$
=	$-\ 4\ 17.70$
Hora sideral =	$12\ 1\ 10.20$
$A =$	$3\ 8\ 25.82$
	$8\ 52\ 44.38$
Red. $(T-A) =$	$-\ 1\ 27.28$
Hora media =	$8^h\ 51^m\ 17^s.10$
$\frac{1}{2}(t+t') =$	$9\ 1\ 19.31$
$\frac{1}{2}(\Delta t+\Delta t') =$	$-\ 10^m\ 2^s.21$

199.—La determinacion de la hora puede hacerse tambien observando una sola estrella á la misma altura á uno y otro lado del meridiano. En este caso, puesto que se tiene $a = a'$ y $\delta = \delta'$, será nulo el valor de ε, y por tanto las fórmulas (6) se reducen á la siguiente:

$$\tfrac{1}{2}(\Delta t + \Delta t') = a - \tfrac{1}{2}(t + t') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Se ve que de esta manera toda la operacion consiste en comparar el promedio de las indicaciones del cronómetro sideral con la ascension recta de la estrella. Si es solar el guarda-tiempo, se calculará la hora media correspondiente á la sideral a, quiere decir, se hallará la hora media del tránsito de la estrella por el meridiano (pág. 251), y con esta se comparará la indicacion del cronómetro.

En lo relativo al cálculo, este método no puede ser mas sencillo; pero tiene el inconveniente de que demanda tres ó cuatro horas por lo ménos, para terminar la observacion. En una duracion tan considerable es fácil que sufra alguna variacion el instrumento, ó bien que se produzcan cambios en el estado de la atmósfera, los cuales podrian originar la pérdida de la observacion occidental, correspondiente á la oriental, ó que al ménos alterarian el poder refringente del aire, y en tal caso las alturas aparentemente iguales, no lo serian en realidad. Por todas estas razones me parece preferible la aplicacion de mi método general de dos estrellas, cuya principal ventaja consiste en la brevedad con que se termina la operacion.

CAPITULO IX.

DETERMINACION DE LA HORA.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DEL SOL.

200.—Anotando las indicaciones de un cronómetro solar en los instantes en que el centro del sol adquiere la misma altura al Este y al Oeste del meridiano, es fácil deducir la hora que señalaria en un momento intermedio; y como por otra parte, puede calcularse la hora media correspondiente al mismo instante, resulta que la comparacion de esta con la hora cronométrica dará á conocer el error del guarda-tiempo.

Tal es el fundamento de este método para determinar la hora. Antes de desarrollar el sencillo cálculo que demanda, notemos que la declinacion del sol varia con mucha lentitud y de una manera sensiblemente uniforme, por lo ménos cuando se adopta por movimiento horario el que corresponde á un instante intermedio del espacio de tiempo á que se refiere el cambio de declinacion (pág. 286). De esta consideracion se deduce que el momento de la culminacion del sol debe diferir muy poco del correspondiente á la mitad del intervalo trascurrido entre las dos observaciones, al que seria exactamente igual sin la variacion de la declinacion, segun se ha visto al fin del Capítulo precedente refiriéndonos á la doble observacion de una sola estrella. Se infiere tambien que el cambio que sufre la declinacion desde la hora de la primera observacion hasta la del tránsito meridiano del astro, es sensiblemente igual al que tiene lugar entre esta última hora y la de la segunda observacion; de suerte que si designamos por n la variacion total entre la primera observacion y la segunda, y por δ la declinacion del sol en el instante de su tránsito, tendrémos que será $\delta - \frac{1}{2} n$ á la hora de la primera observacion y $\delta + \frac{1}{2} n$ á la hora de la segunda. Segun esto, llamando θ el ángulo horario del sol al Oriente y $\theta + 2\varepsilon$ al Occidente del meri-

diano, se tendrán las relaciones siguientes en los instantes de las observaciones.

$$\cos.\ z = \text{sen.}\ \phi\ \text{sen.}\ (\delta - \tfrac{1}{2}\, n) + \cos.\ \phi \cos.\ (\delta - \tfrac{1}{2}\, n) \cos.\ \theta$$
$$\cos.\ z = \text{sen.}\ \phi\ \text{sen.}\ (\delta + \tfrac{1}{2}\, n) + \cos.\ \phi \cos.\ (\delta + \tfrac{1}{2}\, n) \cos.\ (\theta + 2\,\varepsilon)$$

las que desarrolladas y atendiendo á que por ser muy pequeños n y $2\,\varepsilon$ pueden omitirse sus productos y sus segundas potencias, se convierten en las siguientes:

$$\cos.\ z = \text{sen.}\ \phi\ \text{sen.}\ \delta - \tfrac{1}{2}\, n\ \text{sen.}\ \phi \cos.\ \delta + \cos.\ \phi \cos.\ \delta \cos.\ \theta + \tfrac{1}{2}\, n \cos.\ \phi\ \text{sen.}\ \delta \cos.\ \theta$$
$$\cos.\ z = \text{sen.}\ \phi\ \text{sen.}\ \delta + \tfrac{1}{2}\, n\ \text{sen.}\ \phi \cos.\ \delta + \cos.\ \phi \cos.\ \delta \cos.\ \theta - \tfrac{1}{2}\, n \cos.\ \phi\ \text{sen.}\ \delta \cos.\ \theta$$
$$- 2\,\varepsilon \cos.\ \phi \cos.\ \delta\ \text{sen.}\ \theta$$

Restando una de otra y despejando, se halla:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\, n \left(\frac{\text{tan.}\ \phi}{\text{sen.}\ \theta} - \frac{\text{tan.}\ \delta}{\text{tan.}\ \theta} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Siendo ahora T' y T las lecturas del cronómetro en las observaciones oriental ó *antemeridiana* y occidental ó *postmeridiana;* $\triangle\ T'$ y $\triangle\ T$ sus correcciones, y M la hora media á medio diá verdadero, se tiene en tiempo medio:

$$\theta = M - (T' + \triangle\ T')$$
$$2\,\varepsilon + \theta = T + \triangle\ T - M$$

de donde resulta:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\,(T - T') + \tfrac{1}{2}\,(\triangle\ T - \triangle\ T') - \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$
$$\tfrac{1}{2}\,(\triangle\ T + \triangle\ T') = M + \varepsilon - \tfrac{1}{2}\,(T + T') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Se ve por esta última ecuacion que la cantidad ε es la correccion que debe sufrir M para obtener la hora media exacta correspondiente á la cronométrica $\frac{1}{2}\,(T + T')$, y por consiguiente su correccion $\frac{1}{2}\,(\triangle\ T + \triangle\ T')$ en ese instante.

Si llamamos v la variacion horaria de la declinacion del sol, calculada para la hora de su culminacion, y recordamos que n representa el cambio en el intervalo $T - T'$, se halla: $n = (T - T')\,v$. Sustituyendo este valor y dividiendo por 15 el de ε para que resulte en segundos de tiempo, tendrémos:

$$\varepsilon = \frac{\tfrac{1}{2}\,(T - T')\,v}{15} \left(\frac{\text{tan.}\ \phi}{\text{sen.}\ \theta} - \frac{\text{tan.}\ \delta}{\text{tan.}\ \theta} \right)$$

Esta cantidad es siempre tan pequeña, que no hay inconveniente en suprimirla en el valor de θ, lo mismo que la marcha del cronómetro en el intervalo $\frac{1}{2}(T - T')$, á no ser esta excepcionalmente grande. Omitiéndolas, en consecuencia, se tendrán las siguientes fórmulas para determinar la correccion del cronómetro:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \tfrac{1}{2}(T - T') \\ \varepsilon &= \frac{\theta\, v}{15}\left(\frac{\text{tan. } \phi}{\text{sen. } \theta} - \frac{\text{tan. } \delta}{\text{tan. } \theta}\right) \\ \tfrac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') &= M + \varepsilon - \tfrac{1}{2}(T + T') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

201.—El método de alturas iguales del sol se emplea desde hace mucho tiempo, y por eso he desarrollado directamente las fórmulas que se aplican; pero tambien puede considerarse como un caso particular de mi método general de alturas iguales, y por consiguiente deducirlas de las ecuaciones (6) del Capítulo precedente. Desde luego reflexionemos que siendo de 1′ próximamente el mayor movimiento horario del sol en declinacion, se podrá aplicar la fórmula mas sencilla del núm. 197, que es:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{30}(\delta - \delta')\left(\frac{\text{tan. } \phi}{\text{sen. } \theta} - \frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\text{tan. } \theta}\right)$$

y en la cual δ y δ' representan las declinaciones de las dos estrellas. En el caso del sol he representado por $\delta - \frac{1}{2}n$ y $\delta + \frac{1}{2}n$ sus declinaciones al Este y al Oeste respectivamente, por lo que la diferencia y la semisuma que figuran en la última ecuacion se convertirán en n y δ. De esta manera se obtiene desde luego la fórmula (1), aunque ya resulta ε en segundos de tiempo.

Respecto del ángulo θ en las ecuaciones ántes citadas, si se omite la pequeña correccion originada por la marcha del cronómetro, podrá escribirse así:

$$\theta = \tfrac{1}{2}(t - a) - \tfrac{1}{2}(t' - a')$$

y si llamamos T y T' las horas de un cronómetro solar correspondientes á las siderales t y t', se tiene: $T = t - a$ y $T' = t' - a'$, de donde resulta para el caso del sol:

$$\theta = \tfrac{1}{2}(T - T')$$

que es el mismo valor obtenido directamente. Por último, la cantidad $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ de las ecuaciones (6) del Capítulo precedente representa, en el caso de observaciones del sol, la ascension recta de este astro á la hora de su culminacion; mas como se ha supuesto el uso de un cronómetro solar, será preciso introducir la hora media M correspondiente á la sideral $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ en vez de esta última, con todo lo cual resulta como ántes:

$$\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') = M + \varepsilon - \frac{1}{2}(T + T')$$

202.—No obstante, la sencillez de las ecuaciones (4), se han simplificado todavía mas, formando Tablas de los valores:

$$A = \frac{T - T'}{30 \text{ sen. } \frac{1}{2}(T - T')} = \frac{\theta}{15 \text{ sen. } \theta}$$

$$B = \frac{T - T'}{30 \text{ tan. } \frac{1}{2}(T - T')} = \frac{\theta}{15 \text{ tan. } \theta}$$

con lo cual aquellas ecuaciones se convierten en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= A\, v \text{ tan. } \phi - B\, v \text{ tan. } \delta \\ \frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') &= M + \varepsilon - \frac{1}{2}(T + T') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

La Tabla IV que va al fin de este libro, contiene los logaritmos de A y B, de la cual se toman con el intervalo de tiempo $T - T'$ trascurrido de una observacion á la otra por argumento. Con esta modificacion, el cálculo es extremadamente sencillo.

203.— Antes de presentar algunas aplicaciones recordemos que como M representa la hora media á medio dia verdadero, se tiene (pág. 243): $M = E$, siendo E la ecuacion del tiempo, positiva desde el 25 de Diciembre hasta el 15 del mes de Abril siguiente, y desde el 15 de Junio hasta el 31 de Agosto. Por lo regular se expresa la hora M en tiempo medio civil, en cuyo caso se tendrá en general:

$$M = 12^{\text{h}} \pm E$$

tomando el signo positivo durante los períodos que se han expresado y el negativo en todo el resto del año.

El valor de v es positivo cuando la declinacion del sol va creciendo, entendiéndose el incremento en el sentido algebraico y no en el nu-

mérico, lo que tiene lugar desde el solsticio de invierno (hácia el 21 de Diciembre) hasta el de estío siguiente (hácia el 21 de Junio). Desde el 21 de Junio hasta el 21 de Diciembre es negativa la variacion horaria v.

La declinacion δ del sol es positiva cuando se halla este astro en el hemisferio boreal, quiere decir, desde el equinoccio de primavera (hácia el 21 de Marzo) hasta el de otoño (hácia el 21 de Setiembre). En todo el resto del año es negativa.

Atendiendo á la pequeñez del valor de ε, se comprende que basta hacer uso de valores puramente aproximativos de ϕ y de δ; y así es que al interpolar esta última cantidad por medio de las Efemérides para la hora del medio dia local, ó sea para la hora L del primer meridiano, siendo L la longitud de la estacion, no es preciso proceder como se ha explicado en la pág. 286, sino simplemente emplear un valor de L aproximado hasta la primera decimal de una hora. Así, por ejemplo, si se desea la declinacion del sol para el medio dia verdadero de México, que se verifica $6^h\ 36^m\ 28^s.6$ despues del de Greenwich, tomarémos $L = 6^h.6$; y siendo Δ la declinacion que dan las Efemérides para el medio dia verdadero de Greenwich y v su movimiento horario, se tendrá: $\delta = \Delta + 6^h.6\ v$.

Si se procediera con toda exactiutud, deberia calcularse v para la hora $\frac{1}{2}\ L$; mas no siendo necesario hacerlo así, se adoptará el valor de v interpolado para la hora L del primer meridiano, consiguiéndose así la ventaja de que se tiene desde luego la misma cantidad que debe entrar despues en los dos términos del valor (5) de ε.

En cuanto á la ecuacion del tiempo E, sí conviene interpolarla adoptando su variacion horaria para el instante $\frac{1}{2}\ L$, aunque son tan pequeños los cambios diarios de esta variacion, que por lo general no se cometeria error de importancia si se interpolara haciendo uso de la variacion que suministran directamente las Efemérides. Lo que no se debe olvidar es que tanto la ecuacion como la declinacion tienen que interpolarse con los elementos que da el Almanaque para el medio dia verdadero y no con los correspondientes al medio dia medio.

204.—Presentemos ahora algunas aplicaciones comenzando por una serie de observaciones hecha con sextante. En la ciudad de Rio Verde el 8 de Julio de 1863 tomé las siguientes alturas de los dos limbos del sol con las mismas indicaciones del instrumento.

	Observ. antemeridiana.	Sextante.	Observ. postmeridiana.
Limbo superior.....	$8^h\ 53^m\ 55.^s0$	$96°\ 00'$	$15^h\ 00^m\ 53.^s0$
	,, 54 16. 5	,, 10	,, 00 31. 0
	,, 54 38. 5	,, 20	,, 00 9. 0
	,, 55 0. 0	,, 30	14 59 47. 5
	,, 55 22. 0	,, 40	,, 59 26. 5
Limbo inferior.....	8 56 13. 0	$96°\ 00'$	14 58 35. 0
	,, 56 34. 5	,, 10	,, 58 13. 0
	,, 56 55. 5	,, 20	,, 57 52. 0
	,, 57 17. 0	,, 30	,, 57 29. 5
	,, 57 40. 0	,, 40	,, 57 7. 8
Promedios.....	$T' = 8^h\ 55^m\ 47.^s20$		$T = 14^h\ 59^m\ 00.^s43$

En la observacion postmeridiana ú occidental se cuentan 13^h, 14^h, 15^h, &c., en lugar de 1^h, 2^h, 3^h, &c., que indica el cronómetro, con el fin de que el promedio $\frac{1}{2}(T + T')$ indique desde luego la hora aproximativa del tránsito del sol, y la semidiferencia $\frac{1}{2}(T - T')$ el tiempo trascurrido.

Aunque el cálculo puede hacerse con los promedios T y T', es conveniente examinar la concordancia de los valores individuales de $\frac{1}{2}(T + T')$ para formarse idea de su grado de precision. En la serie anterior resulta:

	$\frac{1}{2}(T + T')$
Limbo superior.....	$11^h\ 57^m\ 24.^s00$
	,, ,, 23. 75
	,, ,, 23. 75
	,, ,, 23. 75
	,, ,, 24. 25
Limbo inferior.....	,, ,, 24. 00
	,, ,, 23. 75
	,, ,, 23. 75
	,, ,, 23. 25
	,, ,, 23. 90
Promedio general.....	$\frac{1}{2}(T + T') = 11^h\ 57^m\ 23.^s81$

La misma semisuma se habria obtenido con T y T'; pero tomando la de cada par de observaciones correspondientes, se descubre con facilidad alguna equivocacion que pueda haber en las horas, y se conoce tambien si debe desecharse alguno de los resultados individuales por muy discorde respecto de los demas.

Para aplicar las ecuaciones (5) tenemos que la posicion aproximativa de Rio Verde es: $\phi = 21°\ 56'$ y $L = 6^h\ 40^m.2 = 6^h.67$. Con este último dato se obtienen para el medio dia de aquella ciudad los elementos siguientes:

Declinacion del sol.....	$\delta = +\ 22°\ 29'\ 35''$
Variacion horaria.....	$v = -\ 16.''7$
Ecuacion del tiempo.....	$E = +\ 4^m\ 42.^s10$

y como las observaciones dan $T - T' = 6^h\ 3^m$ próximamente, tomemos con este argumento los logaritmos de A y de B de la Tabla IV. El cálculo será:

A.....	9.4523	B.....	9.2989	$M = 12^h + E =$	$12^h\ 4^m\ 42^s.10$
v.....	1.2227—	.....	1.2227—	$\varepsilon =$	$-\ 0.53$
tan. φ....	9.6049	tan. δ.....	9.6171		
	0.2799—		0.1387—	$M + \varepsilon =$	$12^h\ 4^m\ 41^s.57$
				$\frac{1}{2}(T + T') =$	$11\ 57\ 23.81$
	$-1^s.905$		$-1^s.376$	$\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') =$	$+\ 7^m\ 17^s.76$

205.—Pongamos otro ejemplo de observaciones practicadas con un altazimut pequeño. Con el fin de arreglar un péndulo tomé últimamente (Marzo 13 de 1870) las alturas de los dos limbos del sol, anotando las horas de sus tránsitos por los cinco hilos horizontales de la retícula. El telescopio permaneció fijo al círculo vertical despues de ejecutada la observacion antemeridiana hasta la hora de la postmeridiana, (*) y en ambas se tuvo cuidado de apuntar las indicaciones del nivel. En cuanto á las observaciones, están hechas por el método explicado en la pág. 336.

	A M.	*P M.*	SEMISUMAS.
Limbo superior.....	$10^h\ 15^m\ 59^s.5$	$13^h\ 45^m\ 42^s.0$	$12^h\ 00^m\ 50^s.75$
	,, 16 31.5	,, 45 9.7	,, ,, 50.60
	,, 17 5.5	,, 44 35.5	,, ,, 50.50
	,, 17 37.2	,, 44 3.2	,, ,, 50.20
	,, 18 7.5	,, 43 33.5	,, ,, 50.50
Limbo inferior.....	10 18 52.7	13 42 49.0	,, ,, 50.85
	,, 19 25.5	,, 42 15.2	,, ,, 50.35
	,, 19 59.7	,, 41 41.5	,, ,, 50.60
	,, 20 32.5	,, 41 9.5	,, ,, 51.00
	,, 21 3.0	,, 40 39.0	,, ,, 51.00
		Promedio general.....	$12^h\ 00^m\ 50^s.63$

Las lecturas del nivel fueron:

A M.		*P M.*	
O c.	*O b.*	*O c.*	*O b.*
25	31	22	33

y valiendo 8″ cada division, se tiene $n' = \frac{1}{2}(o' - e')\ v = -24''$

(*) Las voces *antemeridiana* y *postmeridiana* se designan generalmente haciendo uso de la abreviatura *A M* para la primera, y *P M* para la segunda.

en la observacion A M, y $n = \frac{1}{2}(o - e)\, v = -44''$ en la P M. Con el fin de tomar en cuenta estas inclinaciones corregirémos el promedio de las horas por las fórmulas del núm. 198. Las series de observaciones indican que el limbo superior empleó $2^m\ 8^s.0$ en la A M., y $2^m\ 8^s.5$ en la P M. para recorrer el espacio total de los hilos; y el inferior $2^m\ 10^s.3$ y $2^m\ 10^s.0$ respectivamente. (*) Tomando el término medio y atendiendo á que el espacio era de $23'\ 42''$, se halla que el sol invertia $s = \frac{129^s.2}{1422''} = 0^s.091$ en recorrer $1''$, y que por consiguiente la correccion del promedio general de las semisumas deberá ser $c = \frac{1}{2}(44 - 24)\, s = +\ 0^s.91$. Se tendrá, pues:.... $\frac{1}{2}(T + T') = 12^h\ 00^m\ 51^s.54$.

Los demas elementos para el medio dia verdadero de México, son:

$$M = 12^h\ 9^m\ 33^s.74 \qquad \delta = -\ 2°\ 46'.5 \qquad v = +\ 59''.1$$

y tomando los log. de A y B con el argumento $T - T' = 3^h\ 25^m$, resulta:

A..... 9.4205	B..... 9.3756	$M = 12^h\ 9^m\ 33^s.74$	
v..... 1.7716	..... 1.7716	$\varepsilon =$	$+\ 6.17$
tan. ϕ.... 9.5475	tan δ..... 8.6855—		
0.7396	9.8327—	$M + \varepsilon = 12^h\ 9^m\ 39^s.91$	
		$\frac{1}{2}(T + T') = 12\ 00\ 51.54$	
$+5^s.49$	$-0^s.68$	$\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') =$	$+\ 8^m\ 48^s.37$

206.—Estas aplicaciones son suficientes para dar á conocer la exactitud y sencillez de este procedimiento, cuya única desventaja consiste en el mucho tiempo que es preciso que trascurra de la primera observacion á su correspondiente, lo cual origina á veces la pérdida de esta última á consecuencia de la interposicion de nubes ó de otro accidente cualquiera. Debe cuidarse de preservar el instrumento de los rayos directos del sol durante todo ese tiempo, pues de lo contrario seria fácil que lo desarreglase la elevada temperatura á que quedaria expuesto, siendo el resultado que sus indicaciones iguales no corresponderian acaso á alturas exactamente iguales.

No es indispensable observar los dos limbos, porque pudiéndose

(*) Esta pequeña diferencia en la velocidad ascensional de los dos bordes, proviene de que las observaciones se ejecutaron bastante cerca del meridiano; y en tales casos las variaciones de altura comienzan á no ser exactamente proporcionales al tiempo. (Véase el núm. 178).

suponer constante por muchas horas el semidiámetro del sol, es claro que á las alturas iguales de cualquiera de los bordes, corresponden tambien alturas iguales del centro. A pesar de esto, me parece útil observar los dos siempre que se pueda, con el fin de eliminar el error que pudiera existir en el modo especial de anotar los instantes en que cada uno de ellos es tangente á los hilos, si se usa un telescopio comun, ó en el de apreciar los contactos de las imágenes al acercarse ó separarse, si se emplea el sextante.

207.—Despues de practicadas las observaciones A M., es de la mayor importancia conocer con cierta aproximacion la hora cronométrica de las P M. con el objeto de prepararse á ejecutarlas y no exponerse á perderlas por falta de oportunidad. A este fin notemos que como la última de aquellas debe corresponder á la primera de estas, si llamamos T' la última indicacion del cronómetro en la serie A M., y $\triangle\ T$ su correccion aproximativa, tendrémos que..... $T' + \triangle\ T - E$ será la hora verdadera, y $12^h - (T' + \triangle\ T - E)$ el ángulo horario del sol, ó su distancia al meridiano expresada en tiempo. Esta misma será la hora verdadera de la primera observacion P M: la hora media $12^h - (T' + \triangle\ T - E) + E$; y por consiguiente la cronométrica:

$$T = 12^h - T' + 2\,(E - \triangle\ T)$$

En la última aplicacion suponiendo de $+\ 9^m$ la correccion del cronómetro, y teniéndose $E = +\ 9^m\ 34^s$, resulta:

$T' = 10^h\ 21^m$	$E = \ 9^m\ 34^s$	$12 - T' = 1^h\ 39^m$
$12^h - T' = \ 1\ 39$	$\triangle\ T = \ 9\ 00$	$2\,(E - \triangle\ T) = +\ 1$
	$E - \triangle\ T = +\ 0^m\ 34^s$	$T = 1^h\ 40^m$

ó sea $13^h\ 40^m$, que fué en efecto con muy corta diferencia la primera hora cronométrica de la serie P M.

208.— Sucede á veces que por un accidente cualquiera no puede practicarse la observacion P M. correspondiente á la A M.; mas si se logra ejecutar otra poco tiempo despues, se puede hallar por interpolacion la hora cronométrica que corresponderia á aquella. Con este objeto se calcula la velocidad ascensional del sol tanto en la observacion oriental como en la occidental, comparando las indicacio-

nes extremas del cronómetro con los arcos recorridos, segun se ha explicado ántes. Si los dos resultados difieren algo entre sí, como sucede generalmente, se adopta el término medio por velocidad del astro en el instante intermedio entre la hora de la observacion practicada y la que debió practicarse. Con este elemento, y con la diferencia que exista entre la graduacion A M. del instrumento, y aquella en que se haya ejecutado la observacion occidental, se determina por una simple proporcion la correccion que debe sufrir la hora cronométrica obtenida, á fin de reducirla á la que se hubiera obtenido con la graduacion correspondiente á la observacion oriental. Sea $L' - l'$ la diferencia de lecturas cronométricas extremas de la observacion A M., y que expresa en término medio el tiempo invertido por los dos limbos del sol en ascender g' grados; $L - l$ la misma diferencia relativa á la observacion ejecutada al Occidente y que expresa el tiempo debido á un descenso de g grados. Entónces $s = \frac{1}{2}\left(\frac{L-l}{g} + \frac{L'-l'}{g'}\right)$ representa el tiempo que emplea el sol en recorrer la unidad angular cuando la indicacion del clisímetro es el término medio $\frac{1}{2}(G + G')$ de las G' y G en que se ha observado al Este y al Oeste respectivamente. En consecuencia, la correccion de la hora será: $C = (G - G')\,s$, la cual restada de la indicacion cronométrica que se haya obtenido por término medio de la serie, da por resultado la correspondiente al promedio de las observaciones del Este.

Supongamos, por ejemplo, que en la mañana se hubiera obtenido $T' = 8^h\ 46^m\ 33^s.33$ cuando la graduacion media del sextante era de 68° 40′; que habiéndose perdido la serie correspondiente de la tarde, se hubiera hallado poco despues $T + C = 14^h\ 40^m\ 28^s.91$ con la indicacion media 67° 00′; y que al Este se hubiera obtenido..... $1^m\ 44^s.75$ y al Oeste $1^m\ 43^s.75$ por el tiempo invertido en ascender y descender 40′ del sextante ó sea 20′ de altura real. Se tomará $1^m\ 44^s.25$ por duracion de un movimiento de 20′, y como la diferencia de las alturas que señalaba el instrumento es realmente de 50′, se tendrá: $C = \frac{50 \times 104.25}{20} = 4^m\ 20^s.62$. Por consiguiente la hora P M. corregida es $T = 14^h\ 36^m\ 8^s.29$.

209.—El mismo procedimiento se aplica para corregir las horas en caso de que no se observe el astro exactamente en las mismas condiciones á un lado y otro del meridiano. Se ha expuesto ya un ejemplo de esta clase de correcciones por el estado del nivel, y se pro-

cederia de una manera análoga para tomar en cuenta la diferencia de refracciones si se desease no omitir circunstancia alguna que contribuyese á la mayor precision del resultado. De los elementos que sirven para asignar el valor de la refraccion, el mas variable á la vez que el mas influente es el factor que depende de la temperatura del aire, de manera que aun siendo iguales las indicaciones del clisímetro al Este y al Oeste del meridiano y haciendo uso de un valor medio de la presion barométrica, se hallará que puede ser de algunos segundos la diferencia de refracciones si difieren bastante las temperaturas. Es, sin embargo, muy fácil introducir en el cálculo la pequeña correccion necesaria para eliminar esta causa de error, pues siendo ρ la refraccion media que dan las Tablas con la distancia zenital aparente por argumento, y que es la misma para las mismas indicaciones del instrumento angular; b y f los factores que provienen del barómetro adoptando sus indicaciones medias en la localidad de que se trate; y llamando l' y l los factores originados por la temperatura del aire en los momentos de las observaciones A M. y P M. respectivamente, se tiene:

$$r = \rho\, b\, f\, l \qquad\qquad r' = \rho\, b\, f\, l'$$

y aunque estos valores sean solo aproximativos por ser calculados con las indicaciones medias, ó por hipótesis constantes, del barómetro, su difencia es sensiblemente exacta. Segun esto, siendo s el tiempo que emplea el sol en ascender ó descender $1''$, hallarémos que $T' + s\, r'$ debió ser la hora cronométrica A M. en el instante en que la altura real del sol era igual á la aparente y $T - s\, r$ la correspondiente á la observacion P M. Por consiguiente, $\frac{1}{2}(T+T') - \frac{1}{2} s\,(r-r')$ es la indicacion del cronómetro á la hora media $M + \epsilon$, ó lo que es lo mismo, la verdadera correccion de este instrumento será:..... $\frac{1}{2}(\triangle T + \triangle T') + \frac{1}{2}\, s\,(r - r')$.

210.— El método que se ha indicado en el núm. 208 para hacer correspondientes dos series observadas á diversas alturas, da resultados suficientemente exactos si no excede de 15^m ó 20^m el valor de la correccion C; pero si por cualquiera causa no se puede practicar la observacion occidental dentro de este período contado desde la hora de la serie correspondiente, habria algun error en corregir de

esa manera la hora, porque no debe admitirse la proporcionalidad entre el tiempo y el movimiento ascensional mas que en duraciones cortas. En tales casos, lo mejor es tomar cuando se pueda la serie occidental y hasta el siguiente dia la oriental, representando entónces M la hora media de la media noche. La modificacion que en este caso necesitan las fórmulas (5) consiste en que verificándose la media noche verdadera en el mismo instante físico en que tiene lugar el medio dia verdadero de nuestros antípodas, debe usarse $-\phi$ por latitud, de manera que se tendrá para un paso inferior del sol:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= -A\,v\,\text{tan.}\,\phi - B\,v\,\text{tan.}\,\delta \\ \tfrac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') &= M + \varepsilon - \tfrac{1}{2}(T + T') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

En este caso el tiempo trascurrido entre las dos observaciones es mayor que 12^h y en consecuencia será negativo el valor de B. Tambien debe tenerse presente que δ representa la declinacion del sol en el momento de la media noche, de modo que siendo L la longitud, v la variacion horaria de aquella coordenada á la hora $12^h + L$ (pág. 286) y $\triangle$ su valor á medio dia de Greenwich, se tendrá:..... $\delta = \triangle + (12^h + L)\,v$. Lo mismo se calcula la ecuacion del tiempo E para determinar $M = 12^h + E$, con la única diferencia de que se interpolará su variacion horaria para el instante $6^h + \frac{1}{2}L$.

Ejemplo.—El 27 de Junio de 1866 hice las siguientes observaciones del limbo superior del sol en un lugar cuya posicion es $\phi = 22°\ 9'$ y $L = 6^h.73$.

P. M	*Sextante.*	*A. M*	*Semisumas.*
$2^h\ 00^m\ 49^s.7$.....	$126°\ 40'$.....	$22^h\ 6^m\ 43^s.5$.....	$12^h\ 3^m\ 46^s.60$
,, 1 11.5	,, 30	,, 6 21.7	,, ,, 46.60
,, 1 32.7	,, 20	,, 6 0.7	,, ,, 46.70
,, 1 54.2	,, 10	,, 5 38.7	,, ,, 46.45
,, 2 16.5	,, 00	,, 5 17.5	,, ,, 47.00
$T = 2^h\ 1^m\ 32^s.92$.....	$126°\ 20'$.....	$T' = 22^h\ 6^m\ 00^s.42$.....	$12^h\ 3^m\ 46^s.67$

Los demas datos son:

$T' - T = 20^h\ 4^m.5$ $\quad \delta = +23°\ 18'\ 10''$ $\quad v = -6.''77$ $\quad E = +2^m\ 49^s.39$

y por consiguiente se tendrá:

A.....	0.1340	B.....	0.0740—	M =	$12^h\ 2^m\ 49^s\ 39$
v.....	0.8306—	.....	0.8306—	ε =	$+\ 0.\ 29$
tan. ϕ.....	9.6097	tan. δ....	9.6342		
	0.5743—		0.5388	$M+\varepsilon$ =	$12^h\ 2^m\ 49^s\ 68$
				$\frac{1}{2}(T+T')$ =	$12\ 3\ 46.\ 67$
	$-3^s\ 75$		$+3^s\ 46$	$\frac{1}{2}(\Delta T+\Delta T')$ =	$-0^m\ 56^s\ 99$

Digamos para terminar, que cuando se toman alturas iguales del sol sirviéndose de un cronómetro sideral, debe convertirse en tiempo medio la duracion $t - t'$ trascurrida entre las observaciones para tomar con ese argumento los logaritmos de A y B. Tambien en ese caso se hará uso de la ascension recta α del sol verdadero calculada para el medio dia local, en vez de la hora media M correspondiente al mismo instante. En todo lo demas se procede absolutamente lo mismo que se ha explicado, pues el valor de ε es siempre bastante pequeño para que no ofrezca diferencia apreciable, ya sea que esté expresado en tiempo solar ó en tiempo sideral.

El lector que desee ejercitarse en la resolucion de mayor número de ejemplos, é imponerse de varios detalles relativos al método de alturas iguales del sol, puede consultar la Seccion III, Capítulo I. de mis "Nuevos métodos astronómicos."

Pero en rigor ε

CAPITULO X.

DETERMINACION DE LA HORA.—MÉTODO DE PASOS MERIDIANOS.

211.—Segun la definicion que se ha dado (pág. 235) de la ascension recta de un astro, inferimos que si se anota la hora de un cronómetro sideral en el instante del tránsito del astro por el meridiano de un lugar, se obtendrá la correccion de aquel instrumento por la simple comparacion de la hora que señale con la ascension recta del astro tomada de las Efemérides. Si el cronómetro es solar, se comparará su indicacion con la hora media de la culminacion del astro, que se halla fácilmente (pág. 251) por medio de su ascension recta.

En esta sencilla consideracion se funda el método de pasos meridianos, considerado como uno de los mejores para determinar la hora. En cuanto á la observacion, se practica con el instrumento llamado *telescopio meridiano ó de tránsitos*, cuyas dimensiones varian desde cosa de $0^m.5$ hasta mas de $1^m.0$ en los portátiles; y desde $1^m.0$ hasta mas de $2^m.5$ en los fijos ó de Observatorio permanente. La fig. 47ª representa la forma ordinaria de los instrumentos portátiles: el telescopio $A\,A'$ está unido á un eje $B\,B'$, perpendicular á su eje óptico, y cuyos extremos descansan en un apoyo de hierro C que por medio de fuertes tornillos se fija á un poste de piedra destinado al efecto, de tal manera que el eje $B\,B'$ quede sensiblemente horizontal y dirigido de Este á Oeste, á fin de que la línea de colimacion describa el plano del meridiano al mover el telescopio.

Como seria difícil establecer de una sola vez el instrumento en su situacion exacta, sus diversas piezas están dotadas de los pequeños movimientos necesarios para rectificar su posicion, corrigiendo la aproximativa que se le haya dado al fijar el pié *C*. Así el apoyo *B* de uno de los extremos del eje es susceptible de un pequeño movimiento vertical, que lo hace subir ó bajar por medio de un tornillo, con el fin de que *B B'* quede exactamente horizontal; y en la otra extremidad *B'* el apoyo correspondiente tiene algun movimiento azimutal que permite establecer el eje óptico con toda precision en el plano del meridiano.

En *B'* hay un círculo pequeño cuyo objeto es el de señalar la altura ó distancia zenital que es preciso que tenga el telescopio para que se presente en su campo el astro que se desee observar. El círculo está fijo al eje *B B'* y gira con él; pero sus vernieres, que están unidos á la pieza que se fija al apoyo de hierro, permanecen inmóviles durante la revolucion del telescopio; y así es que haciéndolos señalar la indicacion que se necesite con la aproximacion de 1′ ó 2′, y apretando el tornillo de presion, quedará el eje óptico con la inclinacion conveniente, cuidando, sin embargo, de que siempre indique la horizontalidad el pequeño nivel que va unido á la alidada y que es, por consiguiente, paralelo al plano del círculo. La graduacion de este por lo general está numerada por cuadrantes, de modo que da distancias zenitales en una posicion y alturas en la otra cuando el observador invierte los extremos del eje; verificándose lo mismo en una sola posicion, segun que el telescopio esté dirigido al Norte ó al Sur. El exámen y la nulificacion del error de colimacion en el sentido vertical se practican como se ha explicado en el Tomo I, páginas 425 y 426, pues no necesitándose gran precision en las lecturas, atendido el uso de este círculo, es conveniente destruir aquel error para no tener que llevarlo en cuenta cada vez que sea preciso variar la inclinacion del telescopio.

La retícula consta de tres, cinco, siete y en general de un número impar de hilos verticales equidistantes; porque si bien uno solo podria servir para observar los tránsitos, se considera con razon que un promedio de varias observaciones es digno de mas confianza que una sola, por ser mas independiente de los pequeños errores accidentales al anotar las horas correspondientes. Hay ademas dos hilos horizontales bastante próximos entre sí, colocados hácia el centro

del campo y cuyo objeto es el de hacer que los astros pasen siempre entre ellos; pues procediendo así se logra practicar las observaciones en los mismos puntos del campo, á fin de eliminar el efecto de alguna ligera inclinacion que pudieran tener los hilos verticales. Por otra parte, la exacta verticalidad de estos ó la horizontalidad de aquellos se comprueba fácilmente, como se explicó en la pág. 91. La retícula se hace visible de noche por medio de la lámpara *L*, la que inclinada mas ó ménos respecto del eje *B B'* suministra la luz necesaria para ver bien los hilos sin que se ofusquen las imágenes de las estrellas, aun cuando sean pequeñas.

Por la breve descripcion que precede se habrá notado la semejanza que tiene el telescopio de tránsitos con el de un altazimut, del que no difiere en realidad mas que en la menor aproximacion del círculo vertical; y se comprenderá tambien que el altazimut sirve perfectamente como instrumento meridiano, con la ventaja sobre este de prestarse á la medida exacta de las distancias zenitales de los astros en su culminacion. Tanto uno como otro están provistos de oculares acodados para practicar con comodidad las observaciones cerca del zenit.

212.—Un telescopio de pasos cuando está perfectamente arreglado reune las siguientes condiciones: 1ª Su eje de rotacion debe ser exactamente horizontal. 2ª Su plano de colimacion, determinado por el centro óptico del objetivo y el hilo central de la retícula, ha de ser perpendicular al eje de rotacion. 3ª El mismo plano de colimacion debe coincidir con el del meridiano.

La primera condicion se comprueba con el nivel montante *H H'*, procediendo enteramente como se explicó en la pág. 89, refiriéndonos al eje horizontal del altazimut. Conviene con este motivo hacer una indicacion de importancia, que consiste en que cuando se usan niveles muy sensibles es preciso comprobar el exacto paralelismo del tubo y de la línea que sirve de apoyo á los piés del nivel sobre el eje de rotacion. Puede suceder, en efecto, que se haya conseguido establecer el tubo en un plano horizontal, sin que por esto sea paralelo al eje; y para investigar si tal cosa se verifica, debe el observador inclinar ligeramente el nivel hácia adelante y hácia atras, despues de haber situado la burbuja en el centro. Si durante este pequeño movimiento permanecen sus extremidades en las mismas divisiones de la escala, existe el paralelismo; mas si la burbuja va-

ria de indicaciones es porque un extremo sube un poco y el otro baja. Supongamos para mayor claridad que la extremidad del nivel que queda á la derecha del observador se desvíe del paralelismo hácia adelante respecto del eje: en tal caso al llevarlo un poco hácia atras subirá la extremidad de la derecha y bajará la de la izquierda, puesto que este pequeño movimiento se ha verificado sin que los piés del nivel dejen de apoyarse en el eje del telescopio. Será, pues, necesario para corregir el error, mover algo el tubo del nivel dentro de su armadura, de manera que la extremidad de la derecha se acerque un poco al observador, ó por el contrario, se aleje de él la de la izquierda. Este movimiento se comunica por medio de un tornillo lateral colocado en la armadura hácia una de sus extremidades, el cual obra sobre el tubo; y debe irse haciendo poco á poco la correccion hasta conseguir que los pequeños movimientos oscilatorios de que he hablado, comunicados hácia un lado y otro de la vertical que pasa por los piés del nivel, no hagan variar sus indicaciones. Luego que esto se haya logrado, se arregla el otro nivel pequeño que está unido en *H* á la armadura del grande; y así ya en lo sucesivo para obtener las indicaciones de este último, se le debe dar la posicion necesaria para que la burbuja de aquel quede en el centro de su pequeño tubo; porque es evidente que de esa manera será siempre igual la situacion que toman los piés del nivel montante respecto de la vertical.

213.—La línea de colimacion se corrige tambien lo mismo que se explicó en la pág. 91 al exponer las rectificaciones del altazimut, esto es: por medio de la inversion del eje observando un objeto distante ó la retícula de un colimador, y tambien sirviéndose de dos colimadores opuestos (pág. 92). Ademas de estos procedimientos y de otro fundado en observaciones astronómicas, que indicaré despues, se emplea un método muy exacto y fácil de ejecutar. Consiste en dirigir verticalmente el telescopio sobre una vasija llena de mercurio, que se coloca en el apoyo *C*. Suponiendo muy bien nivelado el eje de rotacion, sucederá entónces que los rayos de luz que parten de la retícula saldrán paralelos del objetivo, y al caer sobre la superficie del mercurio, serán reflejados por esta, y al volver á atravesar el objetivo se irán á reunir de nuevo en el foco estelario del telescopio. Segun esto, verá el observador directamente la retícula al traves del ocular, y en coincidencia con ella su propia imágen re-

flejada por el mercurio, si es nulo el error de colimacion. En el caso contrario se presentará la imágen á un lado de la retícula, siendo la distancia de un hilo vertical á su imágen, doble de aquel error. Puede por consiguiente el observador destruirlo moviendo los tornillos de la retícula hasta establecer la coincidencia del hilo con su propia imágen.

Muchas veces los instrumentos de tránsitos están provistos de un micrómetro en el ocular, cuyo mecanismo es indéntico al que he descrito en la pág. 272 del Tomo I, y sirve para medir pequeños espacios angulares dentro del campo del telescopio. Moviéndose su hilo paralelamente á los verticales de la retícula, permite estimar la distancia angular del hilo central á su imágen, ya sea para situarlo con los tornillos exactamente á la mitad de ese espacio, ya sea para medir y llevar en cuenta el pequeño error de colimacion que puede quedar despues de practicada la rectificacion como se ha dicho. El mismo uso tiene el micrómetro cuando se examina la colimacion observando una señal distante ó la retícula de otro anteojo. Para emplear con buen éxito el colimador de mercurio es preciso iluminar muy bien los hilos, por lo cual se hace uso de un ocular especial que está provisto de un espejo metálico en el interior del tubo, inclinado 45° respecto del eje óptico y perforado en su centro para no interceptar la vision directa. Una abertura lateral, practicada en el tubo del ocular, sirve para que el espejo reciba la luz de una lámpara y la refleje sobre la retícula.

Lo anterior supone la perfecta horizontalidad del eje de rotacion del telescopio; mas si no sucede así, se puede determinar á la vez el error de colimacion y la inclinacion del eje. Al efecto, se invierte el instrumento sobre sus apoyos, y dirigido de nuevo hácia el mercurio, se vuelve á medir la distancia del hilo central á su imágen por medio del micrómetro. Designando por b la inclinacion del eje, por c la colimacion del hilo, y por l y l' las distancias que da el micrómetro en ambas posiciones, se tiene evidentemente:

$$l = 2(b + c)$$
$$l' = 2(b - c)$$

de donde resulta:

$$b = \tfrac{1}{4}(l + l') \qquad c = \tfrac{1}{4}(l - l')$$

y así es que conociendo el valor angular de las divisiones del micrómetro, fácilmente se obtienen en segundos los de ambas cantidades.

214.—La situacion del telescopio en el plano del meridiano se hace calculando la hora sideral ó media (pág. 251) de la culminacion de una estrella y visándola con el hilo central de la retícula en el instante en que un cronómetro cuya correccion sea conocida, señale la indicacion equivalente á aquella hora. Cuando no se conozca con exactitud el estado del cronómetro, es conveniente servirse de una estrella circumpolar, en atencion á que siendo muy leve el movimiento azimutal de las circumpolares, no influirá mucho el error que se cometa en la hora. Tambien puede establecerse el telescopio determinando previamente la direccion del meridiano por medio de una brújula, teniendo en cuenta la declinacion magnética, ó bien trazando la meridiana por alguno de los métodos que se explicaron en la Topografía; pues tratándose solo de situar el instrumento muy cerca de aquel plano, no hay inconveniente en servirse de cualquiera procedimiento aproximativo, con tal que no produzca un error que exceda de 10′ á 15′. Las observaciones astronómicas que se practican en seguida con el mismo telescopio, dan á conocer su desviacion, ó sea el pequeño azimut que le haya quedado, y permiten en consecuencia su rectificacion ulterior por medio del pequeño movimiento azimutal que puede comunicarse á una de las extremidades de su eje, aun cuando se haya fijado definitivamente su apoyo sobre el poste destinado á recibirlo. No será inútil advertir que la cara superior de este macizo debe acercarse tanto como se pueda á la horizontalidad, á fin de que despues de consolidado el apoyo no sea necesario subir ó bajar mucho uno de los extremos del eje de rotacion para que la burbuja se conserve siempre hácia el centro del tubo. Tanto este movimiento vertical como el azimutal, no son de mucha extension, y por eso conviene practicar con la mayor aproximacion que sea posible el establecimiento provisional del telescopio. De ese modo el definitivo solo demandará pequeñas correcciones.

215.—Los procedimientos de rectificacion que he expuesto reducen los errores á la mayor pequeñez; pero ni puede suponerse en general que se les destruya completamente, ni aun cuando se lograra hacerlo deberia admitirse que permaneciesen nulos por mucho tiempo. En virtud de esta consideracion investiguemos el modo de reducir al meridiano las observaciones que se hagan con un instru-

mento incorrecto, aceptando únicamente la hipótesis de que sean muy pequeños los errores, como se verifica en realidad por muy defectuosas que hayan sido sus rectificaciones.

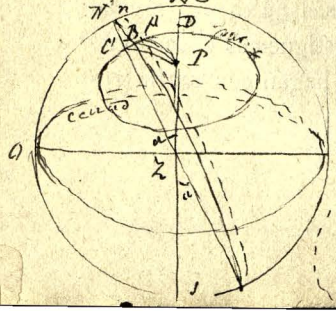
Admitiendo, pues, la existencia de una desviacion azimutal del eje óptico del telescopio, la de una inclinacion de su eje horizontal y un error de colimacion en su retícula, sea $N\,E\,S\,O$ (fig. 48ª) el plano del horizonte, sobre el cual consideraré proyectada la esfera. Si el instrumento estuviese correcto, su eje de rotacion quedaria dirigido segun la línea $E\,O$ y su línea de colimacion describiria el meridiano $N\,S$; pero á causa de sus errores el eje ocupará la posicion $E'\,O'$, y en consecuencia su eje óptico se dirigirá al punto N' del horizonte formando con el meridiano el ángulo azimutal $N\,Z\,N' = a$. El telescopio describiria en su movimiento el plano vertical que pasa por $N'\,S'$ si fuese exactamente horizontal su eje de rotacion; mas suponiendo que su extremidad O' esté elevada sobre el horizonte una cantidad b, describirá el plano inclinado $N'\,Z'\,S'$, de modo que el zenit Z' del instrumento distará b segundos del zenit real Z. Si llamamos, ademas, c el error de colimacion, tendrémos que la línea de colimacion se hallará á c segundos de distancia del eje óptico, que es la verdadera línea perpendicular al eje de rotacion del telescopio.

Cualquiera de los hilos laterales de la retícula describe un círculo menor $n\,A\,s$ paralelo á $N'\,Z'\,S'$, y designando por i su distancia angular á la línea de colimacion, resulta que la que lo separa del eje óptico es $A\,B = c + i$.

216.—Establecido lo anterior, consideremos una estrella A en el momento de su paso por el hilo lateral: para llegar á su culminacion en D tendrá que trascurrir un tiempo medido por el pequeño ángulo horario $h = A\,P\,D$, siendo P la proyeccion del polo. El ángulo h se compone de $h_1 = D\,P\,C$, de $h_2 = C\,P\,B$ y de $h_3 = B\,P\,A$, originado el primero por la desviacion azimutal a; el segundo por la inclinacio b del eje de rotacion y el tercero por la colimacion y el intervalo del hilo, ó sea por la cantidad $c + i$.

El triángulo $P\,Z\,C$, en el cual $P\,C$ es la distancia polar de la estrella, é igual á $90° - \delta$, da la ecuacion:

$$\text{sen. } h_1 = \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } z}{\cos. \delta}$$



siendo $z = Z\,C$ la distancia zenital de la estrella al pasar por el punto C. Aunque para dar mas claridad á la figura se ha exajerado mucho la magnitud de los errores, debe tenerse presente que a y h_1 son sumamente pequeños, por lo cual podrémos tomar los arcos por los senos para obtener:

$$h_1 = a\,\frac{\text{sen. } z}{\text{cos. } \delta} \qquad (1)$$

Con el fin de calcular el valor de h_2 llamemos x la pequeña distancia $C\,B$, y entónces el triángulo $C\,P\,B$ da:

$$\text{cos. } x = \text{sen.}^2\,\delta + \text{cos.}^2\,\delta \text{ cos. } h_2$$

Tambien el triángulo $C\,B\,S'$ cuyo ángulo S' es igual á b, y cuyos lados $C\,S'$ y $B\,S'$ pueden tomarse por los complementos de la distancia zenital de la estrella, suministra este otro valor:

$$\text{cos. } x = \text{sen.}^2\,z + \text{cos.}^2\,z \text{ cos. } b$$

Igualando estas dos ecuaciones resulta:

$$\text{sen.}^2\,\delta + \text{cos.}^2\,\delta \text{ cos. } h_2 = \text{sen.}^2\,z + \text{cos.}^2\,z \text{ cos. } b$$

y atendiendo á que por ser tan pequeños b y h_2 se puede sustituir el desarrollo de sus cosenos hasta la segunda potencia, obtendrémos sin dificultad:

$$h_2 = b\,\frac{\text{cos. } z}{\text{cos. } \delta} \qquad (2)$$

Por último, siendo $A\,B = c + i$, el triángulo $A\,P\,B$ da:

$$\text{cos. } (c + i) = \text{sen}^2\,\delta + \text{cos.}^2\,\delta \text{ cos. } h_3$$

ecuacion en la que introducidos tambien los desarrollos de los cosenos de los pequeños arcos, produce:

$$h_3 = \frac{c + i}{\text{cos. } \delta} \qquad (3)$$

El ángulo horario total será en consecuencia:

$$h = \frac{\text{sen. } z}{\text{cos. } \delta}\,a + \frac{\text{cos. } z}{\text{cos. } \delta}\,b + \frac{1}{\text{cos. } \delta}\,(c + i)$$

El CPB .. $\cos x = \operatorname{sen}^2\delta + \cos^2\delta$
El CBN' $\cos x = \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z \cos b$
Y el APB $\cos(c+i) = \operatorname{sen}^2\delta + \cos^2\delta \cos h_3$
Se ve pues que de todos modos un valor absoluto del arco $180 - h = h_1 + h_2 + h_3$
y δ es tambien el valor de la declinacion de la estrella
sea paso superior o inferior

y es el que representa la correccion que debe sufrir la hora señalada por el cronómetro al observar la estrella en el hilo lateral, para obtener la de su paso por el meridiano. Llamando, pues, t la hora cronométrica de la observacion, Δt su correccion y recordando que la hora sideral del tránsito es igual á la ascension recta de la estrella, se tendrá la ecuacion general:

$$a = t + \Delta t + \frac{\text{sen. } z}{\text{cos. } \delta} a + \frac{\text{cos. } z}{\text{cos. } \delta} b + \frac{1}{\text{cos. } \delta} (c + i)$$

por cuyo medio puede calcularse la correccion Δt del cronómetro conociendo las magnitudes y los signos de los errores instrumentales, y que tambien sirve para la determinacion de estos, como se verá despues.

217.— Antes de pasar adelante notemos que atendida la pequeñez de a, la distancia zenital $z = ZC$ es tambien sensiblemente igual á ZD; y como esta última representa la distancia zenital meridiana de la estrella, puede expresarse en funcion de su declinacion y de la latitud del lugar. En efecto, siendo EFO la proyeccion del ecuador, se tiene $FZ = \phi$ y $FD = \delta$, por lo que $z = ZD = \phi - \delta$. Sustituyendo este valor, nuestra ecuacion general adquiere la forma:

$$a = t + \Delta t + \frac{\text{sen. } (\phi - \delta)}{\text{cos. } \delta} a + \frac{\text{cos. } (\phi - \delta)}{\text{cos. } \delta} b + \frac{1}{\text{cos. } \delta} (c + i) \ldots\ldots (4)$$

Los coeficientes de a, b y $c + i$ que en cada estacion determinada solo dependen de la declinacion del astro, se representan comunmente por A, B y C, de manera que por lo regular se escribe así la ecuacion:

$$A = \frac{\text{sen. } (\phi - \delta)}{\text{cos. } \delta} \qquad B = \frac{\text{cos. } (\phi - \delta)}{\text{cos. } \delta} \qquad C = \frac{1}{\text{cos. } \delta}$$

$$a = t + \Delta t + A a + B b + C (c + i) \quad \ldots\ldots (5)$$

En la figura se han supuesto positivos todos los errores; pero es evidente que sean cuales fueren sus signos, el efecto de cada uno de ellos dependerá, segun las reglas del álgebra, tanto de su signo

como del de su coeficiente; y en cuanto á esto conviene advertir desde ahora que A es positivo siempre que la estrella culmine al Sur del zenit, ya sea que tenga declinacion boreal ó austral, pues en este último caso $\phi - \delta$ se convertirá en $\phi + \delta$. Por el contrario, será negativo para los tránsitos al Norte del zenit siempre que se verifiquen entre este punto y el polo, en atencion á que en tales casos δ es necesariamente mayor que ϕ; pero si la culminacion se verifica entre el polo y el horizonte, quiere decir, si se trata del tránsito inferior de una circumpolar, el valor de A volverá á ser positivo, por ser negativos á la vez su numerador y su denominador. En efecto, la cantidad que se ha designado por δ representa en la figura el arco contado desde el ecuador hasta la estrella, y como en un tránsito inferior esa distancia es mayor que 90°, resulta que será preciso tomar el suplemento $180° - \delta$ en vez de δ, ó sea $\phi + \delta - 180°$ en lugar de $\phi - \delta$. Por consiguiente serán negativos el seno que forma el numerador de A, y el cos. $(180° - \delta)$ que constituye su denominador.

El coeficiente B es positivo para todos los tránsitos superiores, sea que se verifiquen al Norte ó al Sur del zenit; pero será negativo para los inferiores ó sub-polares, á causa de que varia el signo de su denominador sin que varie el de su numerador por ser un coseno. Lo mismo, y por idéntica razon debe decirse de C, á saber: que es positivo para los pasos superiores y negativo para los sub-polares. Aun sin necesidad de consideraciones analíticas, todo lo anterior se comprende muy bien por la simple inspeccion de la figura, teniendo presente que en los tránsitos inferiores parecen moverse las estrellas de Occidente á Oriente, y que en consecuencia, siendo positivos los errores, pasarán por el telescopio ántes que por el meridiano; y la hora sideral $t + \Delta t$ de la observacion será menor que $12^h + a$, hora exacta del paso sub-polar.

218.—Con relacion á los errores mismos, tenemos que a es positivo siempre que el eje óptico del telescopio se desvíe hácia el Oeste del verdadero Norte ó hácia el Este del punto Sur; y por el contrario, negativo cuando la desviacion tenga lugar hácia el Este respecto del Norte. La inclinacion b del eje de rotacion será positiva cuando su extremidad occidental esté mas elevada que la oriental, y negativa en el caso contrario; de suerte que llamando o y e respectivamente las indicaciones de los extremos *Oeste* y *Este* de la burbu-

ja, o' y e' las mismas despues de la inversion del nivel, y expresando el valor de b en segundos de tiempo, se tendrá:

$$b = \frac{(o + o') - (e + e')}{60} v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

fórmula en la que v es el valor angular de las divisiones. Es claro que cuando la suma de las dos lecturas orientales resulte mayor que la de las occidentales será negativa la inclinacion b.

En cuanto á c es positiva cuando la línea de colimacion queda al Occidente del eje óptico, puesto que en virtud de la inversion de las imágenes producida por el telescopio, las estrellas pasarán por aquella línea ántes que por el eje; pero es preciso advertir que c varia de signo cuando se invierte el telescopio, de manera que para evitar equivocaciones importa anotar en los apuntes la posicion que guarda el instrumento al practicar cada observacion. Por lo comun aquella se indica expresando si se halla al Este ó al Oeste la extremidad del eje de rotacion en que se coloca la lámpara destinada á iluminar la retícula; y así se anota "*Luz al Este*" ó bien "*Luz al Oeste*" segun el caso. De esta manera no habrá dificultad para aplicar á c el signo que le corresponda.

Cuando los hilos de la retícula están equidistantes entre sí, ó que por lo ménos son exactamente simétricos respecto del central, y se observa el paso de las estrellas por cada uno de ellos, debe verificarse que el término medio de todas las horas anotadas concuerde con la correspondiente al central, haciendo abstraccion de los pequeños errores cometidos en la apreciacion de las fracciones de segundo; mas si sus distancias son ligeramente diversas, el promedio de todas las horas dará la del tránsito por cierto punto del campo por el que puede suponerse que pasa un hilo ficticio llamado *hilo medio*, cuya pequeña distancia al central depende de la desigualdad supuesta en los intervalos de los demas. A este hilo imaginario es al que se refiere la colimacion c, y representará su distancia al eje óptico del telescopio; de suerte que cuando se haya medido directamente la colimacion del hilo central por cualquiera de los procedimientos conocidos, deberá combinarse el resultado con la pequeña distancia de que he hablado para obtener el valor de c que figura en la fórmula (5).

219.—Pronto me ocuparé de un método directo para determinar la colimacion del hilo medio; pero ántes conviene advertir que la cantidad designada por i en la misma fórmula será tambien la distancia de un hilo lateral cualquiera al imaginario que he llamado medio, puesto que á este se refieren todas las observaciones. De aquí se deduce que para todos los hilos que atraviesa la estrella ántes de llegar al medio, deberán tomarse positivos los valores de i que les correspondan, y que serán, por el contrario, negativos los que se refieran á los hilos que atraviesa despues. En consecuencia, subsistiendo la ecuacion (5) para la observacion hecha en cada uno de los hilos, resulta que el promedio de todas ellas es independiente de i, cuyo valor final es necesariamente nulo; y así es que para el hilo medio se tendrá:

$$a = t + \Delta t + Aa + Bb + Cc \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

fórmula que conviene á las observaciones completas ó hechas en todos los hilos de la retícula. La ecuacion (5) es, sin embargo, mas general por corresponder al caso de tránsitos incompletos ó sea aquellos en que se hayan perdido las observaciones de uno ó mas hilos; y es evidente que representará tambien el promedio de una observacion incompleta, con tal que por i se introduzca el término medio de los intervalos propios á los diversos hilos en que se haya observado el paso, contados siempre desde el medio y atendiendo á sus signos, y representando t el promedio de las horas respectivas.

220.—Por todo lo expuesto se comprenderá que una de las operaciones mas importantes y acaso la que conviene hacer en primer lugar, es la determinacion de los valores de i, llamados generalmente *intervalos ecuatoriales* de los hilos, por representar, en efecto, el tiempo que invertiria una estrella de declinacion nula en pasar de un hilo lateral al medio. Hay varios procedimientos para conseguirlo, y uno de los mas sencillos consiste en observar el tránsito completo de una estrella de declinacion conocida, y en comparar el promedio de las horas con la anotada en cada uno de los hilos. Designando, pues, por i_1, i_2, ... i_n los intervalos de los diversos hilos en el órden en que los va atravesando la estrella, por $t_1, t_2 \ldots\ldots t_n$ las horas correspondientes, y atendiendo á que todas las demas cantidades de la fórmula (5) son invariables para la misma posicion del

telescopio, sin excluir la correccion Δt del cronómetro por ser de tan corta duracion el tránsito, se tendrán las n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= t_1 + \Delta t + A\,a + B\,b + C\,c + C\,i_1 \\ a &= t_2 + \Delta t + A\,a + B\,b + C\,c + C\,i_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a &= t_n + \Delta t + A\,a + B\,b + C\,c + C\,i_n \end{aligned}$$

El promedio de estas es la correspondiente al hilo medio, y así llamando t el promedio de las horas, y recordando que para este hilo se tiene $i = 0$, hallarémos:

$$a = t + \Delta t + A\,a + B\,b + C\,c$$

Restando de esta cualquiera de las anteriores y designando en general por q el número de órden del hilo á que se refiera, se obtendrán n diferencias de la forma:

$$t - t_q - C\,i_q = 0$$

de las que resulta:

$$i_q = \frac{t - t_q}{C} = (t - t_q)\cos.\,\delta \qquad (8)$$

lo cual indica que para hallar el intervalo ecuatorial, expresado en tiempo, de cualquiera de los hilos, debe multiplicarse por el coseno de la declinacion de la estrella la diferencia entre el promedio de las horas y la correspondiente al hilo.

Ejemplo.—Determinemos los intervalos ecuatoriales por el siguiente paso meridiano de α *Eridani* observado el 18 de Diciembre de 1861 con un telescopio de tránsitos portátil, cuya retícula tenia cinco hilos verticales.

		$t - t_q$	
Primer hilo.....	$7^h\ 46^m\ 52^s.00$.....	$+61^s.60$	
Segundo ,, ...	,, 47 23.00.....	+30.60	
Tercer ,, ...	,, 47 53.25.....	+ 0.35	$\delta = -57°\ 56'\ 29''$
Cuarto ,, ...	,, 48 24.50.....	—30.90	
Quinto ,, ...	,, 48 55.25.....	—61.65	
Hilo medio.....	$t = 7^h\ 47^m\ 53^s.60$		

	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	CUARTO	QUINTO
$t - t_q$	1.78958+	1.48572+	9.544+	1.48990—	1.78993—
cos. δ.....	9.72492	9.72492	9.725	9.72492	9.72492
i_q	1.51450+	1.21064+	9.269+	1.21488—	1.51485—
	$i_1 = +32^s.696$	$i_2 = +16^s.242$	$i_3 = +0^s.186$	$i_4 = -16^s.401$	$i_5 = -32^s.723$

Por otras muchas observaciones obtuve en término medio para el mismo instrumento:

$i_1 = +32^s.882$ $i_2 = +16^s.226$ $i_3 = +0^s.074$ $i_4 = -16^s.348$ $i_5 = -32^s.834$

221.—Entre otros usos, los intervalos ecuatoriales sirven para reducir al hilo medio los tránsitos incompletos, ú observados en algunos hilos solamente. Para esto la ecuacion (8) indica que el intervalo contado *en el paralelo de la estrella*, es igual al ecuatorial dividido por el coseno de la declinacion. Cada uno de los hilos en que se hubiese practicado la observacion daria lugar al mismo cálculo, por lo cual se abrevia este generalmente, tomando el término medio de los intervalos de los hilos en que se haya observado el paso, dividiéndolo por cos. δ y añadiendo el resultado, con su signo, al promedio de las horas de los hilos observados. La suma algebraica da el tránsito por el hilo medio. Supongamos, por ejemplo, que en la anterior observacion de α *Eridani* se hubieran perdido los pasos por los hilos primero y tercero. Tendriamos el siguiente tránsito incompleto, el promedio de cuyas horas designaré por t_q, siendo i_q el promedio de los intervalos ecuatoriales correspondientes:

Segundo hilo.....	$7^h\ 47^m\ 23^s.00$	$i_2 = +16^s.226$
Cuarto ,, ...	,, 48 24.50	$i_4 = -16.348$
Quinto ,, ...	,, 48 55.25	$i_5 = -32.834$
	$t_q = 7^h\ 48^m\ 14^s.25$	$i_q = -10^s.985$

La reduccion al hilo medio será en consecuencia:

i_q	1.04080—	
cos. δ.....	—9.72492	$t_q = 7^h\ 48^m\ 14^s.25$
$t - t_q$	1.31588—	— 20.70
		$t = 7^h\ 47^m\ 53^s.55$

cuyo resultado es casi idéntico al que se obtuvo directamente, no obstante haber hecho uso de los valores medios de los intervalos, que difieren algo de los que produjo la observacion de la estrella.

Tanto para la determinacion de los intervalos ecuatoriales como para la reduccion de los tránsitos incompletos, se emplea la fórmula (8) con tal de que la estrella á que se refiera la operacion no esté

muy inmediata al polo; pero tratándose de una circumpolar cuya declinacion exceda de 85° ú 86°, es preciso modificar aquella expresion para hacerla mas exacta. A este fin notemos que dirigido el telescopio á la circumpolar, el intervalo de un hilo lateral al medio intercepta en su círculo de declinacion un espacio que no representa un pequeño arco, sino el seno de este. Por consiguiente, la fórmula exacta deberia ser sen. i_q = sen. $(t - t_q)$ cos. δ; pero como i_q es siempre muy pequeño, podrá tomarse en todos casos:

$$i_q = \frac{\text{sen. } (t - t_q) \text{ cos. } \delta}{15 \text{ sen. } 1''}$$

en la cual $t - t_q$ debe convertirse en arco, resultando ya el intervalo ecuatorial en segundos de tiempo. En la pág. 74 de mis "Nuevos Métodos Astronómicos" puede verse una Tabla destinada á facilitar la aplicacion de esta fórmula, así como en la pág. 80 otro procedimiento sencillo para determinar los intervalos ecuatoriales.

222.—Ocupémonos ahora del modo de hallar la colimacion c del hilo medio. Si cerca de su culminacion se observa el paso de una circumpolar por uno ó mas hilos de la retícula, y en seguida se invierten cuidadosamente los extremos del eje de rotacion del instrumento para continuar observando el paso por los mismos ú otros hilos, podrémos reducir ambas observaciones al hilo medio, segun el método explicado en el número precedente. Si las dos reducciones dan la misma hora para el tránsito por el hilo medio, es evidente que será nulo el error de colimacion, puesto que ha permanecido invariable la desviacion azimutal a en las dos posiciones del eje; pero en el caso contrario, la diferencia de los resultados proviene de la situacion simétrica que ha tomado la línea de colimacion á un lado y otro del eje óptico. Estas dos situaciones, distando entre sí la cantidad $2c$, puede obtenerse el valor de c por medio de aquella diferencia. En efecto, designando por t_1 el término medio de las horas anotadas ántes de invertir el telescopio, por i_1 el de los intervalos correspondientes á los hilos en que se hayan observado los pasos y por b_1 la inclinacion del eje calculada por la fórmula (6), se tendrá en virtud de la (5):

$$a = t_1 + \Delta t + A\,a + B\,b_1 + C\,c + C\,i_1$$

Llamando t_2 el promedio de las horas obtenidas despues de la

inversion, por i_2 el de los intervalos de los hilos correspondientes y por b_2 la inclinacion del eje, admitiendo para mas generalidad que haya variado, tendrémos para la nueva posicion del instrumento, atendiendo á que la colimacion y los intervalos producen efectos contrarios:

$$a = t_2 + \Delta t + Aa + Bb_2 - Cc - Ci_2$$

Restando la primera ecuacion de la segunda, resulta:

$$t_2 - t_1 + B(b_2 - b_1) - 2Cc - C(i_1 + i_2) = 0$$

Despejando á c y sustituyendo los valores (5) de B y C, se obtiene por último:

$$c = \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1)\cos.\delta + \tfrac{1}{2}(b_2 - b_1)\cos.(\phi - \delta) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2) \ldots\ldots (9)$$ #

Ejemplo.—Entre otras, hice el 26 de Octubre de 1858 las siguientes observaciones de ρ *Draconis* para medir la colimacion de un telescopio meridiano.

Primera posicion.—*Luz al O.*		INTERVALOS.	Segunda posicion.—*Luz al E.*		INTERVALOS.
I hilo...	$5^h\ 44^m\ 44^s.0$	$+\ 49^s.636$	II hilo...	$5^h\ 47^m\ 59^s.0$	$+\ 24^s.940$
II „ ... „	45 48.2	$+\ 24.940$	I „ ... „	49 3.5	$+\ 49.636$
	$t_1 = 5^h\ 45^m\ 16^s.10$	$i_1 = +37^s.288$		$t_2 = 5^h\ 48^m\ 31^s.25$	$i_2 = +37^s.288$

En este caso, como en ambas posiciones se observó la estrella en los mismos hilos, se tiene $\tfrac{1}{2}(i_1 + i_2) = i_1$. En cuanto al nivel, cuyas divisiones valian $1''$, sus indicaciones fueron:

ANTES DE LA INVERSION.		DESPUES DE LA INVERSION.	
$o = 31$	$e = 35$	$o = 38$	$e = 31$
$o' = 33$	$e' = 33$	$o' = 30$	$e' = 39$
64	68	68	70

$(o+o')-(e+e') = 4''$ — $b_1 = \frac{4''}{60} = 4''' = 0^s.067$ — $(o+o')-(e+e') = 2$ — $b_2 = \frac{2''}{60} = 2''' = 0^s.033$

y por consiguiente se obtiene $b_1 = -0^s.067$ y $b_2 = -0^s.033$ por la fórmula (6). El cálculo será, pues, siendo $\phi = 19°\ 24'\ 15''$ y $\delta = 67°\ 28'\ 30''$:

$(t_2 - t_1) = 3^m\ 15^s.15$

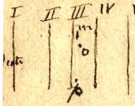
$$\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = 97^s.57 \ldots\ldots 1.98932$$
$$\cos.\delta \ldots\ldots 9.58330$$
$$1.57262$$

$$\tfrac{1}{2}(b_2 - b_1) = +0^s.017 \ldots\ldots 8.2304$$
$$\cos.(\phi - \delta) \ldots\ldots 9.8249$$
$$8.0553$$

$$\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1)\cos.\delta = 37^s.38$$
$$\tfrac{1}{2}(b_2 - b_1)\cos.(\phi - \delta) = +0.01$$
$$\tfrac{1}{2}(i_1 + i_2) = -37.29$$
$$c = +0^s.10$$

nota 3ª

Aqui tambien δ representa la dist. al ecuador por
~~Para seguir ...;~~
~~$c = \tfrac{1}{2}(t_2-t_1)\cos\delta + \tfrac{1}{2}(b_2-b_1)\cos ... - \tfrac{1}{2}(i_1+i_2) ... (9)$~~
el merid. superior; asi es que $\cos\delta$ seria negativo $\cos(\phi-\delta)$ positivo — Se ve palpablemente la razon de mis notas de las pag. 378 y 379. Si δ sencillamente es la declin. + tendremos!



El signo que resulta del cálculo es el que corresponde á la primera posicion del telescopio, de modo que para la segunda, ó sea "*Luz al Este*," la colimacion que debe emplearse, es $c = -0^s.10$.

Cuando se determine directamente la colimacion del hilo central por cualquiera otro procedimiento (números 51 y 213), se deduce fácilmente, segun he dicho, la que corresponde al hilo medio. Supongamos, por ejemplo, cinco hilos en la retícula, y sea c' la colimacion del tercero, que en este caso es el central: designando por i_3 su intervalo ecuatorial, se tendrá para el hilo medio, $c = c' \mp i_3$.

223.—Todo lo que precede manifiesta que de los tres errores instrumentales a, b y c, los dos últimos pueden determinarse con entera independencia del primero, á saber: la inclinacion b con el nivel montante aplicando la fórmula (6), y la colimacion c invirtiendo el telescopio, segun se ha explicado. El valor de b es bastante susceptible de variacion en los instrumentos portátiles, y no es raro ver que en el trascurso de algunas horas varíe $0^s.2$ ó $0^s.3$. Por esta razon al observar una serie de tránsitos conviene leer el nivel inmediatamente ántes ó despues de cada uno, ó bien anotar sus indicaciones cada media hora, por ejemplo, y si las variaciones son considerables se halla por interpolacion el valor de b que conviene á cada uno de los tránsitos. En el caso contrario se adopta el promedio de las lecturas para todas las observaciones.

El error de colimacion es mucho mas estable, sobre todo, cuando se tiene cuidado de no tocar los tornillos de la retícula. Esto no obstante, importa determinarlo periódicamente; así en una operacion dilatada se examinará todos los meses por ejemplo, adoptando entre una y otra determinacion el último valor hallado, ó mejor el promedio de los dos resultados, al ménos si se tiene motivo para creer que su variacion no ha sido brusca.

224.—El conocimiento de los errores b y c permite corregir los tránsitos observados, reduciéndolos á lo que serian si fuese exactamente horizontal el eje de rotacion del telescopio y si coincidiese su hilo medio con el eje óptico. Segun esto, representando ahora por t la hora del paso ya corregida por la suma algebraica de los dos términos $B\,b$ y $C\,c$ en los tránsitos completos, ó por $B\,b$ y $C\,(c+i)$ en los incompletos, nuestra ecuacion general (5) será para cualquiera estrella:

$$\alpha = t + \Delta t + A\,a$$

en la que quedan las dos incógnitas a y $\triangle t$. Para determinarlas á la vez, se observa otra estrella que suministra otra ecuacion semejante, á saber:

$$a' = t' + \Delta t' + A' a$$

Restando una de otra, y haciendo para abreviar:

$$\left.\begin{array}{l} 2\theta = (a' - a) + (t - t') + (\Delta t - \Delta t') \\ \text{resulta:} \\ a = \dfrac{2\theta}{A' - A} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (10)$$

obteniéndose la correccion del cronómetro por cualquiera de las dos ecuaciones primitivas, esto es:

$$\Delta t = (a - A\,a) - t \ldots\ldots\ldots (11)$$

En el valor de 2θ, y por consiguiente en el de a, entra la variacion ó marcha $(\triangle t - \triangle t')$ del cronómetro en el tiempo $t - t'$ que trascurre de una observacion á otra, la cual solo tiene valor apreciable siendo fuerte la variacion diaria ó muy considerable el intervalo $t - t'$. Para poder prescindir de ella sin error sensible, y para no temer algun cambio en la desviacion azimutal del telescopio, conviene elegir dos estrellas que difieran poco en ascension recta, á fin de que solo trascurran algunos minutos entre sus tránsitos.

Omitiendo en esas circunstancias la marcha del cronómetro, sustituyendo los valores $A' = \frac{\text{sen.}\,(\phi - \delta')}{\text{cos.}\,\delta'}$ y $A = \frac{\text{sen.}\,(\phi - \delta)}{\text{cos.}\,\delta}$ y desarrollándolos, el de a puede escribirse así:

$$a = \frac{\left[(a' - a) + (t - t')\right] \text{cos.}\,\delta\,\text{cos.}\,\delta'}{\text{cos.}\,\phi\,\text{sen.}\,(\delta - \delta')} \ldots\ldots\ldots (12)$$

Por esta expresion se ve que para disminuir el efecto de algun pequeño error en la diferencia $t - t'$, que es el dato obtenido por la observacion, conviene que sea grande el denominador, ó lo que es lo mismo, que las dos estrellas difieran mucho en declinacion. Si se escogen de manera que la una tenga declinacion positiva y la otra negativa, el denominador se convertirá en cos. ϕ sen. $(\delta + \delta')$. La misma ventaja y la de disminuir á la vez el factor de 2θ se consigue combinando dos circumpolares que difieran casi 12^h en ascen-

sion recta; porque entónces se observa en poco tiempo el paso superior de una de ellas y el inferior de la otra. Es preciso no olvidar que para esta última debe emplearse $12^h + \alpha$ ó $12^h + \alpha'$ en lugar de α ó α' respectivamente, así como el suplemento de su declinacion, de modo que se tendrá:

$$a = -\frac{2\theta \cos.\delta \cos.\delta'}{\cos.\phi \operatorname{sen.}(\delta + \delta')}$$

Finalmente, puede hacerse uso del doble tránsito de una circumpolar; pero un instrumento portátil no se presta á este método, en primer lugar porque no debe admitirse que permanezca invariable su desviacion azimutal durante las 12^h siderales que trascurren del paso superior al inferior; y en segundo, porque con telescopios pequeños es difícil observar las estrellas de dia, y generalmente sucederá que uno de los tránsitos por lo ménos se verificará estando el sol sobre el horizonte.

225.—Las fórmulas (10) y (11) suponen el uso de un cronómetro sideral; pero siendo solar, se convertirá en tiempo sideral, por medio de la Tabla de la página 248, la duracion que se haya obtenido, y se tendrá así la cantidad $t - t'$ que entra en el valor de 2θ. En el mismo caso, se convertirá en hora media la sideral $\alpha - A\,a$ de la fórmula (11), segun se ha explicado en la pág. 247; ó bien se calculará la hora media M del tránsito de la estrella, equivalente á su ascension recta α, para obtener: $\triangle t = (M - A\,a) - t$.

Por lo general siempre que se observan pasos meridianos se escogen dos ó mas estrellas para determinar la desviacion azimutal a, que reunan las condiciones ántes establecidas, á saber: poca diferencia en ascension recta y mucha en declinacion; y se observan ademas otras varias para la determinacion del estado del cronómetro. Estas últimas conviene que sean circum-zenitales ó zenit-ecuatoriales, tanto á causa de que la rapidez de su movimiento hace muy seguras las observaciones, cuanto por suministrar resultados casi independientes de a, pues en tales circunstancias es muy pequeño el coeficiente A, y varia de signo del Norte al Sur del zenit.

Ejemplo.—Tomemos el siguiente de tránsitos observados en México el 29 de Noviembre de 1861, con un cronómetro solar cuya variacion era inapreciable en cortos intervalos, pues no llegaba á 0^s.02 por hora.

México, Noviembre 29 de 1861.—PASOS MERIDIANOS.—LUZ AL ESTE.

Estrellas.	HILOS.						NIVEL.
	I	II	III	IV	V	MEDIO.	
	m s	m s	m s	m s	m s	h m s	s
η *Piscium*.	53 38.50	53 56.00	54 12.25	54 29.75	54 46.25	8 54 12.55	
α *Eridani*.	1 38.75	2 10.00	2 40.00	3 11.25	3 42.25	9 2 40.45	+0.23
β *Arietis*.	16 29.00	16 47.00	17 4.00	17 21.50	17 39.25	9 17 4.10	
α *Arietis*.	28 49.00	29 7.25	29 25.00	29 42.50	30 00.25	9 29 24.80	+0.11

Solo se han escrito los minutos y los segundos obtenidos en cada uno de los hilos; pero en el medio constan completas las horas cronométricas de las observaciones. La posicion del lugar es $\phi = 19° 26'$ y $L = 6^h\ 36^m.4$ próximamente, y las de las estrellas:

	Ascen. rectas.	Declinaciones.
η *Piscium*.....	$1^h\ 24^m\ 7^s.79$.....	$+14°\ 38'$
α *Eridani*.....	1 32 36.48.....	$-57\ 56$
β *Arietis*.....	1 47 3.11.....	$+20\ 8$
α *Arietis*.....	1 59 25.89.....	$+22\ 49$

La colimacion del telescopio era $c = -0^s.058$ para la posicion "Luz al Este." Tomando el término medio de las lecturas del nivel tendrémos $b = +0^s.17$. Obtuve las indicaciones que constan en la Tabla leyendo el nivel inmediatamente despues de observada la segunda estrella y poco ántes de observar la última. A fin de presentar un tipo del cálculo, corrijamos por nivel y colimacion las estrellas segunda y tercera, que tienen su A de distinto signo.

α *Eridani*

$\phi =$ 19° 26′

$\delta = -57\ 56$ ..... cos..... 9.7250 ..... 9.7250 ..... 9.7250

$\phi - \delta = +77°\ 22'$ ..... sen..... 9.9894+..... cos..... 9.3399

A..... 0.2644+ B..... 9.6149 C..... 0.2750

b..... 9.2304+ c..... 8.7634−

$A = +1.838$ Bb..... 8.8453+ Cc..... 9.0384−

Hilo medio $= 9^h\ 2^m\ 40^s.45$

$Bb = +0.070$

$Cc = -0.109$

$t = 9^h\ 2^m\ 40^s.41$

β Arietis.

$\phi =$ 19° 26′

$\delta = +$ 20 8	..... cos.....	9.9726	.....	9.9726	.....	9.9726
$\phi - \delta = -$ 0° 42′	..... sen.....	8.0870—	..... cos.....	0.0000		
	A.....	8.1144—	B.....	0.0274	C.....	0.0274
			b.....	9.2304+	c.....	8.7634—
$A = -0.013$						
			Bb.....	9.2578+	Cc.....	8.7908—

Hilo medio $= 9^h\ 17^m\ 4^s.10$

$Bb = +0.181$

$Cc = -0.062$

$t = 9^h\ 17^m\ 4^s.22$

De una manera idéntica se corregirán las observaciones de las otras dos estrellas, de modo que los valores de t y los de A son:

η *Piscium*.....	$t = 8^h\ 54^m\ 12^s.66$.....	$A = +0.086$
α *Eridani*.....	$t = 9\ 2\ 40.41$.....	$A = +1.838$
β *Arietis*.....	$t = 9\ 17\ 4.22$.....	$A = -0.013$
α *Arietis*.....	$t = 9\ 29\ 24.92$.....	$A = -0.064$

Combinemos ahora la primera estrella con la segunda y esta con la tercera para determinar la desviacion azimutal por las fórmulas (10).

η Piscium y *α Eridani*.

$a' - a = +8^m\ 28^s.69$	$t = 8^h\ 54^m\ 12.66$		
$t - t' = -8\ 29.14$	$t' = 9\ 2\ 40.41$		
$2\theta =$	$-0^s.45$	8 27.75	
$A' - A =$	$+1.75$ Acel.$=$	1.39	
	$t - t' = -8^m\ 29^s.14$		

$$a = -\frac{0^s.45}{1.75} = -0^s.26$$

α Eridani y *β Arietis*.

$a' - a = +14^m\ 26^s.63$	$t = 9^h\ 2^m\ 40^s.41$		
$t - t' = -14\ 26.17$	$t' = 9\ 17\ 4.22$		
$2\theta =$	$+0^s.46$	14 23.81	
$A' - A =$	-1.85 Acel.$=$	2.36	
	$t - t' = -14^m\ 26^s.17$		

$$a = -\frac{0^s.46}{1.85} = -0^s.25$$

Este resultado, por ser negativo, indica que el eje óptico del telescopio estaba desviado del Norte hácia el Este la pequeña cantidad $0^s.255 = 3.''8$.

Con excepcion de *α Eridani* cuya declinacion es demasiado grande, las otras estrellas llenan las mejores condiciones para determinar la correccion del cronómetro, aplicando la fórmula (11), despues de convertir en hora media la sideral $\alpha - A\alpha$ por haberse empleado un cronómetro solar.

	η Piscium.	*β Arietis.*	*α Arietis.*
a	$1^h\ 24^m\ 7^s.79$	$1^h\ 47^m\ 3^s.11$	$1^h\ 59^m\ 25^s.89$
$-A\,a$	$+\ 0.02$	0.00	$-\ 0.02$
Hora sideral	$1\ 24\ 7.81$	$1\ 47\ 3.11$	$1\ 59\ 25.87$
Asc. recta del sol.	$-16\ 34\ 29.82$	$-16\ 34\ 29.82$	$-16\ 34\ 29.82$
	$8\ 49\ 37.99$	$9\ 12\ 33.29$	$9\ 24\ 56.05$
Reduccion	$-\ 1\ 26.77$	$-\ 1\ 30.52$	$-\ 1\ 32.55$
Hora media	$8^h\ 48^m\ 11^s.22$	$9^h\ 11^m\ 2^s.77$	$9^h\ 23^m\ 23^s.50$
t	$8\ 54\ 12.66$	$9\ 17\ 4.22$	$9\ 29\ 24.92$
$\Delta\,t$	$-\ 6^m\ 1^s.44$	$-\ 6^m\ 1^s.45$	$-\ 6^m\ 1^s.42$

El promedio $\Delta\,t = -\ 6^m\ 1^s.44$ debe considerarse como la correccion del cronómetro en el momento en que su indicacion era $t = 9^h\ 14^m$, que es próximamente el término medio de las tres.

226.—Este ejemplo manifiesta la grande exactitud con que puede obtenerse la hora por el método de pasos meridianos cuando se conocen bien las correcciones instrumentales a, b y c. De no ser así, es claro que los errores que tengan influyen directamente en el resultado. El efecto de a puede eliminarse, sin embargo, observando estrellas circum-zenitales, segun he dicho; y si se escogen de manera que culminen á distancias casi iguales del zenit, la una al Norte y la otra al Sur de este punto, el promedio de los resultados será independiente de a por variar el signo de $A\,a$, como sucede en nuestro ejemplo con *η Piscium* y *α Arietis*. El efecto de b no se puede eliminar en general, por ser invariable el signo de su coeficiente B en todos los tránsitos superiores, que son los que se emplean en la determinacion de la hora. Lo que debe hacerse es reducir la inclinacion b á la menor cantidad posible, y por si fueren algo desiguales los diámetros de los muñones ó extremidades en que gira el eje de rotacion, conviene eliminar esta nueva causa de error por medio de la frecuente inversion del telescopio, pues es evidente que los resultados obtenidos en las dos posiciones del eje, afectados en distinto sentido por la desigualdad de sus extremos, darán un promedio sensiblemente independiente de ella. La inversion elimina tambien casi del todo el efecto de la colimacion; porque como C es siempre positivo para los tránsitos superiores, el signo de $C\,c$ solo depende de c, y el de este error es diverso en las dos posiciones del eje. En el Capítulo II, Seccion IV de los "Nuevos Métodos Astronómicos" puede

ver el lector mas detalles respecto de los pasos meridianos, así como el modo de determinar simultáneamente la mayor parte de las correcciones instrumentales, y el de combinar y discutir los resultados.

A la vez que la hora, se obtiene tambien por el método de tránsitos la desviacion azimutal del telescopio con la mayor precision, y aunque el valor de a se refiera al eje óptico, fácil es deducir el que corresponde al hilo central de la retícula conociendo su distancia al hilo medio y la colimacion de este. Si, pues, ántes de practicar las observaciones se establece una señal distante en coincidencia con el hilo del centro, podrá corregirse despues su posicion para trazar el meridiano con toda exactitud. (Tomo I, pág. 112). Una señal meridiana sirve para rectificar la posicion del telescopio siempre que se desee, y para medir directamente el azimut de una línea cualquiera, de modo que bajo este aspecto, el método de tránsitos constituye tambien uno de los mejores procedimientos para orientar los lados de una cadena trigonométrica.

227.—Aunque las fórmulas (5) sean bastante sencillas en su aplicacion, segun se ha visto por el ejemplo anterior, suelen emplearse bajo otra forma en los Observatorios permanentes, y en general siempre que se cuente con la estabilidad del telescopio meridiano. Sustituyendo y desarrollando los valores de A y B, se halla:

$$a = t + \Delta t + a \text{ sen. } \phi - a \cos. \phi \tan. \delta + b \cos. \phi + b \text{ sen. } \phi \tan. \delta + \frac{c + i}{\cos. \delta}$$

ecuacion que equivale á las tres siguientes:

$$\left.\begin{aligned} m &= a \text{ sen. } \phi + b \cos. \phi \\ n &= -a \cos. \phi + b \text{ sen. } \phi \\ a &= t + \Delta t + m + n \tan. \delta + \frac{c + i}{\cos. \delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Bajo esta forma, si se conocen a y b, se calculan fácilmente m y n, que introducidos en la última ecuacion sirven para corregir todos los tránsitos. No conociendo la desviacion a, se determina directamente la constante n por la combinacion de dos estrellas que difieran poco en ascension recta y tanto como sea posible en declinacion, procediendo como se explicó en la determinacion de a. Una vez conocida n, la eliminacion de a en las dos primeras ecuaciones suministra el valor de m, y entónces ya podrá aplicarse la última.

Para desarrollar este método sin hacer uso de nuevas anotaciones, convengamos en designar por t la hora cronométrica corregida por colimacion, y en los tránsitos incompletos por el promedio i de los intervalos de los hilos en que se haya practicado la observacion. Entónces los pasos de dos estrellas darán las ecuaciones:

$$a = t + \Delta t + m + n \tan.\ \delta$$
$$a' = t' + \Delta t + m + n \tan.\ \delta'$$

en las que supongo constante la correccion del cronómetro en atencion al corto intervalo que trascurre entre ambas observaciones. Restándolas una de otra se eliminará á m y obtendrémos:

$$n = -\frac{(a' - a) + (t - t')}{\tan.\ \delta - \tan.\ \delta'} = -\frac{2\theta \cos.\ \delta \cos.\ \delta'}{\text{sen.}\ (\delta - \delta')} \quad \ldots\ldots (14)$$

Eliminando la desviacion a entre las primeras fórmulas (13), se halla:

$$m = \frac{b}{\cos.\ \phi} - n \tan.\ \phi \quad \ldots\ldots (15)$$

y finalmente, cualquiera de las ecuaciones primitivas, da:

$$\Delta t = (a - m - n \tan.\ \delta) - t \quad \ldots\ldots (16)$$

Se ve, pues, que siguiendo este procedimiento no es necesario conocer el valor de a; pero si se desea con el objeto de situar una señal meridiana ó para cualquiera otro uso, se tiene:

$$a = b \tan.\ \phi - \frac{n}{\cos.\ \phi}, \qquad \text{ó bien:} \qquad a = \frac{m}{\text{sen.}\ \phi} - b \cot.\ \phi \quad \ldots\ldots (17)$$

228.—No juzgo indispensable aplicar detalladamente estas últimas fórmulas, porque los cálculos preliminares son del todo semejantes á los que preceden. No olvidando que si en el primer método t representaba la hora cronométrica corregida por nivel y colimacion, en este lo que representa es la misma hora corregida solo por la colimacion, pues la otra correccion va incluida en el valor de m, deberá hallarse con los datos de nuestro ejemplo:

η *Piscium*.....	$t = 8^h\ 54^m\ 12^s.49$
α *Eridani*.....	$t = 9\ \ 2\ \ 40.34$
β *Arietis*.....	$t = 9\ 17\ \ 4.04$
α *Arietis*.....	$t = 9\ 29\ 24.74$

Combinemos la primera estrella con la segunda y esta con la tercera para calcular la constante instrumental n por la fórmula (14).

η *Piscium* y α *Eridani*.		α *Eridani* y β *Arietis*.	
$a'-a = +8^m\ 28^s.69$	$t = 8^h\ 54^m\ 12^s.49$	$a'-a = +14^m\ 26^s.63$	$t = 9^h\ 2^m\ 40^s.34$
$t-t' = -8\ 29.24$	$t' = 9\ \ 2\ \ 40.34$	$t-t' = -14\ 26.06$	$t = 9\ 17\ \ 4.04$
$2\theta = -0^s.55$	$8\ \ 27.85$	$2\theta = +0.57$	$14\ 23.70$
	Acel. = 1.39		Acel. = 2.36
	$t-t' = -8^m\ 29^s.24$		$t-t' = -14^m\ 26^s.06$

-2θ.....	9.7404		-2θ.....	9.7559—	
cos. δ.....	9.9857		cos. δ.....	9.7250	
cos. δ'.....	9.7250		cos. δ'.....	9.9726	
sen. $(\delta-\delta')$.....	—9.9796		sen. $(\delta-\delta')$...	—9.9905—	
n.....	9.4715	$n = +0^s.296$	n.....	9.4630	$n = +0^s.291$

Tomando el término medio $n = +0^s.293$, calculemos el valor de m por la fórmula (15), recordando que $b = +0^s.17$ y $\phi = 19°\ 26'$.

b.....	9.2304	n.....	9.4669	Primer término =	$0^s.180$
cos. ϕ.....	—9.9745	tan. ϕ.....	9.5475	Segundo ,, =	—0.103
	9.2559		9.0144	$m = +0^s.077$	

Finalmente, determinemos el estado del cronómetro por medio de la primera y las dos últimas estrellas aplicando la fórmula (16).

	η *Piscium*.	β *Arietis*.	α *Arietis*.
a.....	$1^h\ 24^m\ \ 7^s.79$	$1^h\ 47^m\ \ 3^s.11$	$1^h\ 59^m\ 25^s.89$
$-m$.....	— 0.077	— 0.077	— 0.077
$-n$ tan. δ.....	— 0.076	— 0.107	— 0.123
Hora sideral.....	1 24 7.64	1 47 2.93	1 59 25.69
Ascen. recta del sol	—16 34 29.82	—16 34 29.82	—16 34 29.82
	8 49 37.82	9 12 33.11	9 24 55.87
Reduccion.....	— 1 26.77	— 1 30.52	— 1 32.55
Hora media.....	$8^h\ 48^m\ 11^s.05$	$9^h\ 11^m\ \ 2^s.59$	$9^h\ 23^m\ 23^s.32$
Hora cronométrica.	8 54 12.49	9 17 4.04	9 29 24.74
$\Delta t =$	$-6^m\ \ 1^s.44$	$-6^m\ \ 1^s.45$	$-6^m\ \ 1^s.42$

Se ve que estos resultados son los mismos que se obtuvieron por las fórmulas (10) y (11). Si se desease conocer la desviacion azimutal, tendriamos:

b..... 9.2304	n..... 9.4669	Primer término	$=+0^s.06$
tan. δ..... 9.5475	cos. ϕ..... —9.9745	Segundo „	$=-0.31$
8.7779	9.4924	a	$=-0^s.25$

229.—Las aplicaciones anteriores indican que ambos métodos son muy sencillos, aunque el segundo lo es un poco mas en atencion á que m es constante para todas las estrellas observadas; pero en cambio supone mayor estabilidad en el instrumento puesto que b forma parte del valor de m, cantidad que no seria en rigor constante si la inclinacion del eje de rotacion variase de una manera notable.

No solo las estrellas, sino tambien el sol sirve para determinar la hora por este método. Basta observar los tránsitos de sus dos limbos anotando las horas cronométricas en que son tangentes á los hilos de la retícula. El promedio de ambos pasos da el del centro, que corregido por $B\,b$ y $C\,c$, ó bien por $C\,c$ solamente, puede compararse con la hora $M - A\,a$ en el primer caso, y con..... $M - m - n$ tan. δ en el segundo, siendo M la hora media en el instante del medio dia verdadero local. Si es sideral el cronómetro, se emplea en lugar de M la ascension recta α del sol verdadero calculada para el mismo instante.

Como el cálculo de un tránsito del sol no ofrece diferencia sustancial respecto de los de estrellas, me parece inútil presentar nuevos ejemplos; y mas bien terminaré este Capítulo estableciendo algunas reglas prácticas para facilitar el cálculo de los promedios de las observaciones, y para preparar las estrellas convenientes.

Sea cual fuere el número de hilos de la retícula, como sus distancias son sensiblemente iguales, siempre he acostumbrado á tomar las diferencias de las horas correspondientes, con el objeto de cerciorarme por sus leves desigualdades de que no ha habido equivocacion alguna al apuntar las indicaciones del cronómetro. Estas diferencias me sirven en seguida para hallar el promedio, ó sea la hora correspondiente al hilo medio, con mucha mayor facilidad que sumando todas las horas y dividiendo la suma por el número de hilos. El procedimiento que aplico es como sigue: suponiendo que la retícula tenga cinco hilos, que es el número mas comun á la vez que el mas

conveniente, el tercero será el central; y por medio de las diferencias mencionadas es fácil referir todas las horas á la de este hilo. Representemos por p, s, t, c y q las horas de los pasos, por el primero, el segundo,..... el quinto hilo, y por d_1, d_2, d_3, d_4 las cuatro diferencias que se obtienen restando la hora de cada hilo de la del siguiente. Es claro que podrán representarse todas las horas de esta manera:

$$\begin{aligned} p &= t - d_1 - d_2 \\ s &= t - d_2 \\ t &= t \\ c &= t + d_3 \\ q &= t + d_3 + d_4 \end{aligned}$$

Si llamamos m la hora del paso por el hilo medio, se tendrá:

$$m = \frac{p + s + t + c + q}{5} = t + \frac{2(d_3 - d_2) + (d_4 - d_1)}{5}$$

ó bien simplificando:

$$m = t + 0.4\,(d_3 - d_2) + 0.2\,(d_4 - d_1)$$

donde se ve que con una ligera correccion, que las mas veces puede hacerse á la memoria, se reduce á la media la hora del hilo central.

Ejemplo.—Apliquemos este sencillo método al siguiente tránsito del sol observado con un telescopio en que el hilo central distaba bastante del medio.

I LIMBO.			II LIMBO.	
$11^h\ 49^m\ 59^s.75$			$11^h\ 52^m\ 9^s.50$	
„ 50 24.75	$d_1 = 25^s.00$		„ 52 34.75	$d_1 = 25^s.25$
„ 50 49.25	$d_2 = 24.50$		„ 52 59.25	$d_2 = 24.50$
„ 51 14.75	$d_3 = 25.50$		„ 53 24.75	$d_3 = 25.50$
„ 51 40.00	$d_4 = 25.25$		„ 53 50.25	$d_4 = 25.50$
$11^h\ 50^m\ 49^s.70$			$11^h\ 52^m\ 59^s.70$	

Se ve que las correcciones del tercer hilo son por el primero y segundo limbos, las siguientes:

$$\begin{aligned} m - t &= 0.4 \times 1 + 0.2 \times 0.25 = +\,0^s.45 \\ m - t &= 0.4 \times 1 + 0.2 \times 0.25 = +\,0.45 \end{aligned}$$

las que aplicadas con su signo al central dan desde luego el hilo medio. El promedio de los dos limbos suministra despues $11^h\ 51^m\ 54^s.7$ por hora del tránsito del centro del sol por el hilo medio.

Cuando la retícula tiene solo tres hilos, no habrá mas que dos diferencias, y aplicando el mismo procedimiento se halla:

$$m = s + \tfrac{1}{2}(d_2 - d_1)$$

Finalmente si tiene siete, resulta:

$$m = c + 0.43\,(d_4 - d_3) + 0.29\,(d_5 - d_2) + 0.14\,(d_6 - d_1)$$

En todos casos se notará que la desigualdad de las diferencias centrales tiene mas influencia que las de las extremas; pero que siendo iguales de dos en dos, aunque no lo sean entre sí, coincidirá el hilo medio con el cental. Como es útil que sea sensiblemente nula la distancia del hilo central al ficticio ó medio, será conveniente procurar la colocacion equidistante ó al ménos simétrica de los hilos.

230.—La preparacion de las estrellas cuyos tránsitos se tenga intencion de observar, no demanda casi cálculo alguno, si ha de emplearse un cronómetro sideral, puesto que la hora del paso es igual á la ascension recta de cada estrella; así es que conociendo poco mas ó ménos el estado del guarda-tiempo, se sabrá con suficiente aproximacion el instante en que debe presentarse la estrella en el telescopio. Conviene, sin embargo, tener presente que la lentitud del movimiento azimutal en la culminacion está en razon inversa de cos. δ, de manera que si una estrella ecuatorial se presenta generalmente en el campo del telescopio cosa de 2^m ántes de su paso por el hilo central, una circumpolar deberá esperarse mucho ántes, y si es de las mas inmediatas al polo, tardará muchos minutos en pasar de un hilo á otro.

Haciendo uso de un cronómetro solar, se calcula la hora media del tránsito (pág. 251), de la que se deduce la aproximativa cronométrica para proceder como se ha explicado.

En cuanto á la distancia zenital que tiene que señalar el pequeño círculo del telescopio, para que se presente cada estrella en el campo, se tendrá que llamando ϕ la latitud y δ la declinacion aproximativa del astro, si ϕ es mayor que δ culminará la estrella al Sur del zenit, y si ϕ es menor que δ pasará al Norte. Como en uno y otro caso la distancia zenital meridiana es igual á la diferencia de ϕ y δ, tendrémos:

Al Sur del zenit..... $\zeta = \phi - \delta$

Al Norte del zenit..... $\zeta = \delta - \phi$

Respecto de los pasos subpolares, la distancia zenital meridiana tiene por expresion: $\zeta = 180° - (\phi + \delta)$.

Estos ángulos ó sus complementos, segun que el círculo dé distancias zenitales ó alturas, son los que ha de señalar el vernier para fijar el telescopio en la posicion conveniente. Es claro que basta hacer uso de valores aproximativos de ϕ y δ, siendo mas que suficiente la aproximacion de $1'$ ó $2'$ para el caso.

CAPITULO XI.

DETERMINACION DEL AZIMUT DE UNA SEÑAL.—MÉTODO DE DISTANCIAS ANGULARES ENTRE LA SEÑAL Y UNA ESTRELLA, CONOCIENDO LA HORA DE LA OBSERVACION.

231.—En los cuatro Capítulos que preceden he dado á conocer los principales procedimientos para obtener la correccion de un cronómetro en un instante cualquiera. Este elemento y la marcha diaria del instrumento permiten al astrónomo designar la hora exacta que corresponde á cualquiera indicacion de su guarda-tiempo, segun se ha visto en la pág. 335. Por consiguiente, siempre que observe un astro cuya posicion sea conocida, anotando la hora cronométrica de la observacion podrá deducir en seguida la hora exacta y por último el ángulo horario del astro en el mismo instante, puesto que es un elemento que se compone de la ascension recta de la estrella y de la hora sideral de la observacion (pág. 237).

Establecido lo anterior, supongamos colocada una señal luminosa en el punto cuyo azimut se trate de determinar, y que el observador por medio de un altazimut ó de un teodolito mida el ángulo horizontal comprendido entre la señal y una estrella. Si cada vez que dirige su visual á la estrella anota la hora cronométrica en el momento en que aquella queda cortada por la interseccion de los hilos, es claro que reunirá los datos necesarios para calcular despues el azimut del astro en el instante de cada observacion, á saber; la latitud ϕ del lugar, la declinacion δ del astro y su ángulo horario h. Llamando a el resultado del cálculo y A el ángulo medido, el azimut de la señal será: $u = A + a$.

Toda la parte astronómica de la operacion queda, pues, reducida al cálculo del azimut a de la estrella, para lo cual se han establecido en la pág. 240 las fórmulas:

$$\text{tan. } M = \frac{\text{tan. } \delta}{\text{cos. } h} \qquad \text{tan. } a = \frac{\text{tan. } h \text{ cos. } M}{\text{sen. } (M - \phi)} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

232.—Con el fin de investigar las condiciones mas favorables á la observacion analicemos la ecuacion de que provienen las anteriores, que es:

$$\text{tan. } a = \frac{\text{sen. } h}{\text{cos. } \phi \text{ tan. } \delta - \text{sen. } \phi \text{ cos. } h} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Suponiendo pequeños errores en todos los datos del problema, consideraré como una funcion de estos al que necesariamente resulta en a, á saber:

$$\Delta a = \frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, h} \Delta h + \frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, \phi} \Delta \phi + \frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, \delta} \Delta \delta$$

y diferenciando la ecuacion anterior con relacion á los tres elementos h, ϕ y δ sucesivamente, se obtendrá con facilidad:

$$\frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, h} = \tfrac{1}{2} (\text{cot. } h - \text{sen. } \phi \text{ tan. } a) \text{ sen. } 2\, a$$

$$\frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, \phi} = \frac{(\text{tan. } \delta \text{ sen. } \phi + \text{cos. } h \text{ cos. } \phi) \text{ sen.}^2 a}{\text{sen. } h}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, \delta} = -\frac{\text{cos. } \phi \text{ sen}^2 a}{\text{sen. } h \text{ cos.}^2 \delta}$$

Por estos coeficientes de los errores, se ve que el primero se nulifica cuando el triángulo astronómico ZPA (fig. 49ª) es rectángulo en la estrella A; porque entónces se tiene: sen. ϕ = cot. h cot. a, ó bien: sen. ϕ tan. a = cot. h. En consecuencia, un pequeño error en la hora, no influye en el resultado siempre que se observe una estrella en los momentos de su *mayor elongacion*, quiere decir, en los de su mayor distancia angular al meridiano, que es cuando el plano vertical es tangente á su círculo de declinacion. Esta condicion demanda que δ sea mayor que ϕ, segun consta en la pág. 323.

El mismo coeficiente indica que la influencia de $\triangle h$ disminuye en general con el azimut, de suerte que una circumpolar cerca de su elongacion reune las mejores circunstancias para la determinacion del azimut siempre que no se tenga entera confianza en el estado del cronómetro.

El segundo coeficiente, que es el que mide la influencia de un pequeño error en la latitud, disminuye con el azimut y con el aumento del ángulo horario. Sustituyendo por sen. h su valor $\frac{\text{sen. } a \text{ sen. } z}{\cos. \delta}$, puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\phi} = \frac{(\text{sen. } \phi \text{ sen. } \delta + \cos. \phi \cos. \delta \cos. h) \text{ sen. } a}{\text{sen. } z} = \frac{\text{sen. } a}{\tan. z}$$

que manifiesta la conveniencia de que siendo pequeño el azimut, sea grande la distancia zenital; condiciones que tambien llenan perfectamente las circumpolares, expecialmente en nuestras bajas latitudes.

El coeficiente de $\triangle \delta$ se puede escribir de la manera siguiente, introduciendo la relacion $\frac{\text{sen. } h}{\text{sen. } z}$ en vez de $\frac{\text{sen. } a}{\cos. \delta}$:

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\delta} = -\frac{\cos. \phi}{\text{sen. } z} \times \frac{\text{sen } a}{\cos \delta}$$

valor que ~~si bien no puede ser nulo~~ es nulo con a y que en general, disminuye á medida que aumenta la distancia del astro al zenit; circunstancia á que se prestan muy bien las circumpolares en nuestro país.

Tambien debe notarse que los efectos de $\triangle \phi$ cambian de signo de un lado á otro del meridiano; y que por consiguiente el promedio de dos observaciones de una misma estrella al Oriente y al Occidente suministrará un resultado sensiblemente independiente de

En mi concepto tambien cambian de signo los efectos de los errores Δh y $\Delta \delta$ á uno y otro lados del meridiano por estar el primero ?

aquel error, si se procura practicarlas cuando los respectivos ángulos horarios sean casi iguales numéricamente. Aunque no con todo rigor, puede decirse lo mismo de dos estrellas diferentes con tal que no sean muy desiguales sus declinaciones.

Este breve análisis recomienda, pues, bajo todos aspectos la eleccion de las estrellas inmediatas al polo cuando se tiene por objeto la determinacion del azimut de una señal.

233.—La práctica de la operacion no ofrece dificultad alguna, reduciéndose á la medida comun de un ángulo, sin mas diferencia que la de anotar la hora cada vez que se vise el astro; pero como generalmente tiene este cierta altura sobre el horizonte, es preciso tomar en cuenta el error de colimacion para corregir las lecturas del instrumento angular, y sobre todo, las indicaciones del nivel montante con el fin de hacer correcciones análogas por la inclinacion del eje, segun se ha visto en la pág. 97 y siguientes, donde se dijo tambien que la observacion en dos posiciones inversas del teodolito ó del altazimut, elimina casi del todo los errores.

Presentemos el siguiente ejemplo de un azimut determinado por observaciones de α *Ursæ minoris* (estrella polar). El 4 de Mayo de 1860 en el extremo occidental de la base para la triangulacion del Valle de México, medí los ángulos A que van á continuacion entre la polar y la señal luminosa colocada en el extremo oriental, los cuales están contados partiendo de la señal y *de izquierda á derecha.*

Angulos entre la señal y la estrella.	Horas del cronómetro.
238° 33′ 50.″0	$9^h\ 50^m\ 28^s.5$
,, 35 1. 7	,, 53 55. 0
,, 36 5. 0	,, 56 38. 0
,, 37 21. 7	,, 59 41. 5
,, 38 10. 0	10 1 52. 5
A = 238° 36′ 5.″7 .....Promedios.....	$9^h\ 56^m\ 31^s.1$

El cronómetro era solar, y á la hora de la obsevvacion tenia $2^m\ 13^s.6$ de adelanto. La latitud de la estacion es $\phi = 19°\ 25'\ 23''$, y la posicion de la estrella era aquella noche: $\alpha = 1^h\ 7^m\ 14^s.50$ y $\delta = +\ 88°\ 33'\ 50.''3$.

Haciendo el cálculo de las fórmulas (1) con los promedios de las observaciones, tendrémos:

$t =$	$9^h\ 56^m\ 31^s.1$	tan. δ 1.6008688	tan. h..... 8.9390907—
$\Delta t =$	$-\ 2\ \ 13.6$	cos. h —9.9983658—	cos. M.... 8.3973623—
			sen. $(M-\phi)$—9.9782250
Hora media =	$9^h\ 54^m\ 17^s.50$	tan. M 1.6025030—	
Asc. recta =	$2\ 51\ 26.80$		tan. a..... 7.3582280
Acel. =	$1\ 38.04$	$M = 91°\ 25'\ 50.''3$	
$T =$	$12^h\ 47^m\ 22^s.34$	$\phi = 19\ 25\ 23.0$	$a = +\ 0°\ 7'\ 50.''6$
$a =$	$1\ 7\ 14.50$	$M - \phi = 72°\ 00'\ 27.''3$	$A = 238\ 36\ 5.7$
			$u = 238°\ 43'\ 56.''3$

$$h = \begin{cases} +\ 11^h\ 40^m\ 7^s.84 \\ +175°\ 1'\ 57.''6 \end{cases}$$

234.—Con el fin de eliminar la influencia de la pequeña inclinacion que pudiera tener el eje de rotacion del telescopio, no obstante haberse rectificado cuidadosamente, lo mismo que la colimacion, tomé pocos minutos despues la siguiente serie en la posicion inversa del instrumento:

Angulos entre la señal y la estrella.	Horas del cronómetro.
$238°\ 43'\ 56.''7$.....	$10^h\ 15^m\ 59^s.0$
„ 45 3.3	„ 19 8.5
„ 46 21.7	„ 22 14.5
„ 47 56.7	„ 26 15.0
„ 49 3.3	„ 28 55.5
$A = 238°\ 46'\ 28.''3$.....Promedios.....	$10^h\ 22^m\ 30^s.5$

La variacion del cronómetro, muy pequeña en 24^h, no era apreciable en el corto intervalo trascurrido entre ambas series, de modo que emplearé el mismo valor de Δt al desarrollar el cálculo, lo cual juzgo útil para que se vea el diverso juego de signos que respecto de la primera tiene esta nueva serie. En efecto, como las observaciones tuvieron lugar en los momentos del tránsito inferior de la polar, en la segunda serie estaba ya la estrella al Este del meridiano.

$t =$	$10^h\ 22^m\ 30^s.5$	tan. δ 1.6008688	tan. h..... 8.4312624
$\Delta t =$	$-\ 2\ \ 13.6$	cos. h —9.9998416—	cos. M..... 8.3988350—
			sen. $(M-\phi)$.. 9.9782370
Hora media =	$10\ 20\ 16.90$	tan. M 1.6010272—	
Asc. recta =	$2\ 51\ 26.80$		tan. a..... 6.8518604—
Acel. =	$1\ 41.90$	$M = 91°\ 26'\ 7.''8$	
$T =$	$13^h\ 13^m\ 25^s.60$	$\phi = 19\ 25\ 23.0$	$a = -0°\ 2'\ 26.''5$
$a =$	$1\ 7\ 14.50$	$M - \phi = 72°\ 00'\ 44.''8$	$A = 238\ 46\ 28.3$
			$u = 238°\ 44'\ 1.''8$

$$h = \begin{cases} -\ 11^h\ 53^m\ 48^s.90 \\ -178°\ 27'\ 13.''5 \end{cases}$$

$h = T - \alpha$ pero como resulta $h = 12^h\ 6^m\ 11^s.10$ y los horarios solo se cuentan de 0^h á 12^h á uno y otro lado del meridiano, es claro que el horario $12^h\ 6^m\ 11^s.10$ hacia el Oeste equivale á $11^h\ 53^m\ 48^s.90$ hacia el Este y de consiguiente (complemento á 24 horas) negativo.

El término medio de los dos resultados es, pues, $u = 238° 43' 59.''0$, y su semidiferencia $2.''7$ puede considerarse como el efecto de los pequeños errores mencionados y de los de observacion. El promedio final obtenido por seis noches de trabajo dió $u = 238° 43' 58.''2$ por azimut de la extremidad oriental de la base.

235.—En las precedentes aplicaciones se han tomado por datos los promedios de las series de observaciones, práctica justificada por el hecho de haberse ejecutado estas en los momentos del paso de la estrella. En efecto, siempre que h contado desde el tránsito mas inmediato, y por consiguiente a, sean bastante pequeños para que sin error de importancia puedan tomarse los arcos por sus senos ó tangentes y la unidad por sus cosenos, la ecuacion (2) será en segundos:

$$a = \frac{h}{\text{cos. } \phi \text{ tan. } \delta - \text{sen. } \phi}$$

y multiplicando numerador y denominador por cos. δ, da:

$$a = \frac{h \text{ cos. } \delta}{\text{sen. } (\delta - \phi)}$$

Como el factor $\frac{\text{cos. } \delta}{\text{sen. } (\delta - \phi)}$ es constante para cada estrella en determinada latitud, se infiere que muy cerca del meridiano el movimiento azimutal es proporcional al tiempo. Por esta razon hice uso de los términos medios, puesto que el de las horas corresponderá al de los ángulos medidos.

El mismo principio sirve de fundamento á un método muy sencillo para medir el azimut de una señal, el que casi no demanda mas cálculo que el de la hora cronométrica de la culminacion de la estrella. Tomando cerca de esa hora dos ó mas ángulos entre la estrella y la señal, se hallará por una simple proporcion el azimut que tenia la primera en uno de los instantes de la observacion, comparando al efecto la variacion de los ángulos con el tiempo trascurrido. Nuestras dos series, por ejemplo, suministran los siguientes datos:

ÁNGULOS MEDIDOS.	Horas cronométricas.
$A = 238° 36' 5.''7$	$t = 9^h 56^m 31^s 1$
$A' = 238\ 46\ 28.''3$	$t' = 10\ 22\ 30.5$
$A - A' = -10' 22.''6 = -622.''6$	$t' - t = +25^m 59^s 4 = +1559^s 4$

La relacion $\frac{A - A'}{t' - t}$ expresa el aumento del azimut en la unidad de tiempo; y así llamando θ la hora cronométrica del tránsito y a el azimut de la estrella á la hora t, se tendrá:

$$t' - t : A - A' :: t - \theta : a = \frac{A - A'}{t' - t}(t - \theta)$$

Para aplicar este procedimiento á los datos precedentes, calculando la hora media correspondiente á $12^h + \alpha = 13^h\ 7^m\ 14^s.5$ por tratarse de un tránsito sub–polar, se halla: $M = 10^h\ 14^m\ 6^s.8$; y como el cronómetro tenia $2^m\ 13^s.6$ de adelanto, su indicacion en ese instante debió ser $\theta = 10^h\ 16^m\ 20^s.4$. Tendrémos:........................... $t - \theta = -19^m\ 49^s.3 = -1189^s.3$, y en consecuencia:

$$a = \frac{622.6 \times 1189.3}{1559.4} = +\ 0°\ 7'\ 54.''8$$

El azimut de la señal será $A + a = 238°\ 44'\ 00.''5$, que solo difiere $1.''5$ del promedio obtenido por el cálculo de las ecuaciones (1). Este método me parece por tanto muy aceptable, sobre todo, si se aplica á una estrella de declinacion considerable y que culmine á poca altura sobre el horizonte, pues ambas circunstancias contribuyen á que tenga menor influencia un pequeño error en la hora.

236.—Aunque las fórmulas (1) son enteramente generales y fácilmente aplicables á un astro cualquiera, algunos astrónomos prefieren el cálculo de una serie cuando se trata de una estrella circumpolar cuya distancia al polo no exceda de 2° ó 3°. Llamando d la distancia polar, complemento de la declinacion, la fórmula (2) puede escribirse así:

$$\tan.\ a = \frac{\text{sen.}\ h}{\cos.\ \phi \cot.\ d - \text{sen.}\ \phi \cos.\ h}$$

y considerando al azimut a como una funcion de d, la supondré desarrollada respecto de las potencias de esta cantidad, á saber:

$$a = M d + N d^2 + P d^3 + \&c. \text{.........................} \quad (3)$$

siendo M, N, P, &c. los coeficientes que deben determinarse en funcion de los elementos conocidos h y ϕ. Con este objeto sustitu-

yamos en el valor de tan. a el desarrollo de cot. d, que es:..... cot. $d = \frac{1}{d} - \frac{1}{3}\, d - \frac{1}{45}\, d^3$ — &c., y multiplicando despues por d el numerador y el denominador, hallarémos no apreciando mas que hasta los términos de tercer órden:

$$\text{tan. } a = \frac{d \text{ sen. } h}{(1 - \frac{1}{3}\, d^2) \text{ cos. } \phi - d \text{ sen. } \phi \text{ cos. } h}$$

Se tiene, ademas: tan. $a = a + \frac{1}{3}\, a^3 +$ ..... que atendiendo á la relacion (3) será:

$$\text{tan. } a = M d + N d^2 + (P + \tfrac{1}{3}\, M^3)\, d^3$$

Igualando este valor con el precedente y quitando el denominador, se encuentra:

$$\left.\begin{array}{l} (M \text{ cos. } \phi - \text{sen. } h)\, d + (N \text{ cos. } \phi - M \text{ sen. } \phi \text{ cos } h)\, d^2 \\ + (P \text{ cos. } \phi + \frac{1}{3}\, M^3 \text{ cos. } \phi - \frac{1}{3}\, M \text{ cos. } \phi - N \text{ sen. } \phi \text{ cos } h)\, d^3 \end{array}\right\} = 0$$

ecuacion en la que debiendo ser nulos separadamente los coeficientes de las diversas potencias de d, suministrará las relaciones siguientes para la determinacion de M, N y P:

$$\begin{array}{l} M \text{ cos. } \phi - \text{sen. } h = 0 \\ N - M \text{ tan. } \phi \text{ cos. } h = 0 \\ P + \frac{1}{3}\, M^3 - \frac{1}{3}\, M - N \text{ tan. } \phi \text{ cos. } h = 0 \end{array}$$

De la primera resulta:

$$M = \frac{\text{sen. } h}{\text{cos. } \phi}$$

Sustituyendo este valor en la segunda, se tiene:

$$N = \frac{\text{sen. } h}{\text{cos. } \phi} \text{ tan. } \phi \text{ cos. } h$$

y con los de M y N la última produce:

$$P = \frac{\text{sen. } h}{\text{cos. } \phi} \text{ tan.}^2 \phi \text{ cos.}^2 h + \frac{1}{3}\, \frac{\text{sen. } h}{\text{cos. } \phi} \left(1 - \frac{\text{sen.}^2 h}{\text{cos.}^2 \phi}\right)$$

Expresando ahora en segundos los pequeños ángulos a y d, la ecuacion (3) da finalmente:

$$a = d\,\frac{\text{sen. } h}{\cos.\,\phi}\left[\begin{array}{l} 1 + d\,\tan.\,\phi\cos. h\,\text{sen. } 1'' + (d\,\tan.\,\phi\cos. h\,\text{sen. } 1'')^2 \\ + \frac{1}{3}\,d^2\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 h}{\cos.^2\phi}\right)\text{sen.}^2\,1'' \end{array}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Apliquemos esta fórmula á nuestro ejemplo tomando los promedios de las dos series de observaciones, á saber:

$$A = 238^\circ\,41'\,17'' \qquad h = 178^\circ\,17'\,22''$$

y no apreciando mas que hasta los términos de segundo órden, esto es:

$$a = d\,\frac{\text{sen. } h}{\cos.\,\phi} + d\,\frac{\text{sen. } h}{\cos.\,\phi}\,d\,\tan.\,\phi\cos. h\,\text{sen. } 1''$$

La distancia polar de la estrella es .....
$d = 180^\circ - \delta = 1^\circ\,26'\,9.''7 = 5169.''7$; y por consiguiente tendrémos:

d.....	3.71347.....	3.7135	Primer térm^o.....	+ 2′ 43.″6
sen. h.....	8.47495	cos. h..... 9.9998—	Segundo ,, ...	— 1. 4
cos. ϕ.....	—9.97455	tan. ϕ..... 9.5473		
		sen. 1″.... 4.6856	a=	+ 0° 2′ 42.″2
	2.21387.....	2.2139	A =	238 41 17. 0
	+163.″6	0.1601—	u =	238° 43′ 59.″2
		—1.″4		

237.— Para medir un azimut por observaciones de una estrella cuando dista bastante del meridiano se procede como se ha explicado, con la diferencia de que no pudiéndose suponer entónces las variaciones del azimut proporcionales al tiempo, tampoco debe aplicarse la ecuacion (1) con los promedios de las observaciones, sino que es mejor calcular separadamente cada una de ellas. Esto no obstante, en los momentos de la mayor elongacion de las circumpolares su movimiento azimutal es sensiblemente nulo, de manera que se pueden tomar varios ángulos entre la señal y la estrella y calcular despues el azimut máximo de esta por la ecuacion:

$$\text{sen. } a = \frac{\cos.\,\delta}{\cos.\,\phi} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

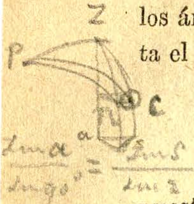
sin referencia alguna á la hora. Para que este procedimiento dé, sin embargo, la exactitud necesaria, es indispensable emplear poco tiempo en las observaciones, procurando que el instante medio de la serie sea casi el de la mayor elongacion, cuya hora puede obtenerse por la fórmula:

$$\cos. h = \text{tan. } \phi \text{ cot. } \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Calculando, pues, con este valor de h la hora cronométrica de la elongacion, se principiará 5^m ó 6^m ántes á medir el ángulo entre la estrella y la señal para terminar tambien 5^m ó 6^m despues. De este modo no es necesario anotar los instantes de las observaciones, puesto que la relacion (5) es independiente del ángulo horario de la estrella; pero sí es útil para procurar que el promedio de las horas corresponda á la de la elongacion.

Cuando es posible observar así los ángulos que forma la señal con la estrella, tanto en la elongacion oriental como en la occidental, es evidente que el azimut de la primera será igual al término medio de los dos ángulos, por ser el de la estrella numéricamente igual á un lado y otro del meridiano. En general, siendo g y g' las lecturas del círculo azimutal cuando se visa la estrella en los momentos de sus elongaciones occidental y oriental respectivamente, la graduacion meridiana, ó sea la que tendria lugar cuando el telescopio coincidiese con el meridiano, será $m = \frac{1}{2}(g + g')$, puesto que el arco $g' - g$ representa el doble del azimut correspondiente á la elongacion. Por consiguiente, siempre que se tenga confianza en la estabilidad del instrumento durante las 12^h que próximamente trascurren entre las dos elongaciones, el método anterior sirve muy bien para determinar el meridiano astronómico; y designando por G la indicacion del círculo al visar la señal, la diferencia $u = m - G$ da desde luego el azimut de esta.

238.—Tambien el sol se aplica á la medida de los azimutes, consistiendo la operacion en medir el ángulo horizontal comprendido entre la señal y uno de los dos bordes del astro, y en anotar las horas correspondientes del cronómetro. Calculando en seguida la hora verdadera de la observacion, se deduce el ángulo horario del sol, é interpolando para el mismo instante su declinacion, se reunen los datos necesarios para aplicar la ecuacion (1). Si solo se han medido



los ángulos respecto de uno de los bordes, es preciso tomar en cuenta el azimut del semidiámetro, que es:

$$\Delta a = \frac{s}{\text{sen. } z} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

puesto que los dos planos verticales que pasan el uno por el centro del astro, y el otro tangente á uno de sus bordes, interceptan ese arco del horizonte. La cantidad $\Delta\ a$, aplicada con el signo conveniente al azimut a del centro obtenido por la fórmula (1), suministrará el del limbo cuyas distancias á la señal se hayan medido. En las observaciones solares, tanto por comodidad como por la menor influencia de los pequeños errores que pudieran tener los elementos del cálculo, conviene observar el astro á poca altura respecto del horizonte, por lo cual se practican generalmente las medidas angulares poco despues de su orto ó poco ántes de su ocaso.

CAPITULO XII.

DETERMINACION DEL AZIMUT.—MÉTODO DE DISTANCIAS ANGULARES ENTRE LA SEÑAL Y LA ESTRELLA, CONOCIENDO LA DISTANCIA ZENITAL DE ESTA.

239.—En lugar del dato ó elemento cronométrico al medir el ángulo horizontal comprendido entre la señal y el astro, puede hacerse uso de la distancia zenital de este, medida directamente; porque tambien de esa manera se reunen los tres elementos indispensables para la resolucion del triángulo astronómico, á saber: la latitud ϕ

de la estacion, la declinacion δ de la estrella y su distancia zenital z. Es fácil, por lo mismo, calcular su azimut por medio de las fórmulas.

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{1}{2}(z+\phi+\delta) \qquad n = \frac{1}{2}(z+\phi-\delta) \\ \text{sen } \frac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{\cos.\, m \text{ sen. } n}{\cos.\, \phi \text{ sen. } z}} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Suponiendo pequeños errores en todos los datos del problema, el que resulta en el azimut será:

$$\Delta a = \frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,z}\,\Delta z + \frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\phi}\,\Delta\phi + \frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\delta}\,\Delta\delta$$

y para deducir las condiciones mas ventajosas analicemos la ecuacion siguiente, de la cual provienen las anteriores:

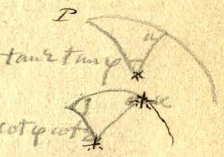
$$\text{sen. } \delta = \text{sen. } \phi \cos.\, z + \cos.\, \phi \text{ sen. } z \cos.\, a$$

Diferenciándola sucesivamente respecto de cada uno de los elementos, es fácil hallar:

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,z} = \frac{\cos.\, a \cot.\, z - \tan.\, \phi}{\text{sen. } a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\phi} = \frac{\cot.\, z - \tan.\, \phi \cos.\, a}{\text{sen. } a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\delta} = -\frac{\cos.\, \delta}{\cos.\, \phi \text{ sen. } a \text{ sen. } z} = -\frac{1}{\cos.\, \phi \text{ sen. } h}$$



El primer coeficiente se nulica cuando el triángulo astronómico es rectángulo en la estrella; el segundo cuando lo es en el polo; y el tercero adquiere el menor valor posible tambien cuando $h = 90°$. Estas tres condiciones se logran simultáneamente, casi con entera exactitud, observando una circumpolar en los momentos de su mayor elongacion; porque en ese instante es recto su ángulo paraláctico y se acerca tanto mas á serlo su ángulo horario, cuanto menor sea la distancia polar de la estrella. Debe notarse igualmente que como no varian de signo los numeradores de los tres coeficientes, ya sea que se practique la observacion al Este ó al Oeste del meridiano, y sí los de sus denominadores, se infiere que los pequeños

errores de los datos producirán efectos contrarios, y numéricamente iguales si se observa la estrella en posiciones simétricas á un lado y otro de aquel plano.

Las estrellas que no pueden observarse en los momentos en que el plano vertical es tangente á sus círculos de declinacion, por ser esta coordenada menor que la latitud del lugar, deberán observarse con el mayor azimut posible; porque las expresiones de los coeficientes manifiestan que en igualdad de circunstancias disminuyen sus valores á medida que crece el azimut. Observando una estrella cerca del primer vertical, podrémos suponer $a = 90°$, en cuyo caso se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,z} = -\tan.\,\phi$$

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\phi} = +\cot.\,z$$

$$\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\delta} = -\frac{\cos.\,\delta}{\cos.\,\phi\,\mathrm{sen.}\,z}$$

Estas cantidades demuestran que el método es favorable en las bajas latitudes, é indican la conveniencia de que sea considerable la distancia zenital del astro en el instante de la observacion.

240.—La medida de un azimut por este método, si bien no demanda el uso de un cronómetro, exige en cambio el de los instrumentos meteorológicos para calcular la refraccion, á fin de corregir la distancia zenital aparente del astro. En cuanto á la observacion es bastante sencilla, pues se reduce á leer las indicaciones de los círculos horizontal y vertical luego que se haya cortado la estrella por la interseccion de los hilos de la retícula. La lectura del círculo azimutal, comparada con la que se obtiene al visar la señal, da el ángulo formado por los planos verticales que pasan por los dos objetos; y la del otro círculo corregida por la colimacion en el sentido vertical (Tom. I pág. 424) proporciona la distancia zenital aparente de la estrella. Es claro que deben tomarse en cuenta las indicaciones de los niveles para obtener los ángulos correctos, segun se ha explicado varias veces.

Con el fin de presentar un tipo del cálculo que demanda este método, tomemos por dato el promedio de los que figuran en el Capítulo anterior, á saber: $A = 238°\ 41'\ 17''$. Suponiendo que por distancia zenital verdadera de la polar se hubiera obtenido.....

$z = 72° 00' 44.''6$ en el instante que corresponde á este promedio, tendriamos:

$\frac{1}{2}(\phi + z) = 45° 43' 3.''8$
$\frac{1}{2}\delta = 44\ 16\ 55.\ 1$

$m = 89° 59' 58.''9$	..... cos	4.72696
$n = 1\ 26\ 8.\ 7$	..... sen	8.39891
		3.12587
$\frac{1}{2}a = 1' 20''$	cos. ϕ	—9.97455
$a = +0° 2' 40''$	sen. z	—9.97824
$A = 238\ 41\ 17$		3.17308
$u = 238° 43' 57''$	sen. $\frac{1}{2}a$	6.58654

Las circunstancias del ejemplo precedente son, sin embargo, altamente desfavorables para la aplicacion de este procedimiento, á causa de hallarse la estrella muy próxima al meridiano, que es precisamente lo que debe evitarse segun lo indican los coeficientes de los errores. El error de 1'' solamente en la distancia zenital produciria en el azimut otro de mas de 30'', pues el valor de su coeficiente, calculado con los datos ϕ, z y con el resultado a, es próximamente $\frac{d\,a}{d\,z} = -36$.

CAPITULO XIII.

DETERMINACION DEL AZIMUT.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

241.— En el Capítulo II, Seccion I de mis "Nuevos Métodos Astronómicos," he expuesto un procedimiento para trazar el meridiano ó para medir el azimut de una señal, en el cual procuré cumplir las condiciones favorables que indica el análisis de los Capítu-

los XI y XII de este libro. Consiste en observar con un altazimut dos estrellas á la misma altura, y en anotar las horas en que ambas pasan por el hilo horizontal en el punto en que este es cortado por el vertical del centro. Este dato, la posicion de las estrellas y las graduaciones del círculo azimutal, que se obtienen inmediatamente despues de apuntadas las horas cronométricas, bastan para determinar la indicacion que señalaria el mismo círculo cuando el eje óptico del telescopio coincidiese con el meridiano, y en consecuencia al azimut de una señal conociendo la graduacion que se obtendria al visarla.

Cuando se sabe de antemano el estado del cronómetro, se deducen desde luego de las horas cronométricas las siderales exactas de las observaciones, y por consiguiente los ángulos horarios de ambas estrellas, que como verémos, entran como elemento en el cálculo que voy á desarrollar. Si no se conoce el estado del guarda-tiempo, las mismas observaciones sirven para determinarlo, aplicando el procedimiento del Capítulo VIII, de suerte que este método permite hallar simultáneamente el azimut y la hora. Para aplicarlo de esta manera, debe fijarse la alidada del círculo azimutal luego que se presente la primera estrella en el campo del telescopio, y como su movimiento aparente será oblicuo respecto de los hilos, se moverá lentamente el tornillo de aproximacion á fin de que los pasos por los hilos horizontales que preceden al central, se verifiquen hácia el medio del campo; y al pasar por el hilo horizontal del centro, se hará que la estrella quede exactamente cortada por el hilo vertical del medio, paralizando entónces el movimiento del tornillo con el objeto de que permanezca el telescopio en el azimut que tenia la estrella en ese instante; porque la graduacion correspondiente del círculo horizontal es uno de los datos del problema, y en consecuencia debe leerse al terminar la observacion de los pasos por los hilos restantes. Estos últimos pueden tener lugar léjos del centro, lo cual no ofrece inconveniente alguno, con tal de que se haya rectificado bien la situacion exactamente horizontal de todos los hilos (pág. 91). En seguida se observa la segunda estrella procediendo de una manera idéntica. Es claro que durante toda la operacion debe permanecer fijo el círculo vertical, á fin de cumplir la condicion de igualdad de distancias zenitales.

242.— Llamando ahora a y a' los azimutes de las dos estrella

en los instantes de sus respectivos tránsitos por la interseccion de los hilos centrales, tendrémos las dos ecuaciones:

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } h \cos. \delta}{\text{sen. } z} \qquad \text{sen. } a' = \frac{\text{sen. } h' \cos. \delta'}{\text{sen. } z}$$

y sustituyendo estos valores en la relacion:

$$\frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(a + a')}{\text{tan. } \frac{1}{2}(a - a')} = \frac{\text{sen. } a + \text{sen. } a'}{\text{sen. } a - \text{sen. } a'}$$

hallarémos la siguiente:

$$\frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(a + a')}{\text{tan. } \frac{1}{2}(a - a')} = \frac{\text{sen. } h \cos. \delta + \text{sen. } h' \cos. \delta'}{\text{sen. } h \cos. \delta - \text{sen. } h' \cos. \delta'}$$

Busquemos expresiones equivalentes á la semisuma y á la semidiferencia de los azimutes: siendo g y g' las graduaciones obtenidas en el círculo horizontal, y m la indicacion incógnita que daria el mismo círculo al coincidir con el meridiano el telescopio, dirigido hácia el Norte, se tiene evidentemente:

$$a = m - g \qquad a' = m - g'$$

valores que combinados por adicion y sustraccion producen:

$$a + a' = 2m - (g + g') \qquad a - a' = g' - g$$

con lo cual nuestra ecuacion adquiere la forma:

$$\frac{\text{tan. } \left(m - \frac{1}{2}(g + g')\right)}{\text{tan. } \frac{1}{2}(g' - g)} = \frac{\text{sen. } h \cos. \delta + \text{sen. } h' \cos. \delta'}{\text{sen. } h \cos. \delta - \text{sen. } h' \cos. \delta'}$$

Para aplicarle fácilmente el cálculo logarítmico hagámos uso de un ángulo subsidiario x determinado por la relacion:

$$\text{tan. } (x - 45^\circ) = \frac{\text{sen. } h' \cos. \delta'}{\text{sen. } h \cos. \delta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dividiendo ahora por sen. h cos. δ el numerador y el denomina-

dor del segundo miembro de la ecuacion precedente, y sustituyendo el de la última, se obtiene:

$$\frac{\tan.\left(m - \frac{1}{2}(g + g')\right)}{\tan.\frac{1}{2}(g' - g)} = \frac{1 + \tan.(\chi - 45^\circ)}{1 - \tan.(\chi - 45^\circ)}$$

la que desarrollada y reducida produce finalmente:

Si en la espresion trigon. $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ sustituimos por A, 45° y por B, $x-45°$: se obtendrá $\tan x = \frac{1+\tan(x-45°)}{1-\tan(x-45°)}$

$$\tan.\left(m - \frac{1}{2}(g + g')\right) = \tan.\chi\, \tan.\frac{1}{2}(g' - g) \quad\text{.............. (2)}$$

Una vez calculado el ángulo auxiliar χ por la fórmula (1), la (2) determina la indicacion meridiana m puesto que se conocen g y g'. Por consiguiente, si es G la lectura del círculo horizontal al visar la señal cuyo azimut u se trata de medir, tendrémos:

$$u = m - G \quad\text{.................................... (3)}$$

243.— En todo lo anterior he supuesto que la graduacion está numerada de izquierda á derecha, que es lo mas comun; mas si no fuere así, con facilidad se introducirán en las fórmulas las modificaciones necesarias. Las lecturas G, g y g' se suponen ya corregidas por nivel y colimacion (páginas 97 y siguientes). Importa igualmente anotar las indicaciones del nivel paralelo al círculo vertical, pues aunque las pequeñas diferencias de altura no influyen sensiblemente en los valores de g y g' cuando las estrellas se observan con el mayor azimut posible, sirven para corregir las horas, segun lo expuesto en la pág. 352 y en la aplicacion de la 361.

Ejemplo.— El dia 1º de Diciembre de 1865 observé á la misma altura las dos estrellas siguientes, en un lugar cuya latitud es...... $\phi = 22^\circ\, 9'$, sirviéndome de un cronómetro solar que atrasaba $0^s.6$ por hora. Las horas cronométricas, las posiciones de las estrellas y las graduaciones correctas, que se suponen suministradas por el círculo azimutal, constan á continuacion:

α *Tauri* al Este.		α *Pegasi* al Oeste.	
$t' = 8^h\, 41^m\, 53^s.10$	$a' = 4^h\, 28^m\, 15^s.56$	$t = 9^h\, 3^m\, 17^s.10$	$a = 22^h\, 58^m\, 5^s.50$
$g' = 312^\circ\, 25'\, 37''$	$\delta' = 16^\circ\, 14'\, 9''.1$	$g = 129^\circ\, 37'\, 32''$	$\delta = 14^\circ\, 29'\, 17''.2$

Con los primeros datos se obtienen por las fórmulas (6) del Ca-

pítulo VIII los elementos $\theta = 43° 57' 13.''3$ y $\varepsilon = -0° 15' 48.''7$, y con ellos:

$$h = \varepsilon + \theta = +43° 41' 24.''6 \qquad h' = \varepsilon - \theta = -44° 13' 2.''0$$

Apliquemos las fórmulas (1) y (2) para determinar la graduacion meridiana m, siendo $\frac{1}{2}(g + g') = 221° 1' 34.''5$..... y $\frac{1}{2}(g' - g) = 91° 24' 2.''5$.

sen. h'.....	9.8434698—
cos. δ'.....	9.9823251
sen. h.....	—9.8393262
cos. δ.....	—9.9859649
tan. $(\chi - 45°)$.....	0.0005038—

$\chi - 45° = 134° 58' 00.''4$

$\chi = 179\ 58\ 00.\ 4$

tan. χ.....	6.7633025—
tan. $\frac{1}{2}(g' - g)$.....	1.6116929—
tan. $(m - \frac{1}{2}(g + g'))$.....	8.3749954

$m - \frac{1}{2}(g + g') = +1° 21' 30.''4$

$\frac{1}{2}(g + g') = 221\ 1\ 34.\ 5$

$m = 222° 23' 5''$

Con el valor de m se tendrá:

Azimut de α *Tauri*..... $m - g' = -90° 2' 32''$

Azimut de α *Pegasi*..... $m - g = +92\ 45\ 33$

y suponiendo que al visar una señal se hubiera obtenido..... $G = 287° 52' 43''$, su azimut seria: $u = m - G = -65° 29' 38''$ de Norte al Este, ó bien $294° 30' 22''$ del Norte hácia el Oeste, en el órden de los cuadrantes.

244.—Las graduaciones meridianas m hácia el Norte, y $180° + m$ hácia el Sur, permiten tambien establecer una señal exactamente en el plano del meridiano, pues basta hacer que la alidada indique cualquiera de ellas, y situar la señal en coincidencia con la interseccion de los hilos. Si con el círculo azimutal pueden obtenerse las lecturas aproximadas hasta los segundos, se usa desde luego el valor de m tal como resulta del cálculo; mas si no es así, se establece la alidada en la graduacion mas inmediata, y despues de colocada provisionalmente la señal como se ha indicado, se corrige su posicion como se explicó en la pág. 112 del Tomo I. Suponiendo por ejemplo, que el instrumento solo diese una aproximacion de $10''$, pondriamos en nuestro caso la alidada en $222° 23' 00''$ ó en $222° 23' 10''$, y la señal establecida en esa direccion á la distancia k del telescopio, se moveria en seguida la cantidad $5\,k$ sen. $1''$ hácia la derecha del observador en el primer caso, y hácia su izquierda en el segundo.

245.— Cuando se observa una sola estrella á la misma altura tanto al Este como al Oeste del meridiano, se tiene $\delta = \delta'$, y sus ángulos horarios serán iguales numéricamente y de signos contrarios, por lo que la ecuacion (1) dará: tan. $(x - 45°) = -1$, relacion que corresponde á $x = 0°$ ó á $x = 180°$. En ambos casos se tiene tan. $x = 0$, y por consiguiente la fórmula (2) produce:

$$m = \tfrac{1}{2}(g + g')$$

Este resultado demuestra que la graduacion meridiana es entónces igual al término medio de las dos lecturas del círculo azimutal. Se recordará que este fué uno de los métodos para trazar el meridiano que expuse en la Topografía, y si bien es el mas sencillo por no demandar casi cálculo alguno, tiene el inconveniente de exigir el trascurso de varias horas para terminar la operacion, al ménos si se desea observar la estrella en las mejores condiciones posibles.

CAPITULO XIV.

DETERMINACION DEL AZIMUT.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DEL SOL.

246.— Si se observa el sol á la misma altura de un lado y otro del meridiano de manera que á la vez que su limbo superior ó su limbo inferior toquen alguno de los hilos horizontales, el borde boreal ó el austral sean tangentes al hilo vertical del centro, se podrá tambien determinar la graduacion meridiana m en funcion de las lecturas g' y g del círculo azimutal y del ángulo horario del astro,

obtenido por la semidiferencia de las horas cronométricas correspondientes.

Considerado este método como caso particular del que he expuesto en el Capítulo precedente, seria fácil derivar de las fórmulas que allí se establecieron las que deben aplicarse á las observaciones del sol; pero es tal vez mas sencillo desarrollarlas directamente de este modo. Llamando a el valor numérico del azimut del centro del sol en el instante de la observacion antemeridiana y $a + \triangle a$ el que tiene á la hora de la postmeridiana, consideraré á $\triangle a$ como la variacion originada por el cambio de declinacion del astro; porque si esta coordenada fuera constante, ambos azimutes serian numéricamente iguales, como en el caso de una estrella. Representando, pues, por δ' y δ las declinaciones del sol en los mismos instantes, tendrémos $\triangle \delta = \delta - \delta'$, y por consiguiente:

$$\Delta a = \frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, \delta} \Delta \delta$$

En el número 239 hallamos $\frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, \delta} = - \frac{1}{\cos. \varphi \text{ sen. } h}$, por lo cual designando por $2\,\theta = T - T'$ el tiempo solar trascurrido entre las dos observaciones, la cantidad θ representará el ángulo horario del sol, y así la variacion de su azimut, será:

$$\Delta a = - \frac{\delta - \delta'}{\cos. \varphi \text{ sen. } \theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Siendo ahora m la indicacion meridiana, y teniendo presente que al Este del meridiano los azimutes son negativos, los del borde observado tienen por expresiones:

$$- \left(a \pm \frac{s}{\text{sen. } z} \right) = m - g'$$

$$a + \Delta a \pm \frac{s}{\text{sen. } z} = m - g$$

que dan combinadas por adicion:

$$m = \tfrac{1}{2} (g + g') + \tfrac{1}{2} \Delta a$$

y sustituyendo el valor (1) de $\triangle a$, resulta:

$$m = \tfrac{1}{2} (g + g') - \frac{\delta - \delta'}{2 \cos. \varphi \text{ sen. } \theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La diferencia de declinaciones puede expresarse en funcion del tiempo trascurrido y de la variacion horaria v de la declinacion, interpolada con ayuda de las Efemérides del sol para la hora del medio dia verdadero local (páginas 286 y 359). La expresion de aquella diferencia es, pues: $\delta - \delta' = 2\,\theta\,v$, y en consecuencia la de m será:

$$m = \tfrac{1}{2}(g + g') - \frac{\theta\,v}{\cos.\,\phi\ \text{sen.}\,\theta} \qquad (3)$$

Todavía es posible dar una forma mas sencilla á esta ecuacion introduciendo en ella el coeficiente designado por A en la pág. 358, con lo cual se representará así:

$$m = \tfrac{1}{2}(g + g') - \frac{15\,A\,v}{\cos.\,\phi} \qquad (4)$$

y al aplicarla se tomará con el intervalo $T - T'$ por argumento el log. A de la Tabla IV que va al fin de este libro. El cálculo es tan fácil de esta manera, que me parece innecesario presentar un ejemplo numérico, y solo recordaré que v es positiva desde el solsticio de invierno hasta el de estío, y negativa durante la otra mitad del año.

247.—La fórmula (2) es tambien aplicable al caso de haberse observado dos estrellas por el método del Capítulo anterior, siempre que la diferencian de sus declinaciones no exceda de 1° ó 2°, tomando en tal caso por θ el promedio numérico de sus ángulos horarios. Haciendo uso de los datos del núm. 243, se halla:..... $\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = -3145.''9$ y $\theta = 43°\ 57'\ 13''$, y así tendrémos:

$\frac{1}{2}(\delta - \delta')$.....	3.49774—	
cos. ϕ.....	—9.96670	
sen. θ.....	—9.84141	
	3.68963—	$\frac{1}{2}(g + g') =$ 221° 1′ 34.″5
		+ 1 21 33. 6
		$m =$ 222° 23′ 8.″1

resultado que es casi idéntico al que se obtuvo allí, no obstante el valor considerable de $\delta - \delta'$.

Es claro que lo mismo que en el caso de las estrellas, puede determinarse por medio del sol la hora exacta de la observacion; porque como se anotan las cronométricas correspondientes á la igualdad

de sus alturas, es inmediatamente aplicable el procedimiento que para hallar la correccion del cronómetro se ha expuesto en el Capítulo IX.

CAPITULO XV.

DETERMINACION DE LA LATITUD.—MÉTODO GENERAL CONOCIENDO LA DISTANCIA ZENITAL DE UN ASTRO Y LA HORA DE LA OBSERVACION.

248.—En la pág. 240 he dado una idea general del procedimiento por cuyo medio se obtiene la latitud, y que consiste en medir la distancia zenital de un astro á una hora conocida. Teniendo, en efecto, los datos z, h y δ, pueden aplicarse desde luego las fórmulas (6) de la página citada, que son:

$$\text{tan. } M = \frac{\text{tan. } \delta}{\text{cos. } h} \qquad \text{cos. } (M - \phi) = \frac{\text{sen. } M}{\text{sen. } \delta} \text{ cos. } z \ldots\ldots (1)$$

Por la primera se determina el ángulo subsidiario M; la segunda da $M - \phi$; y por consiguiente se obtendrá: $\phi = M - (M - \phi)$

Este método es el mas general y el que sirve de base á todos los que expondré en los Capítulos siguientes, por lo cual conviene investigar desde ahora las condiciones mas ventajosas de la observacion, bajo el punto de vista de la menor influencia de los pequeños errores que pudieran tener los datos del problema. Siendo el del resultado una funcion de estos, tendrémos:

$$\Delta \phi = \frac{d\phi}{dz} \Delta z + \frac{d\phi}{dh} \Delta h + \frac{d\phi}{d\delta} \Delta \delta$$

Las fórmulas (1) se derivan de la siguiente fundamental, que emplearémos para hallar los coeficientes diferenciales:

$$\cos. z = \text{sen.}\ \phi\ \text{sen.}\ \delta + \cos. \phi \cos. \delta \cos. h$$

Diferenciándola con relacion á ϕ, y sucesivamente respecto de los tres elementos z, h y δ, obtendrémos por medio de sencillas trasformaciones:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{-\text{sen.}\ z}{\cos\phi \,\text{sen}\,\delta - \text{sen}\,\phi \cos\delta \cos h} = \frac{-\text{sen.}\ h}{\text{sen}\, a\,(\cos\phi \tan\delta - \text{sen}\,\phi \cos h)} = -\frac{1}{\cos a}$$

$$\frac{d\phi}{dh} = \frac{\cos.\ \phi\ \text{sen.}\ h}{\cos.\ \phi\ \tan.\ \delta - \text{sen.}\ \phi\ \cos.\ h} = \cos.\ \phi\ \tan.\ a$$

$$\frac{d\phi}{d\delta} = \frac{\cos.\ \phi\ \tan.\ \delta \cos.\ h - \text{sen.}\ \phi}{\cos.\ \phi\ \tan.\ \delta - \text{sen.}\ \phi\ \cos.\ h} = \frac{\cos.\ \phi\ \tan.\ a}{\text{sen.}\ h}\ (\tan.\ \delta \cos.\ h - \tan.\ \phi)$$

249.—Estos coeficientes manifiestan que en general la influencia de los errores decrece con el azimut del astro. El primero nunca es nulo; pero adquiere el menor valor posible cuando a es igual á 0° ó á 180°. En tales casos $\frac{d\phi}{dz}$ será respectivamente igual á—1 ó á+1, lo cual significa que el error resultante en la latitud es el mismo que el que tenga la distancia zenital siempre que se observe el astro en el momento de su culminacion. En cualquiera otro azimut, $\triangle\,\phi$ resultará mayor que $\triangle\, z$, aunque siendo a pequeño ó muy próximo á 180°, puede suponerse que el coeficiente tiene la unidad por valor constante. De aquí se deduce que para que el error de la latitud no exceda del que pueda tener z, deben observarse los astros tan cerca del meridiano como sea posible, y nunca en las inmediaciones del primer vertical.

El segundo coeficiente se nulifica cuando a sea de 0° ó de 180°, lo cual recomienda igualmente que las observaciones que tengan por objeto la determinacion de la latitud se hagan en los momentos de la culminacion del astro, ó por lo ménos cuando sea pequeño su azimut.

El tercer coeficiente puede considerarse compuesto de dos factores: el primero $\frac{\cos.\ \phi\ \tan.\ a}{\text{sen.}\ h}$ solo puede ser nulo siéndolo tan. a; pero como en tal caso tambien h es igual á 0° ó á 180°, resulta que ese factor se presentará bajo la forma de la indeterminacion. Esto no obstante, será muy pequeño su valor siempre que sea poco considerable el azimut y próximo á 90° el ángulo horario; circunstancias

que se reunen en las circumpolares observadas cerca de sus elongaciones. El segundo factor tan. δ cos. h — tan. ϕ se reduce á 0 cuando es recto el ángulo paraláctico, pues entónces se tiene:..... cot. δ = cot. ϕ cos. h. En consecuencia, del estudio de ambos factores se deduce que un pequeño error en la declinacion del astro no tiene influencia sensible siendo este una estrella circumpolar observada en los momentos de sus elongaciones.

Atendiendo á que $\frac{\text{tan. } a}{\text{sen. } h} = \frac{1}{\text{tan. } \delta \text{ cos. } \phi - \text{sen. } \phi \text{ cos. } h}$, el mismo coeficiente puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{d\,\phi}{d\,\delta} = \frac{\text{cos. } \phi \text{ tan. } \delta \text{ cos. } h - \text{sen. } \phi}{\text{cos. } \phi \text{ tan. } \delta - \text{sen. } \phi \text{ cos. } h}$$

y por ella se ve que cuando $h = 0°$, ó bien $h = 180°$, resulta..... $\frac{d\,\phi}{d\,\delta} = +1$, ó $\frac{d\,\phi}{d\,\delta} = -1$ respectivamente, lo cual manifiesta que el error de la latitud es igual al que tenga la declinacion siempre que se observe el astro en los instantes de sus tránsitos por el meridiano. De aquí se infiere que observando una estrella cerca de la culminacion, la influencia de $\triangle\ \delta$ es mayor que cuando se observa con la proximidad de sus elongaciones ó digresiones; pero debe tenerse presente que como para determinar la latitud siempre se emplean estrellas cuyas posiciones son muy bien conocidas, tales como las llamadas *fundamentales*, que son las que constan en todas las Efemérides, pueden considerarse nulos los errores de sus declinaciones, y en consecuencia prescindirse de la condicion favorable á la menor influencia de este error, para atender preferentemente á las que se refieren á los otros errores $\triangle\ z$ y $\triangle\ h$, que son los que puede cometer el observador por ser los datos que obtiene por medidas directas. Así, pues, como resultado general del análisis precedente, estableceremos la regla de que cuando el objeto de las observaciones sea el de determinar la latitud, conviene tomar las distancias zenitales tan cerca del meridiano como sea posible.

250.— Es preciso tener presente que en esas circunstancias las variaciones de altura no pueden suponerse proporcionales á los intervalos de tiempo trascurridos entre las observaciones, al ménos cuando sean algo cosiderables; y así es que tomando una serie de distancias zenitales no deberá mirarse su promedio como correspondiente al de las horas respectivas, si la observacion dura mas de 4^m

ó 5^m Lo mas conveniente en tales casos es agrupar los datos en series parciales, de manera que sus horas extremas no difieran sino unos cuantos minutos; ó bien calcular individualmente cada una de las observaciones aplicando las fórmulas (1) con valores simultáneos de h y z, lo cual es fácil siempre que conociendo el efecto de la colimacion vertical, pueda usarse el círculo en una sola posicion. Lo es igualmente siempre que se trabaje con sextante; pero si se miden las distancias zenitales con círculo repetidor, lo que debe hacerse es procurar hacer pronto dobles observaciones, leyendo la graduacion del círculo al fin de cada observacion de órden par. Entónces la mitad del ángulo recorrido por la alidada, da la distancia zenital aparente del astro, que sin error de importancia puede suponerse correspondiente al promedio de las dos indicaciones del cronómetro siendo pequeña la diferencia de estas. Por otra parte, en la pág. 105 y siguientes de mis "Nuevos Métodos Astronómicos" puede verse el modo de corregir el promedio de las horas para hacerlo correspondiente al de las distancias zenitales cuando sea algo considerable la duracion de la serie de observaciones.

251.— Presentemos ahora algunos ejemplos de este método para determinar la latitud. El 26 de Mayo de 1857 observé en Mixcoac la estrella β *Ursæ minoris* fuera del meridiano con un círculo repetidor y un cronómetro solar que á la hora de la observacion tenia un adelanto de $2^m\ 1^s.76$. La distancia zenital corregida por los errores del instrumento y por la refraccion fué $z = 59°\ 50'\ 41.''2$ y la hora cronométrica la que va á continuacion. La posicion de la estrella era: $\alpha = 14^h\ 51^m\ 16^s.29$ y $\delta = +\ 74°\ 44'\ 18.''9$.

$t =$	$7^h\ 43^m\ 55^s.62$	tan. δ....	0.5640834
$\Delta t =$	$-2\quad 1.76$	cos. h....	-9.8658563
Hora media =	$7\ 41\quad 53.86$	tan. M...	0.6982271
Asc. recta =	$4\ 17\quad 5.50$		
Acel. =	$+1\quad 15.88$	$M = 78°\ 40'\ 16.''3$	
Hora sideral =	$12^h\ 00^m\ 15^s.24$		
$\alpha =$	$14\ 51\quad 16.29$		
$h =$	$-\ 2^h\ 51^m\ 1^s.05$		
	$-42°\ 45'\ 15.''7$		

sen. M.....	9.9914547
cos. z.....	9 7010015
sen. δ.....	-9.9844080
cos. $(M-\phi)$...	9.7080482
$M - \phi =$	$59°\ 17'\ 55.''5$
$M =$	$78\ 40\ 16.\ 3$
$\phi =$	$19°\ 22'\ 20.''8$

En la misma estacion tomé el 23 de Junio de 1857 la distancia zenital de la estrella polar despues de su tránsito inferior. Los da-

tos corregidos como ántes fueron $z = 71° 52' 31.''0$ y la hora sideral correspondiente, $T = 15^h 10^m 56.^s96$. La posicion de α *Ursæ minoris* era: $\alpha = 1^h 6^m 40.^s80$ y $\delta = 88° 32' 41.''5$. Se tendrá, pues:

$T =$	$15^h 10^m 56^s 96$	tan. δ....	1.5951249	sen M.....	9.9998967
$\alpha =$	$1 \quad 6 \quad 40.80$	cos. h....	—9.9327586—	cos. z.....	9.4928812
				sen. δ.....	—9.9998599
$h =$	$-\ 9^h 55^m 43.^s84$	tan. M...	1.6623663—		
	$-\ 148° 55' 57.''6$	$M =$	$91° 14' 47.''4$	cos. $(M-\phi)$	9.4929180
		$M-\phi =$	$71 \quad 52 \quad 25. \quad 3$		
		$\phi =$	$19° 22' 22.''1$		

252.—Hemos visto que el coeficiente $\frac{d\varphi}{dz}$ es sensiblemente igual á -1 ó á $+1$, segun que el azimut del astro se acerque á 0° ó á 180°; y de esto se infiere que un mismo error en la distancia zenital produce errores contrarios en la latitud, segun que el astro observado esté al Norte ó al Sur del zenit; y por consiguiente, que el promedio de los resultados que se obtengan observando estrellas que culminen unas hácia el Norte y otras hácia el Sur de aquel punto, puede suponerse independiente del error mencionado. Este principio se acerca tanto mas á la verdad, cuanto menor sea la diferencia de las distancias zenitales de dos estrellas que se observen de esa manera; porque parece bien comprobado que especialmente los instrumentos de grandes dimensiones suelen producir pequeños errores angulares cuya magnitud depende del ángulo formado por el telescopio con el horizonte, los cuales se atribuyen á una ligera flexion del tubo, originada por el peso del objetivo. Segun esto, para distancias zenitales iguales, adquiere el error el mismo valor numérico, y en consecuencia quedará completamente eliminado del promedio de los resultados obtenidos por dos estrellas que culminen á la misma altura próximamente y hácia distintos lados respecto del zenit. La misma deduccion debe hacerse respecto de los errores originados por alguna inexactitud en el valor de la refraccion, y en general, respecto de cualquiera causa que tienda á alterar el elemento z en una cantidad ya sea constante ó ya variable con su magnitud.

Para terminar lo relativo á este método dirémos que por ser z, δ y h los elementos del problema, quiere decir, dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, su resolucion corresponde en la trigonometría á un caso dudoso; pero como siempre, se sabe con suficiente

aproximacion cuál debe ser el valor del resultado ϕ, me parece inútil entrar en la discusion de las circunstancias en que haya dos soluciones ó una sola; porque siempre se sabrá cuál de los valores de ϕ es el que debe admitirse.

253.— Las principales condiciones favorables al método de que tratamos para determinar la latitud se cumplen observando el astro en el momento de su paso por el meridiano. Suponiendo, pues, $h = 0°$ en las fórmulas (1), resulta $M = \delta$, y designando por ζ la distancia zenital meridiana de la estrella, hallarémos: ..... cos. $(\delta - \phi) =$ cos. ζ, ecuacion que queda satisfecha para $\zeta = \delta - \phi$ y tambien para $\zeta = \phi - \delta$. Por consiguiente, observando la distancia zenital meridiana, que ya corregida por refraccion, nivel, &c., he designado por ζ, se obtendrá la latitud por las sencillísimas fórmulas que siguen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Por las culminaciones al S. del zenit} & \phi = \delta + \zeta \\ \text{Por las culminaciones al N. del zenit} & \phi = \delta - \zeta \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$$

En los tránsitos inferiores de las circumpolares se tiene $h = 180°$, en cuyo caso resulta por las fórmulas (1): tan. $M =$ — tan. δ, y por lo mismo $M = 180° - \delta$, de lo cual se infiere que ..... $\zeta = 180° - (\delta + \phi)$. Así, pues:

$$\text{Por los tránsitos sub-polares} \ldots\ldots \phi = 180° - (\delta + \zeta) \ldots\ldots (3)$$

Estos valores se obtienen tambien fácilmente por medio de la consideracion del lugar que ocupe el astro respecto del zenit. Sea Z (fig. 49ª) este punto, P el polo y E la interseccion del ecuador y del meridiano: una estrella que culmine en a al sur de Z, tendrá por distancia zenital meridiana $\zeta = Z\,a$, siendo su declinacion. . . . $\delta = E\,a$. Por consiguiente, la latitud $\phi = E\,Z$ tiene por valor: . . $\phi = E\,a + a\,Z = \delta + \zeta$. La misma fórmula se aplica si culmina la estrella en a', pues aunque la figura da: $\phi = Z\,a' - E\,a'$, como en tal caso la declinacion $E\,a'$ es negativa, se tendrá siempre algebraicamente: $\phi = \delta + \zeta$ como ántes.

Si el astro culmina en b, entre el zenit y el polo, su declinacion es $E\,b$, y así es que resulta: $E\,Z = E\,b - Z\,b$, ó bien: $\phi = \delta - \zeta$.

Finalmente, en el caso del tránsito inferior de una circumpolar

c, puesto que $E\,P\,c = 180° - \delta$, se tiene $E\,Z + Z\,c = 180° - \delta$, de donde $\phi = 180° - (\delta + \zeta)$.

Este procedimiento, llamado de distancias zenitales meridianas, es independiente de la hora; pero su aplicacion supone, sin embargo, muy bien conocida la cronométrica del tránsito, á fin de practicar la observacion precisamente en ese instante. Por lo general algunos segundos ántes de la hora se corta la estrella con el hilo horizontal de la retícula, en el cual se mantiene por medio del movimiento del tornillo de aproximacion del círculo vertical. Moviendo al mismo tiempo el del círculo horizontal, se hace de manera que en el momento del tránsito, señalado por el cronómetro, quede la estrella en la interseccion de los hilos centrales, vertical y horizontal. La graduacion que se obtenga, corregida por la colimacion vertical, error del índice, niveles, &c., y en seguida por la refraccion, suministra el valor de ζ para aplicar aquella de las fórmulas (2) y (3) que convenga al caso.

Ejemplo.—El 17 de Junio de 1857 obtuve $\zeta = 29° 47' 25.''0$ por distancia zenital meridiana de α *Virginis*, cuya declinacion era . . . $\delta = -10° 25' 4.''4$. La latitud del lugar será en consecuencia segun esta observacion:

$$\begin{array}{rr} \zeta = & 29° 47' 25.''0 \\ \delta = & -10\ 25\ 4.\ 4 \\ \hline \phi = & 19° 22' 20.''6 \end{array}$$

Para eliminar la influencia de algun pequeño error angular observé la misma noche al Norte del zenit la estrella η *Ursæ majoris* que tenia por declinacion $\delta = +50° 1' 43.''4$, habiendo obtenido $\zeta = 30° 39' 28.''6$. El resultado de esta observacion es por consiguiente:

$$\begin{array}{rr} \delta = & +50° 1' 43.''4 \\ \zeta = & 30\ 39\ 28.\ 6 \\ \hline \phi = & 19° 22' 14.''8 \end{array}$$

El promedio de ambos resultados será, pues: $\phi = 19° 22' 17.''7$, que podrá suponerse independiente del error angular, por ser casi iguales las distancias de las dos estrellas al zenit. La semidiferencia $2.''9$ representará el monto del error para $\zeta = 30°$ próximamente, y seria sustractivo para las indicaciones del instrumento.

254.—El método de distancias zenitales meridianas es uno de los que se emplean de preferencia en los Observatorios permanentes, sirviéndose sobre todo de los dobles tránsitos de las circumpolares; porque de esa manera resulta la latitud independiente de las declinaciones de las estrellas, y en consecuencia de los leves errores que puedan tener sus posiciones tabulares. Observando, en efecto, una circumpolar en su tránsito superior se obtiene segun vimos:

$$\phi = \delta - \zeta$$

y siendo ζ' la distancia zenital en su paso subpolar, se tendrá igualmente:

$$\phi = 180° - (\delta' + \zeta')$$

En esta ecuacion he representado por δ' la declinacion de la estrella en atencion á que puede diferir algo de δ, que era su valor en el paso superior, cuando entre las observaciones trascurra un tiempo considerable. La semisuma de ambos valores de ϕ produce:

$$\phi = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Esta fórmula manifiesta que en el resultado medio solo figura la semidiferencia de las declinaciones de la estrella, cantidad siempre muy pequeña y que se obtiene exactamente de las Efemérides, aun cuando tengan algun error los valores de δ y δ'.

Las observaciones de los dos tránsitos tambien suministra la ecuacion:

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta)$$

que da á conocer la declinacion de la estrella, ó con mas propiedad, el promedio de sus valores; pero de este se deduce. . . . . $\delta = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) + \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$. Las ventajas de servirse de este procedimiento consisten, pues, en hallar la latitud sin necesidad de valerse de las posiciones de las estrellas determinadas en otros Observatorios, y en corregir á la vez las posiciones mismas que constan en las Tablas Astronómicas.

CAPITULO XVI.

DETERMINACION DE LA LATITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES CIRCUNMERIDIANAS.

255.—El inconveniente que presentan las observaciones meridianas tales como ántes se han expuesto, es el de no permitir la repeticion de la medida de las distancias zenitales, puesto que la única que se obtiene corresponde á un instante determinado, que es el del tránsito del astro. Este inconveniente es mas grave al operar con instrumentos portátiles, cuyas lecturas angulares no dan á veces la aproximacion necesaria para proporcionar el valor de ζ exacto hasta los segundos en una sola observacion. Por esta razon el método de distancias zenitales meridianas se emplea raras veces en las estaciones ú observatorios temporales, prefiriéndose generalmente el llamado de distancias zenitales circunmeridianas, por cuyo medio se deduce el valor de ζ de muchas observaciones del astro ejecutadas ántes y despues de su paso por el meridiano. De esta manera, y en virtud del principio de que la repeticion de medidas suministra siempre promedios mas ó ménos independientes de los pequeños errores accidentales, se tiene cierta seguridad de llegar á un valor de ζ suficientemente exacto, aun sirviéndose de instrumentos que solo aproximen las lecturas á $10''$.

Con el fin de desarrollar el cálculo necesario para la aplicacion de este método, notemos que, tratándose de un tránsito superior, la distancia zenital meridiana ζ es menor que cualquiera otra distan-

cia zenital z obtenida fuera del meridiano; y que por el contrario, en un paso subpolar ζ es mayor que z. Si llamamos, pues, x la diferencia entre la distancia zenital medida z y la meridiana ζ, la primera podrá representarse por $\zeta + x$, y en el instante de la observacion se tendrá la ecuacion siguiente:

$$\text{cos. } (\zeta + x) = \text{sen. } \phi \text{ sen. } \delta + \text{cos. } \phi \text{ cos. } \delta \text{ cos. } h$$

Sustituyendo $1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} h$ en vez de cos. h resulta:

$$\text{cos. } (\zeta + x) = \text{sen. } \phi \text{ sen. } \delta + \text{cos. } \phi \text{ cos. } \delta - 2 \text{ cos. } \phi \text{ cos. } \delta \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} h$$

Los primeros términos del segundo miembro equivalen á cos. $(\delta - \phi)$ ó á cos. $(\phi - \delta)$, y como ambos arcos representan la distancia zenital meridiana, podrémos escribir así la ecuacion anterior:

$$\text{cos. } (\zeta + x) = \text{cos. } \zeta - 2 \text{ cos. } \phi \text{ cos. } \delta \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} h$$

Tratándose de un tránsito inferior cos. h será negativo, en cuyo caso los dos términos mencionados equivalen á $-$ cos. $(\phi + \delta)$; pero como tambien se tiene entónces $\zeta = 180° - (\phi + \delta)$, se infiere que siempre aquellos representan el valor de cos. ζ. A fin de considerar á la vez los tránsitos superiores y los inferiores, tomarémos por ecuacion general:

$$\text{cos. } (\zeta + x) = \text{cos. } \zeta \mp 2 \text{ cos. } \phi \text{ cos. } \delta \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} h$$

Desarrollando ahora el primer miembro, y teniendo presente que por ser x un ángulo siempre muy pequeño, se podrá hacer uso de los desarrollos de su seno y su coseno, se tendrá hasta los términos de segundo órden:

$$x \text{ sen. } \zeta + \tfrac{1}{2} x^2 \text{ cos. } \zeta = \pm 2 \text{ cos. } \phi \text{ cos. } \delta \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} h$$

Resolverémos esta ecuacion por el método de aproximaciones sucesivas, de modo que expresando en segundos el arco x, se tendrá por primera aproximacion:

$$x = \pm \frac{\text{cos. } \phi \text{ cos. } \delta}{\text{sen. } \zeta} \cdot \frac{2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} h}{\text{sen. } 1''}$$

y sustituido este valor, expresado en partes del radio, en el término de segundo órden de la ecuacion anterior, resulta el mas exacto, convertido en segundos:

$$x = \pm \frac{\cos.\phi \cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta} \cdot \frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} - \left(\frac{\cos.\phi \cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta}\right)^2 \cot.\zeta \cdot \frac{2\,\text{sen.}^4\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

256.—Este valor de x, llamado *reduccion al meridiano*, suministra toda la precision necesaria en las observaciones mas delicadas. Si por abreviacion hacemos.

$$C = \frac{\cos.\phi \cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta} \qquad m = \frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} \qquad n = \frac{2\,\text{sen.}^4\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} \ldots\ldots (1)$$

la reduccion al meridiano tiene por expresion:

$$x = \pm\, C\,m - C^2\,n \cot.\zeta \ldots\ldots (2)$$

y como supusimos $z = \zeta + x$, el valor de la distancia zenital meridiana será:

$$\zeta = z \mp C\,m + C^2\,n \cot.\zeta \ldots\ldots (3)$$

representando z la observada fuera del meridiano, aunque no muy léjos de este plano. El signo $(\mp)$ se toma para los tránsitos $\begin{pmatrix}\text{superiores.}\\ \text{inferiores.}\end{pmatrix}$

Debe advertirse que si bien ζ, que es precisamente la incógnita, figura en el valor de C y en el último término de la reduccion, se hace uso de un valor puramente aproximativo deducido de la latitud tambien aproximativa de la estacion, pues se tiene (núm. 253):

Para los tránsitos al S. del zenit..... $\zeta = \phi - \delta$
„ „ „ al N. „ „ ..... $\zeta = \delta - \phi$
„ „ „ subpolares..... $\zeta = 180^\circ - (\delta + \phi)$

Casi siempre se conoce la latitud con la aproximacion suficiente para obtener de esta manera un valor de ζ que basta para suministrar el de x con toda la exactitud necesaria; y entónces la ecuacion (3) da á conocer la verdadera distancia zenital meridiana, por cuyo

medio se calcula la latitud, aplicando las fórmulas (2) y (3) del Capítulo precedente, á saber.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En los pasos al S. del zenit} \ldots\ldots \phi = \delta + \zeta \\ \text{En los pasos al N. del zenit} \ldots\ldots \phi = \delta - \zeta \\ \text{En los pasos inferiores ó sub-polares} \ldots\ldots \phi = 180^\circ - (\delta + \zeta) \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Si acaso la latitud así obtenida fuere muy diferente de la supuesta al principio del cálculo, se repite este haciendo uso del valor suministrado por el primero. La repeticion, sin embargo, pocas veces es necesaria, por ser bastante raro que el astrónomo no conozca su latitud con 1′ ó 2′ de aproximacion.

Los valores de m y de n se han reducido á Tabla de la cual se toman con el pequeño ángulo h, expresado en tiempo, por argumento. Las Tablas V y VI del fin contienen estos valores.

257.— Por lo comun no se hace una sola observacion circunmeridiana, sino varias ántes y despues del tránsito del astro, anotando sus distancias al zenit y las horas cronométricas correspondientes. Estas, comparadas con la hora tambien cronométrica del paso, da á conocer los pequeños ángulos horarios h con los cuales se toman los valores de m y n para aplicar las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), segun se ha explicado. Procediendo así, se reduce por separado cada una de las observaciones, lo cual tiene la ventaja de poder apreciar su concordancia; pero es mas fácil ejecutar el cálculo con los promedios de los valores de z tomando por m y n los promedios de los valores que corresponden á las diversas observaciones. Este último medio es el único que puede emplearse cuando es repetidor, y se usa como tal el instrumento angular, en atencion á que el elemento que suministra es la distancia zenital media. Es claro que el valor de z que figura en nuestras ecuaciones representa la distancia zenital verdadera, ó sea corregida por los errores instrumentales, por la refraccion y por paralaje y semidiámetro (pág. 269) si estos ángulos son apreciables en el astro observado. En este caso se halla el sol, que es casi el único de los astros que tienen semidiámetro y paralaje apreciables, que se emplea con frecuencia para determinar la latitud por este método. El efecto del semidiámetro se elimina observando alternativamente é igual número de veces el borde superior y el inferior.

258.—Deducidos los valores de h de las indicaciones cronométricas, es preciso atender á la marcha del instrumento, así como á la especie de tiempo que señala, á fin de obtener los verdaderos ángulos horarios convenientemente expresados, quiere decir, en tiempo solar si se observa el sol y en tiempo sideral si se trata de una estrella. Para no verse en la necesidad de corregir uno á uno los ángulos horarios que da el cronómetro, es preferible emplearlos tales como resultan de la comparacion de las indicaciones de este instrumento respecto de la que corresponde al tránsito del astro, y llevar en cuenta la correccion de esta manera. El cronómetro por la hipótesis no señalando exactamente 24^h entre dos pasos sucesivos del astro, sea v la cantidad que atrasa en $24^h = 86400^s$, y h el ángulo horario que da. Se tiene en consecuencia: $86400 - v : 86400 :: h : h'$. De aquí resulta:

$$\frac{h'}{h} = \frac{86400}{86400 - v} = \frac{1}{1 - \frac{v}{86400}} = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)$$

Por consiguiente el valor que debe entrar en el cálculo es el de h'; pero como por ser siempre pequeños los ángulos horarios, se tiene sensiblemente: $\frac{h'}{h} = \frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,h'}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,h}$, resultará:

$$\frac{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,h'}{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,h} = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)^2 = k$$

y representando por k esta relacion, tendrémos:

$$k = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)^2 = 1 + 0.000023\,v \qquad \text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}\,h' = k\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}\,h \ldots\ldots (5)$$

los logaritmos de k constan en nuestra Tabla VII, que tienen por argumento la variacion diaria del cronómetro, desde $v = -30^s$ hasta $v = +30^s$, quiere decir, desde un adelanto de medio minuto hasta un atraso de la misma cantidad en 24^h.

Cuando se observa una estrella empleando cronómetro solar, es necesario considerar que ademas de su variacion diaria, atrasa..... $3^m\ 56^s$ en el dia sideral; y así designando por i el valor de k correspondiente á $v = 236^s$, se halla: log. $i = 0.00237$. Recíprocamente, si se observa el sol con cronómetro sideral, ademas del factor k que corresponda á su marcha, se le considerará un adelanto

diario de 236^s respecto del dia solar; y así, con $v = -236^s$, se encuentra log. $i = 9.99762$. Ademas de esto, como el dia medio y el dia verdadero difieren entre sí tanto como varia diariamente la ecuacion del tiempo E, si ΔE es su incremento en 24^h, debemos suponer que $v - \Delta E$ es la marcha diaria del cronómetro respecto del dia verdadero; y así el valor de k será:

$$k' = 1 + 0.000023\ (v - \Delta E)$$

que se toma de la Tabla con el argumento $v - \Delta E$. En cuanto al signo de E, y por consiguiente de su incremento, véase la pág. 243. En resúmen, siendo $C' = \frac{\cos.\ \phi\ \cos.\ \delta}{\text{sen.}\ \zeta}$, el factor de m en la fórmula (3) será:

Para una estrella observada con cronómetro sideral.....	$C =$	$C'\,k$
,, ,, ,, ,, ,, ,, solar.....	$C =$ (0.00237)	$C'\,k$
,, el sol observado con cronómetro solar.....	$C =$	$C'\,k'$
,, ,, ,, ,, ,, ,, sideral.....	$C =$ (9.99762)	$C'\,k'$

Respecto de δ, que forma parte de las fórmulas (4), cuando se observa un astro que como el sol varia sensiblemente de declinacion en el tiempo que duran las observaciones, se toma δ igual al promedio de las declinaciones correspondientes á las diversas horas anotadas, ó lo que es lo mismo, δ representa la declinacion que corresponde al promedio de las horas de las observaciones.

Ejemplo.—Presentemos el siguiente para que se comprenda bien todo el procedimiento. El 1º de Mayo de 1860 observé la estrella polar (α *Ursæ minoris*) cerca de su tránsito inferior sirviéndome de un cronómetro solar cuya variacion diaria era de $-1^s.4$. El instrumento angular era un altazimut con micrómetros que daban los ángulos con aproximacion de $1''$.

CRONOMETRO.	ALTAZIMUT.	NIVEL.	
		$O\,c$	$O\,b$
$10^h\ 18^m\ 57^s$	$b = 72°\ 00'\ 10.''5$	69	61
,, 22 11	$a = 18\ \ 3\ 25.\ 0$	70	60
,, 25 26	$b = 72\ 00\ 17.\ 0$	64	67
,, 28 21	$a = 18\ \ 3\ 17.\ 5$	62	68

Atendiendo al estado del cronómetro, su indicacion en el instante del tránsito subpolar de la estrella, era $10^h\ 28^m\ 5^s$. Para hallar los

valores de h, y por consiguiente los de m y n, dispondrémos, pues, los datos como sigue:

Hora del paso = $10^h\ 28^m\ 5^s$		h	m (Tabla V)	n (Tabla VI)
Observaciones.....	10 18 57	$-9^m\ 8^s$	163.″8	0.″1
„	22 11	−5 54	68. 3	0. 0
„	25 26	−2 39	13. 8	0. 0
„	28 21	+0 16	0. 1	0. 0
		Promedios.....	$m = 61.''5$	..... $n = 0.''0$

Como el altazimut daba distancias zenitales en la primera posicion y alturas en la segunda, y ademas cada division del nivel valia 1″, las dos primeras y las dos últimas observaciones dan respectivamente por distancia zenital aparente de la estrella:

$$z' = 71^\circ\ 58'\ 22.''75 + 4.''50 = 71^\circ\ 58'\ 27.''25$$
$$z' = 71\ \ 58\ \ 29.\ \ 75 - 2.\ \ 25 = 71\ \ 58\ \ 27.\ \ 50$$

Adoptemos el término medio $z' = 71^\circ\ 58'\ 27.''37$ de los dos resultados, puesto que tambien tomamos los promedios de los valores de m y n. Segun las indicaciones del barómetro y del termómetro, y atendiendo al valor de z' la refraccion (pág. 259) era..... $r = 2'\ 16.''37$, por lo cual la distancia zenital verdadera de la estrella será $z = z' + r = 72^\circ\ 00'\ 43.''7$.

El lugar de la observacion es el extremo occidental de la base del Valle, y tiene por latitud $\phi = 19^\circ\ 25'\ 23''$; pero para que se vea la poca influencia que tiene en ciertos casos un error en ϕ, tomemos $19^\circ\ 20'$ por latitud aproximativa para calcular el valor tambien aproximativo de ζ, que entra en la fórmula (3). La declinacion de la estrella era $\delta = 88^\circ\ 33'\ 51.''0$, y puesto que se trata de un tránsito subpolar, tendrémos:

$$\delta = 88^\circ\ 33'\ 51''$$
$$\phi = 19\ \ 20\ \ 00$$
$$\delta + \phi = 107\ \ 53\ \ 51$$
$$180$$
$$\zeta = 72^\circ\ \ 6'\ \ 9''$$

Calculemos ahora la reduccion al meridiano por la ecuacion (2), que se reduce en este caso á su primer término, puesto que $n = 0$;

en seguida la distancia zenital meridiana por la (3) y finalmente la latitud por la última de las (4).

Const.....	0.00237	$z =$	72° 00′ 43.″7
k (Tabla VII)....	9.99999	$x =$	+ 1. 5
cos. ϕ.....	9.97479		
cos. δ.....	8.39894	$\zeta =$	72° 00′ 45.″2
sen. ζ.....	—9.97846	$\delta =$	88 33 51. 0
C.....	8.39763	$\delta + \zeta =$	160° 34′ 36.″2
m.....	1.78887		180°
x.....	0.18650	$\phi =$	19° 25′ 23.″8

Como el resultado del cálculo difiere mas de 5′ de la latitud supuesta al principio, debe repetirse con $\phi = 19° 25′ 20″$ y $\zeta = 72° 00′ 50″$ próximamente; pero en el caso actual, sin embargo, se obtendria el mismo resultado que ántes á causa de la pequeñez de C. No siempre sucede lo mismo, pues el error del supuesto tiene en general una influencia creciente á medida que disminuye la distancia zenital; pero en los casos mas desfavorables la repeticion del cálculo suministra el verdadero valor de x. Por otra parte, el error de la latitud supuesta nunca puede ser tan grande como el que admitimos en el ejemplo precedente; porque es claro que al calcular la reduccion al meridiano puede tomarse por ζ la menor de las distancias zenitales observadas, si se trata de pasos superiores, ó bien la mayor en los tránsitos subpolares. Así en nuestro caso, suponiendo..... $\zeta = 72° 00′ 44″$, hallariamos $\phi = 19° 25′ 25″$ por latitud aproximativa para determinar la reduccion x, quiere decir, valores casi exactos y que evitarian en consecuencia la repeticion del cálculo.

259.— En la aplicacion que antecede se adoptó el promedio de las distancias zenitales obtenidas por la observacion, el cual se combinó tambien con la reduccion al meridiano que resulta del promedio de los valores de m. Este procedimiento es, segun dijimos, el que se sigue habitualmente cuando se opera con círculo repetidor, el cual solo suministra la distancia zenital media; ó bien cuando operando con altazimut, no se conoce el efecto de la colimacion vertical, y por consiguiente no pueden deducirse las distancias zenitales que corresponden á cada una de las observaciones individuales. Cuando no es así, es tambien muy fácil obtener por separado la latitud que resulta de cada observacion; porque basta para esto calcular una á una las reducciones con el mismo valor de C, y el de m que corres-

ponda á cada ángulo horario. Haciéndolo así, hallariamos para las cuatro observaciones de nuestro ejemplo:

$$x = +4.''1 \qquad x = +1.''7 \qquad x = +0.''3 \qquad x = 0.''0$$

Aunque de este modo es un poco mas largo el cálculo, se tiene la ventaja de poder comparar entre sí los diversos resultados individuales, con el fin de desechar aquel ó aquellos que presenten una discordancia notable respecto de los demas.

260.— He indicado repetidas veces el modo de determinar la colimacion vertical por medio de la observacion de un objeto distante ó de la retícula de un colimador en las dos posiciones del círculo; pero tambien se consigue el mismo resultado observando un astro y reduciendo cada observacion al meridiano por el método que nos ocupa. Sean, en efecto, b y a las indicaciones del altazimut en las posiciones en que da distancias zenitales y alturas respectivamente; c la colimacion vertical, r y r' las refracciones, n y n' las inclinaciones que señala el nivel paralelo al círculo, esto es: $n = \frac{1}{2}(o - e)v$, y $n' = \frac{1}{2}(o' - e')v$ y finalmente x y x' las reducciones al meridiano. Las distancias zenitales meridianas que se deducen de las dos observaciones, serán:

$$\begin{aligned} \zeta &= (b + c) + n + r \mp x \\ \zeta &= (90° - a - c) + n' + r' \mp x' \end{aligned}$$

que combinadas por adicion y sustraccion, producen:

$$\begin{aligned} \zeta &= 45° + \tfrac{1}{2}(b - a) + \tfrac{1}{2}(n + n') + \tfrac{1}{2}(r + r') \mp \tfrac{1}{2}(x + x') \\ c &= 45° - \tfrac{1}{2}(b + a) + \tfrac{1}{2}(n' - n) + \tfrac{1}{2}(r' - r) \pm \tfrac{1}{2}(x - x') \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, la primera da á conocer la latitud combinando el valor de ζ con el de δ, como se ha hecho anteriormente; y la segunda suministra el valor de la colimacion en el sentido vertical. Esta última cantidad permite el cálculo de la latitud por cada una de las observaciones, aplicándola con todas las demas correcciones á las lecturas a y b del círculo, segun lo indican los valores primitivos de ζ.

En nuestro ejemplo de la estrella polar, habiéndose hecho dos observaciones en cada posicion del círculo, podrémos hallar el va-

lor de c combinando la primera observacion con la segunda y la tercera con la cuarta, de este modo, suponiendo la refraccion igual en todas ellas:

	PRIMERA Y SEGUNDA.	TERCERA Y CUARTA.
$45° - \frac{1}{2}(b + a)$	$-1'\ 47.''75$	$-1'\ 47.''25$
$+ \frac{1}{2}(n' - n)$	$+\ 0.\ 50$	$-\ 0.\ 75$
$- \frac{1}{2}(x - x')$	$-\ 1.\ 20$	$-\ 0.\ 15$
	$c = -1'\ 48.''45$	$c = -1'\ 48.''15$

Adoptando el término medio $c = -1'\ 48.''30$, y recordando que $r = 2'\ 16.''37$, se hallarán los siguientes resultados por cada una de las observaciones:

	PRIMERA.	SEGUNDA.	TERCERA.	CUARTA.
b ó $90° - a$	$72°\ 00'\ 10.''5$	$71°\ 56'\ 35.''0$	$72°\ 00'\ 17.''0$	$71°\ 56'\ 42.''5$
c	$-\ 1\ 48.\ 3$	$+\ 1\ 48.\ 3$	$-\ 1\ 48.\ 3$	$+\ 1\ 48.\ 3$
n	$+\ 4.\ 0$	$+\ 5.\ 0$	$-\ 1.\ 5$	$-\ 3.\ 0$
r	$+\ 2\ 16.\ 4$	$+\ 2\ 16.\ 4$	$+\ 2\ 16.\ 4$	$+\ 2\ 16.\ 4$
x	$+\ 4.\ 1$	$+\ 1.\ 7$	$+\ 0.\ 3$	$+\ 0.\ 0$
ζ	$72°\ 00'\ 46.''7$	$72°\ 00'\ 46.''4$	$72°\ 00'\ 43.''9$	$72°\ 00'\ 44.''2$
$180° - \delta$	$91\ 26\ 9.\ 0$	$91\ 26\ 9.\ 0$	$91\ 26\ 9.\ 0$	$91\ 26\ 9.\ 0$
ϕ	$19°\ 25'\ 22.''3$	$19°\ 25'\ 22.''6$	$19°\ 25'\ 25.''1$	$19°\ 25'\ 24.''8$

La concordancia de todos estos resultados individuales manifiesta la precision con que puede obtenerse la latitud por el método de circunmeridianas sirviéndose de un altazimut, aunque sea de los portátiles como el que se empleó en esta operacion. No me parece aventurado asegurar que tomando varias series de distancias zenitales al Norte y al Sur del zenit, es posible obtener la latitud de una estacion con ménos de 1'' de error, en unas cuantas noches de trabajo.

261.— Presentemos ahora un ejemplo de observaciones solares hechas últimamente en la ciudad de México con un teodolito astronómico pequeño, cuyo círculo vertical tiene solo 0^m16 de diámetro, y que da los ángulos con aproximacion de 10''. Las distancias zenitales están tomadas por el método de Mr. Quetelet (pág. 336) y son las del limbo inferior del sol.

CRONOMETRO.	CIRCULO.	NIVEL. $o\,c$	NIVEL. $o\,b$
$11^h\ 27^m\ 10^s$	$b = 43°\ 19'\ 10''$	$o = 29$	$e = 28$
,, 41 48	$a = 46\ 50\ 15$	29	28
,, 49 2	$b = 43\ 7\ 12$	33	24
,, 54 47	$a = 46\ 46\ 00$	27	29

La hora cronométrica del medio dia verdadero era $11^h\ 44^m\ 26^s$, por lo cual los ángulos horarios, los valores de m y n y las distancias zenitales corregidas por el estado del nivel cuyas divisiones valian $8''$, son:

Tránsito.....	$11^h\ 44^m\ 26^s$	h	m	n	z'
Observaciones	$11^h\ 27^m\ 10^s$	$17^m\ 16^s$	$585.''1$	$0.''8$	$43°\ 19'\ 14''$
„	„ 41 48	2 38	13. 6	0. 0	„ 9 49
„	„ 49 2	4 36	41. 5	0. 0	„ 7 48
„	„ 54 47	10 21	210. 3	0. 1	„ 13 52
Promedios.....		$m = 212.''6$	$n = 0.''2$		$z' = 43°\ 12'\ 40.''7$

El valor medio de z' resulta ya independiente de la colimacion vertical, por haberse ejecutado las observaciones en las dos posiciones del círculo. Los datos para calcular la refraccion dieron..... $r = 40.''9$, la paralaje de altura era $p = 6.''0$ y el semidiámetro del sol $s = 16'\ 17.''9$; de donde el conjunto de corecciones para obtener la distancia zenital verdadera del centro (pág. 269) es:..... $r - p - s = -15'\ 43.''0$, y se tiene por consiguiente..... $z = 42°\ 56'\ 57.''7$

Calculemos la reduccion al meridiano tomando $\phi = 19°\ 26'\ 10''$ por latitud aproximativa y siendo la declinacion del sol en el instante medio de las observaciones, $\delta = -23°\ 26'\ 20.''3$. El cronómetro tenia un atraso diario de $7^s.8$ y la ecuacion del tiempo variaba $+29^s.8$ en 24^h, por lo cual el argumento para tomar de la Tabla VII el logaritmo de k' es $v - \triangle E = -22^s$.

		k'.....	9.99978				
$\phi =$	$19°\ 26'\ 10''$	cos. ϕ.....	9.97452				
$\delta =$	$-23\ 26\ 20$	cos. δ.....	9.96260				
$\zeta =$	$42°\ 52'\ 30''$	sen. ζ.....	-9.84079	cot. ζ...	0.032	$z =$	$42°\ 56'\ 57.''7$
		C.....	0.09611	C^2.....	0.192	$x =$	$-\ 4\ 24.\ 9$
		m.....	2.32756	n.....	9.301	$\zeta =$	$42°\ 52'\ 32.''8$
			2.42367		9.525	$\delta =$	$-23\ 26\ 20.\ 3$
			$-265.''26$		$+0.''33$	$\phi =$	$19°\ 26'\ 12.''5$

262.—Siempre que sea posible, debe procurarse hacer tantas observaciones ántes como despues del tránsito del astro, segun lo manifiesta el ejemplo anterior; y si los ángulos horarios orientales dan casi la misma suma que los occidentales, no habrá que temer la in-

fluencia de algun pequeño error en la hora. La ventaja de no necesitarse mucha exactitud en este elemento es una de las mayores que presenta el método de circunmeridianas.

Nunca será prudente dar por definitiva la determinacion de una latitud, sin haber hecho numerosas observaciones de estrellas al Norte y al Sur del zenit, tratando de combinarlas de manera que no difieran mucho sus distancias zenitales, pues hemos visto que este es el modo de obtener un promedio independiente de los pequeños errores angulares, constantes ó variables. Pondré á la vista los diversos resultados que me dieron varias estrellas al determinar la latitud de Mixcoac.

AL SUR DEL ZENIT.

Por 46 obser. de	*a Virginis*	$\phi =$	19°	22′	20.″4
„ 26 „	„ *a² Libræ*	$\phi =$	19	22	18. 7
„ 34 „	„ *a Scorpii*	$\phi =$	19	22	20. 8
„ 38 „	„ *β′ Scorpii*	$\phi =$	19	22	22. 4
Por 144 obser. al Sur		$\phi =$	19°	22′	20.″7

AL NORTE DEL ZENIT.

Por 16 obser. de	*γ Ursæ maj*	$\phi =$	19°	22′	16.″9
„ 10 „	„ *α Ursæ maj*	$\phi =$	19	22	15. 4
„ 22 „	„ *η Ursæ maj*	$\phi =$	19	22	15. 4
Por 48 observ. al Norte		$\phi =$	19°	22′	15.″9

La constancia con que las determinaciones al Sur del zenit resultan mayores que las del Norte, indica claramente la existencia de un error en el instrumento, que era un círculo repetidor pequeño de Ertel. La latitud definitiva del lugar que ocupaba el instrumento, un poco al Sur del punto trigonométrico que se estableció en aquel pueblo, será en consecuencia $\phi = 19° 22′ 18.″3$.

263.— Las aplicaciones que hemos hecho de la fórmula (3) indican la pequeñez de su último término, que muchas veces puede omitirse sin inconveniente alguno, pues solo adquiere valor apreciable siendo pequeña la distancia zenital meridiana ó considerables los ángulos horarios del astro. Cuando no tienen lugar tales circustancias, podrá, pues, tomarse por reduccion al meridiano:

$$x = \mp C \frac{2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} h}{\text{sen. } 1''}$$

que siendo h muy pequeño puede escribirse así:

$$x = \mp \tfrac{1}{2} C \text{ sen. } 1'' h^2$$

Si expresamos á h en segundos de tiempo, y hacemos..... $Q = \pm \frac{225}{2} C$ sen. $1''$, la distancia zenital meridiana tendrá por expresion:

$$\zeta = z - Q h^2$$

y como Q es constante para la misma latitud y la misma estrella, esta ecuacion demuestra que muy cerca del meridiano las variaciones $z - \zeta$ de distancia zenital son proporcionales á los cuadrados de los intervalos de tiempo respectivos.

En este principio se funda un procedimiento para determinar la latitud, que si no tiene toda la precision del método estricto de circunmeridianas, ofrece en cambio las ventajas de no demandar el conocimiento de la latitud aproximativa y de poderse aplicar sirviéndose de un simple relox de segundos, las cuales lo hacen, por tanto, precioso para un viajero que desee fijar la posicion geográfica de los lugares de su tránsito con bastante aproximacion, cuando no pueda disponer del tiempo y demas elementos necesarios para la aplicacion de métodos mas exactos. Consiste en medir tres distancias zenitales de un astro tan cerca como sea posible de su paso meridiano, anotando las indicaciones correspondientes de un cronómetro ó de un relox cualquiera, con tal que su marcha sea regular durante algunos minutos, lo que en cualesquiera circunstancias me parece muy fácil de realizar. Sea z_1, z_2 y z_3 las tres distancias zenitales verdaderas, esto es, ya corregidas por nivel, refraccion, paralaje, &c., y t_1, t_2 y t_3 las respectivas lecturas del relox. Designando por T la indicacion incógnita del mismo instrumento en el instante de la culminacion del astro, y por ζ su distancia zenital meridiana, tendrémos de acuerdo con el principio anterior:

$$\zeta = z_1 - Q (t_1 - T)^2$$
$$\zeta = z_2 - Q (t_2 - T)^2$$
$$\zeta = z_3 - Q (t_3 - T)^2$$

Se trata de determinar los valores de las tres incógnitas Q, ζ y T.

Con este fin eliminemos á ζ restando la segunda ecuacion de la primera y la tercera de la segunda, de lo que resulta:

$$2\,Q\,T = Q\,(t_1 + t_2) - \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

$$2\,Q\,T = Q\,(t_2 + t_3) - \frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2}$$

Restando uno de otro estos dos valores, eliminarémos á T y obtendrémos:

$$Q = \frac{\dfrac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2} - \dfrac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}}{t_3 - t_1} \quad \text{.........................} \quad (6)$$

Una vez determinado el coeficiente Q, cualquiera de las dos ecuaciones que anteceden da por valor de T:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\,(t_1 + t_2) - \dfrac{z_2 - z_1}{2\,Q\,(t_2 - t_1)} \\ \frac{1}{2}\,(t_2 + t_3) - \dfrac{z_3 - z_2}{2\,Q\,(t_3 - t_2)} \end{array} \right\} \quad \text{..............} \quad (7)$$

Finalmente, por cada una de las ecuaciones primitivas puede obtenerse el valor de ζ, á saber:

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} z_1 - Q\,(t_1 - T)^2 \\ z_2 - Q\,(t_2 - T)^2 \\ z_3 - Q\,(t_3 - T)^2 \end{array} \right\} \quad \text{.....................} \quad (8)$$

Apliquemos este método á las siguientes observaciones del sol hechas con sextante. Al lado de las horas del relox constan las distancias zenitales ya corregidas por los errores del instrumento y por refraccion, paralaje, semidiámetro, &c.

$$\begin{array}{llll} t_1 = 11^h\,15^m\,33^s & \qquad & z_1 = 41^\circ\,38'\;\;2'' \\ t_2 = \;,,\;\;\;22\;\;\;20 & & z_2 = \;,,\;\;\;36\;\;20 \\ t_3 = \;,,\;\;\;28\;\;\;29 & & z_3 = \;,,\;\;\;38\;\;\;\;7 \end{array}$$

Con estos datos resulta:

$$\frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2} = \frac{107''}{369^s} = +\,0.29 \qquad\qquad \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = -\,\frac{102''}{407^s} = -\,0.25$$

y en consecuencia el valor de Q es:

$$Q = \frac{0.29 + 0.25}{776^s} = +\,0.0007$$

Calculando ahora la hora T del tránsito, hallarémos:

$$T = 11^h\ 18^m\ 56^s.5 + \frac{0.25}{0.0014} = 11^h\ 18^m\ 56^s.5 + 2^m\ 58^s.6 = 11^h\ 21^m\ 55^s$$

$$T = 11^h\ 25^m\ 24^s.5 - \frac{0.29}{0.0014} = 11^h\ 25^m\ 24^s.5 - 3^m\ 27^s.2 = 11^h\ 21^m\ 57^s$$

La pequeña diferencia de los dos valores de T proviene de los errores inevitables en la aproximacion numérica. Adoptando el término medio $11^h\ 21^m\ 56^s$, tendrémos por distancia zenital meridiana:

$$\zeta = 41°\ 38'\ 2'' - 0.0007\ (383)^2 = 41°\ 36'\ 19.''3$$
$$\zeta = 41\ \ 36\ \ 20\ \ - 0.0007\ (024)^2 = 41\ \ 36\ \ 19.\ \ 6$$
$$\zeta = 41\ \ 38\ \ 7\ \ - 0.0007\ (393)^2 = 41\ \ 36\ \ 18.\ \ 9$$

La declinacion del sol en el instante medio de las observaciones era la que va á continuacion, que combinada con ζ determina la latitud:

$$\zeta = \ \ 41°\ 36'\ 19.''3$$
$$\delta = -20\ \ 6\ \ 40.\ \ 7$$
$$\phi = \ \ 21°\ 29'\ 38.''6$$

Por una serie numerosa de observaciones, calculada por el método exacto de circunmeridianas, obtuve para el mismo punto, que es la hacienda de la Sauceda en el Estado de Guanajuato, la latitud $\phi = 21°\ 29'\ 33.''6$.

264.—Vimos en la pág. 401 que en las inmediaciones del meridiano el movimiento azimutal de los astros es proporcional al tiempo; y como segun acabamos de ver, el movimiento ascensional en las mismas circunstancias es proporcional al cuadrado del tiempo, inferirémos que cerca del tránsito de un astro, sus cambios de altura son proporcionales á los cuadrados de las variaciones azimutales correspondientes. En este principio se funda un método para determinar la latitud, que ofrece mucha analogía con el que expuse en el número precedente, y cuya aplicacion evita completamente el uso de un instrumento cronométrico. Al medir con un altazimut tres distancias zenitales de un astro en los momentos de su culminacion, si se leen las indicaciones del círculo azimutal, podrémos servirnos de estos datos en lugar de las horas de un relox que demanda el otro

procedimiento. Sea, en efecto, A la indicacion meridiana del círculo horizontal, y llamemos a_1, a_2 y a_3 las tres lecturas azimutales obtenidas al medir las distancias zenitales verdaderas z_1, z_2 y z_3. Las expresiones de la distancia zenital meridiana serán segun lo demostrado:

$$\zeta = z_1 - R\,(a_1 - A)^2$$
$$\zeta = z_2 - R\,(a_2 - A)^2$$
$$\zeta = z_3 - R\,(a_3 - A)^2$$

en las cuales R representa un coeficiente constante para cada estrella. Resolviendo estas ecuaciones por el método del número anterior, hallarémos las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\dfrac{z_3 - z_2}{a_3 - a_2} - \dfrac{z_2 - z_1}{a_2 - a_1}}{a_3 - a_1} \\ A &= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - \dfrac{z_2 - z_1}{2R\,(a_2 - a_1)} \\ \frac{1}{2}(a_2 + a_3) - \dfrac{z_3 - z_2}{2R\,(a_3 - a_2)} \end{cases} \\ \zeta &= \begin{cases} z_1 - R\,(a_1 - A)^2 \\ z_2 - R\,(a_2 - A)^2 \\ z_3 - R\,(a_3 - A)^2 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

El cálculo de estas fórmulas es tan semejante al de las que se aplicaron en el otro método, que juzgo innecesario presentar un ejemplo numérico. La observacion es igualmente sencilla, y solo es preciso, como en aquel, conocer la colimacion vertical para usar el círculo en una sola posicion. Luego que la estrella queda cortada por la interseccion de los hilos, se leen las indicaciones de los círculos vertical y horizontal, las cuales corregidas por colimacion, niveles, &c., y la primera por refraccion, suministran los datos z y a que corresponden á cada observacion.

Nótese que sin trabajo adicional alguno, es posible trazar aproximadamente el meridiano, puesto que la resolucion da á conocer la graduacion A que indicaria el círculo horizontal al coincidir el telescopio con aquel plano.

CAPITULO XVII.

DETERMINACION DE LA LATITUD.—MÉTODO AMERICANO.

265.— En la pág. 422 vimos las relaciones que existen entre la latitud, la declinacion de una estrella y su distancia zenital meridiana. Limitándonos á los tránsitos superiores, suponiendo que se observen dos estrellas y acentuando los datos que se refieren á la que culmina al Norte del zenit, aquellas expresiones dan:

$$\phi = \delta + \zeta$$
$$\phi = \delta' - \zeta'$$

cuya semisuma proporciona la latitud en funcion de la semidiferencia de las dos distancias zenitales meridianas, á saber:

$$\phi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta')$$

A fin de dar á esta ecuacion una forma mas general, sean z y z' las distancias zenitales aparentes, tales como las da el instrumento, r y r' las refracciones, n y n' las inclinaciones que señale el nivel, y x y x' las reducciones al meridiano. Con estos elementos se tiene:

$$\zeta = z + r - x + n$$
$$\zeta' = z' + r' - x' + n'$$

valores que sustituidos en el de ϕ, y recordando que las inclinaciones n y n' son: $n = \frac{1}{2}(o - e)\,v$ y $n' = \frac{1}{2}(o' - e')\,v$, producen:

$$\phi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(z - z') + \tfrac{1}{2}(r - r') - \tfrac{1}{2}(x - x') + \tfrac{1}{2}(n - n')$$

$$\phi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(z - z') + \tfrac{1}{2}(r - r') - \tfrac{1}{2}(x - x') + \tfrac{1}{4}\big((o - o') - (e - e')\big)v \ldots\ldots \quad (1)$$

Esta expresion manifiesta que con excepcion de las declinaciones, todos los demas elementos que la constituyen entran en ella por *diferencias*, la mayor parte muy pequeñas; y que por consecuencia al aplicarla se logra la eliminacion mas ó ménos completa de los errores que podrian contener los valores absolutos de las cantidades que la forman.

En estas consideraciones está fundado el método del astrónomo norteamericano Mr. Talcott para determinar la latitud, midiendo directamente la diferencia $z - z'$. El autor ha dado á este procedimiento el mas alto grado de perfeccion escogiendo las dos estrellas de manera que $z - z'$ sea solo de unos cuantos minutos, á fin de que no exceda de la amplitud angular del campo de un telescopio; y así sin variar la posicion de este respecto de su columna, se consigue que dirigiéndolo alternativamente hácia el Norte y hácia el Sur por medio de su movimiento azimutal, ambas estrellas se presenten en el campo. Entónces podrá medirse la diferencia de sus distancias zenitales sin servirse de círculos graduados, sino con un micrómetro situado en el ocular del telescopio, que permite la apreciación de pequeñas fracciones de segundo.

El método de Talcott, si bien demanda el uso de un instrumento de construccion especial, suministra en cambio resultados de una precision extraordinaria, y es por consiguiente, el que conviene emplear de preferencia para fijar la posicion de un punto importante. El astrónomo mexicano D. José Salazar Ilarregui lo empleó al demarcar las líneas limítrofes entre México y los Estados-Unidos, y fué tambien del que yo me serví para determinar la latitud de la ciudad de México. Despues de describir el instrumento, llamado telescopio *zenital*, con que se aplica el método riguroso de Talcott, verémos que puede emplearse, casi con el mismo éxito, el altazimut comun y aun el telescopio de tránsitos. Lo que sigue está tomado casi textualmente de la exposicion que hice de este procedimiento en mis "Nuevos Métodos Astronómicos."

266.—El telescopio zenital (fig. 50ª) consta esencialmente de una

columna vertical sobre la que está situado el anteojo, cuyo poder óptico debe ser suficiente para poder observar estrellas hasta de quinta ó sexta magnitud, para lo cual es bastante una distancia focal de $0^m.75$ y una abertura libre, ó diámetro del objetivo, de $0^m.05$. El telescopio, unido á la columna por medio de un pequeño eje horizontal, puede moverse en un plano perpendicular al horizonte, á la vez que está dotado de un movimiento azimutal que se mide por medio de un círculo situado al pié de la columna. Esta disposicion es del todo semejante á la de un teodolito.

Invariablemente unido al tubo del telescopio hay un cuadrante dividido de 0° á 90°. El radio de este cuadante que va á terminar á la division 0° es perpendicular á la direccion del eje óptico del telescopio; y por consiguiente es paralelo á ella el que termina en la division 90°. A lo largo de la alidada hay un nivel muy sensible que se mueve con ella cuando se traslada de un punto á otro de la graduacion; y si se fija la alidada en un punto conveniente, sirve tambien el nivel para arreglar la verticalidad de la columna, haciendo las correcciones necesarias con los tornillos del pié del instrumento y procediendo como se ha explicado varias veces refiriéndonos al altazimut y al teodolito. De esta disposicion del cuadrante y del nivel se deduce que estando vertical la columna, si se hace que el vernier de la alidada indique una graduacion cualquiera g, y en seguida se mueve el telescopio en un plano vertical hasta que los extremos de la burbuja señalen divisiones iguales en su escala, el eje óptico del telescopio formará con el zenit un ángulo igual á g, ó lo que es lo mismo, tendrá g por distancia zenital. De esta manera se podrá fijar de antemano el instrumento en la posicion conveniente para que una estrella cuya distancia zenital aproximativa se conozca, se presente en el campo.

En el ocular del telescopio hay un micrómetro de hilo móvil, que como todos los de su especie, se compone de un tornillo de espiral muy fina cuya tuerca está en el interior del tubo, y cuya cabeza en el exterior está terminada por un pequeño círculo dividido generalmente en 100 partes. Fácilmente se comprenderá que por medio de este aparato pueden medirse pequeñas cantidades angulares dentro del campo del telescopio, luego que por alguno de los procedimientos que indicaré despues, se haya determinado el número de segundos interceptados en la esfera celeste por dos posiciones del

hilo, correspondientes á un número cualquiera de revoluciones del micrómetro. Se comprenderá tambien con igual facilidad que si en la misma posicion del telescopio respecto de su columna, se presentan sucesivamente dos ó mas estrellas en el campo, se obtendrán las *diferencias* de sus distancias zenitales cortándolas con el hilo micrométrico en el instante en que atraviesen el hilo vertical de la retícula, y valuando despues en segundos la diferencia de las lecturas suministradas por el micrómetro.

267.—Para determinar el valor angular de cada revolucion del tornillo puede aplicarse desde luego el método expuesto en la pág. 275 del Tomo I, midiendo en revoluciones y partes del micrómetro un espacio cualquiera cuyo ángulo visual g sea conocido; pero es preferible que g sea un arco celeste. Si se mide, por ejemplo, en partes del micrómetro el diámetro vertical del sol, siendo g en este caso el diámetro que dan las Efemérides del astro, corregido si es necesario por la diferencia de refracciones de sus dos bordes, y N el número de revoluciones micrométricas que lo miden, el valor de cada una es: $R = \frac{g}{N}$.

Tambien se determina R estableciendo el telescopio en el plano del meridiano y observando el tránsito de dos estrellas cuyas declinaciones se conozcan con exactitud y sean poco diferentes, á fin de que las estrellas á que pertenecen se presenten en el campo sin que sea preciso alterar la posicion del telescopio. Si al pasar cada una se corta con el hilo, anotando la indicacion del micrómetro, la diferencia de esas indicaciones será N, y la de sus declinaciones, corregida por la diferencia de refraccion, dará el valor de g. Debe procurarse que las estrellas difieran poco en ascension recta para que trascurra poco tiempo entre las observaciones y no haya que temer alguna variacion del instrumento. En todos casos es conveniente apuntar las indicaciones del nivel para corregir el valor de g si aquellas denuncian variacion; puesto que g no viene á ser otra cosa mas que la diferencia de distancias zenitales aparentes de las estrellas.

Los tránsitos de estrellas circumpolares, ya sea por el meridiano, ya por el punto de su mayor elongacion oriental ú occidental, proporcionan la mejor oportunidad de determinar el valor angular del micrómetro, á causa de que permiten multiplicar las observaciones á fin de obtener un promedio mas libre de error. Tratándose de un

paso por el meridiano, se establece el telescopio cerca de este plano, y se hace girar todo el micrómetro 90° á fin de que su hilo quede vertical, teniendo el mayor cuidado de que permanezca bien arreglado el foco estelario. Colocando previamente el hilo de manera que el índice exterior señale revoluciones enteras, ó mejor medias revoluciones del tornillo, se observan los tránsitos de la estrella por cada una de las posiciones del hilo, anotando tanto la hora de la observacion como la lectura del micrómetro. El primer dato sirve para hallar el ángulo horario de la estrella en el instante de cada tránsito, y como se conoce su declinacion, podrá calcularse su distancia x al meridiano por la ecuacion: sen. x = sen. h cos. δ. Como al observar muy cerca del meridiano, es x necesariamente muy pequeña, puede expresarse en segundos, y entónces:

$$x = \frac{\text{cos. } \delta \text{ sen. } h}{\text{sen. } 1''} \qquad (2)$$

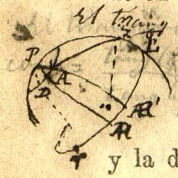
Las diferencias de los diversos valores de x serán equivalentes al arco que ántes se designó por g, que es la distancia angular comprendida entre dos posiciones cualesquiera del hilo, y las diferencias de las indicaciones correspondientes del micrómetro darán el equivalente de N, de modo que se tendrá en general:

$$R = \frac{x - x'}{M - M'} \qquad (3)$$

Es conveniente que el denominador $M - M'$ no sea muy pequeño, con el fin de que no tenga gran influencia el pequeño error que pudiera cometerse en las horas anotadas, y por consiguiente en los valores de x. Así es que si se observan, por ejemplo, 20 tránsitos por otras tantas posiciones del hilo, se obtendrán tambien 20 valores de x, que se pueden combinar el 1º con el 11º, el 2º con el 12º, el 3º con el 13º, &c., para terminar combinando el 10º con el 20º Si se ha establecido el hilo en cada revolucion entera del micrómetro, todos los denominadores serán iguales á 10 revoluciones, ó bien á 5 en el caso de que se hayan colocado de media en media vuelta.

Como para aplicar el telescopio zenital á la medida de la latitud, debe usarse el hilo micrométrico en una posicion horizontal, es fácil que al restablecerlo en ella despues de determinado el valor angu-

lar, se altere algo el foco sideral, en cuyo caso el valor hallado puede quedar ligeramente erróneo, puesto que depende de la distancia focal. Este peligro se evita marcando cuidadosamente en el tubo del ocular la posicion que corresponde al foco estelario; pero para mayor seguridad es preferible valerse de los tránsitos de una circumpolar por su mayor elongacion, porque siendo en ese instante vertical su movimiento, no hay necesidad de variar el hilo micrométrico de la posicion horizontal en que tiene que usarse. El procedimiento es absolutamente el mismo que ántes, con la única diferencia de que los ángulos horarios h se cuentan desde la hora de la digresion ó elongacion. Siendo T esta hora en tiempo sideral, el ángulo horario correspondiente á la elongacion será $15\ (T - \alpha)$, expresado en arco, y se tendrá:



$$\cos.\ 15\ (T-\alpha) = \frac{\text{tan.}\ \phi}{\text{tan.}\ \delta} \qquad \ldots\ldots (4)$$

y la distancia zenital en que debe colocarse el telescopio para que el punto de elongacion quede casi en el centro de su campo, se obtiene por la ecuacion:

$$\cos.\ z = \frac{\text{sen.}\ \phi}{\text{sen.}\ \delta} \qquad \ldots\ldots (5)$$

Si se designa por t cualquiera de las horas siderales de las observaciones, el ángulo horario contado desde la elongacion es..... $h = 15\ (t - T)$, y si el cronómetro que se usa es solar, expresando T la hora que debe señalar en el instante en que la estrella llega á su mayor digresion, se convertirá la duracion $t - T$ en tiempo sideral.

En este procedimiento debe atenderse á la refraccion, que afecta directamente al valor de x, lo mismo que á los cambios de nivel respecto de su estado medio.

El telescopio zenital de que me serví para determinar la latitud de México, tenia $0^m.07$ de abertura y $1^m.2$ de distancia focal. Para hallar el valor de su micrómetro, hice, entre otras, las siguientes observaciones de la estrella polar en los momentos de su culminacion. El *cero* del micrómetro se supone estar en el centro del campo, y sus indicaciones expresan revoluciones enteras.

MICROMETRO.	CRONOMETRO.	MICROMETRO.	CRONOMETRO.
—7.00	6h 40m 36s	+1.00	6h 55m 46s
6.00	,, 42 28	2.00	,, 57 30
5.00	,, 44 22	3.00	,, 59 22
4.00	,, 46 14	4.00	7 1 16
3.00	,, 48 8	5.00	,, 3 10
2.00	,, 50 2	6.00	,, 5 2
—1.00	,, 51 54	7.00	,, 6 57
0.00	,, 53 48	+8.00	,, 8 50

La hora cronométrica del paso era $T = 6^h\ 54^m\ 36^s$. En lugar de contar los ángulos horarios desde este instante, harémos desde luego las combinaciones de la 1ª observacion con la 9ª; de la 2ª con la 10ª, &c.; lo que nos dará por divisor comun 8 revoluciones del micrómetro:

1ª y 9ª	15m 4s
2ª y 10ª	,, 2
3ª y 11ª	,, 0
4ª y 12ª	,, 2
5ª y 13ª	,, 2
6ª y 14ª	,, 0
7ª y 15ª	,, 3
8ª y 16ª	,, 2
Promedio	15m 1s 87

Este promedio, que en tiempo sideral es de $15^m\ 4^s 34$ y en arco de $3°\ 46'\ 5''$, será el equivalente de h, y como se tenia $\delta = 88°\ 33'\ 10''$, obtendrémos:

sen. h	8.81768
cos. δ	8·40237
sen. $1''$	—4.68557
$8\,R$	2.53448

$8\,R = 342.''4$

Dividiendo este resultado por 8, da $R = 42.''8$. La misma cantidad se obtuvo por la combinacion de otras observaciones ejecutadas con el mismo objeto; y como el círculo del micrómetro estaba dividido en 100 partes, el valor de cada una resulta de $0.''428$.

268.— El método que se sigue para hacer las observaciones de latitud es este. Se eligen dos estrellas que culminen la una al N. y la otra al S. del zenit, y cuyas declinaciones sean tales que la diferencia de sus alturas meridianas sea menor que la amplitud angular

del campo del telescopio, para lo cual puede hacerse uso de la fórmula $\delta + \delta' = 2\,\phi - (z - z')$ en la que no importa conocer á ϕ mas que con la aproximacion de 2′ ó 3′, siendo $z - z'$ el mayor valor que se crea conveniente medir con el micrómetro, y que por lo comun no excede de 15′. El Catálogo de estrellas publicado por la Sociedad Británica (*British Association Catalogue*), que contiene 8377 estrellas, y el del Observatorio de Greenwich (*Greenwich Twelve-year Catalogue*), que contiene 2156, pueden proporcionar por lo ménos, para cada noche y cualquiera latitud, de 6 á 12 pares de estrellas convenientes. Al elegirlas deben preferirse aquellas cuyas coordenadas, especialmente las declinaciones, sean mas dignas de confianza, para lo cual conviene consultar las notas del mismo Catálogo.

Despues de bien nivelado el instrumento, se sitúa el telescopio próximamente en el meridiano, valiéndose de la hora conocida de la culminacion de una estrella cualquiera, ó bien trazando el meridiano por cualquiera otro método. De esta manera se conocerán con la aproximacion de 8′ ó 10′, que es lo bastante, las indicaciones meridianas m y $180° + m$ del círculo azimutal, segun que el telescopio se dirija al Norte ó al Sur, y estas indicaciones servirán por todo el tiempo que duren las observaciones de latitud, puesto que el instrumento es por sí mismo bastante estable y que en aquellas no se necesita mucha precision.

Con la alidada del cuadrante se señala con aproximacion de 1′ ó 2′ la distancia zenital media de cada par de estrellas, que es:..... $\frac{1}{2}(z + z') = \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$, y en seguida moviendo verticalmente el telescopio hasta que el nivel quede sensiblemente horizontal, se tendrá establecido á la altura conveniente para que ambas estrellas se presenten en el campo. Por último, se mueve en azimut hasta que el círculo señale m ó $180° + m$, segun que la estrella del Norte pase por el meridiano ántes ó despues que la del Sur.

Luego que la primera estrella se presenta en el campo, se mueve el micrómetro para que el hilo móvil la corte exactamente en el instante en que pasa por el hilo vertical de la retícula, anotando la hora correspondiente del cronómetro. Inmediatamente despues se apuntan las indicaciones ocular y objetiva del nivel, y la lectura del micrómetro, con lo cual queda terminada la primera parte de la operacion.

Sin tocar el telescopio á fin de que no varie el ángulo que forma

con el nivel, se hace que el círculo azimutal señale la otra graduacion meridiana para esperar la segunda estrella, que se observa absolutamente lo mismo que la primera. (*) Si el instrumento se ha arreglado bien desde el principio, la indicacion del nivel despues de la inversion no debe diferir mucho de la que señalaba ántes; pero en el caso contrario, puede moverse un poco alguno de los tornillos del pié, cuidando de no hacer la correccion con el tornillo de la alidada, porque se alteraria el ángulo formado por el nivel con el eje óptico del telescopio, ángulo cuya invariabilidad constituye la condicion esencial de este procedimiento.

Es conveniente que las dos estrellas que forman cada par difieran en ascension recta solo lo bastante para que el observador tenga tiempo de variar 180° el azimut del instrumento; porque una diferencia demasiado grande daria lugar á temer algun cambio en su estado. Como mínimum me parecen suficientes 2^m, y de 15^m á 20^m como máximum. De la última estrella de un par, á la primera del siguiente deben trascurrir 3^m ó 4^m por lo ménos, á fin de que haya tiempo de establecer el telescopio en la nueva posicion en que se necesita.

Tambien es de importancia procurar que la estrella meridional tenga su distancia zenital unas veces mayor y otras menor que la septentrional, con el fin de que siendo alternativamente positiva y negativa la cantidad $z - z'$ medida con el micrómetro, tenga poca influencia en el promedio final algun pequeño error que haya en el valor angular de sus revoluciones, pues es evidente que la latitud resultaria independiente de R, si fuese nula la suma algebraica de las $z - z'$ en el conjunto de pares combinados.

269.— Antes de presentar un ejemplo del cálculo, ocupémonos separadamente de cada uno de los términos de la fórmula (1). Si M y M' son las indicaciones del micrómetro para las estrellas meridional y septentrional respectivamente, se tiene:..... $\frac{1}{2}(z - z') = \frac{1}{2}(M' - M)\,R$. Como este término es solo de algunos minutos, la diferencia de refracciones $r - r'$ se calcula con suficiente exactitud suponiendo igual á la unidad el factor que depende

(*) Al cortar las dos estrellas con el hilo no debe perderse de vista la conveniencia de mover el micrómetro en el mismo sentido, con el objeto de evitar el error que originaria en $z - z'$ el punto muerto del tornillo. (Vease la página 86). Lo mismo debe hacerse al determinar el valor angular de sus revoluciones.

57

de los instrumentos meteorológicos, lo cual equivale á tomar por.... $r - r'$ la diferencia de refracciones medias $\rho - \rho'$ cuyos logaritmos suministra la Tabla I; pero para no verse en la necesidad de tomar para la distancia zenital de cada una de las estrellas el valor de ρ que le corresponde, y atendiendo á que en el método de Talcott casi nunca se observa á mas de 30° del zenit, he formado la pequeña Tabla que pongo en seguida de la variacion $\triangle \rho$ de la refraccion por 1′ de cambio de altura. No siendo constante $\triangle \rho$ para todas las distancias zenitales, en la Tabla se indica la que conviene á cada una.

z	$\Delta \rho$	z	$\Delta \rho$
0°	0.″0170	15°	0.″0182
5	0. 0171	20	0. 0191
10	0. 0174	25	0. 0207
15	0. 0182	30	0. 0225

Con la distancia zenital media $\frac{1}{2}(z + z') = \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ por argumento, se toma el valor de $\triangle \rho$, y expresando en minutos á $\frac{1}{2}(z - z')$, se obtiene: $\frac{1}{2}(r - r') = \frac{1}{2}(z - z') \triangle \rho$.

Finalmente, las reducciones al meridiano se calculan por la fórmula:

$$x = \frac{\text{cos. } \phi \text{ cos. } \delta}{\text{sen. } \zeta} m$$

adoptando valores aproximativos de ϕ y de ζ, y tomando el de m de la Tabla V con el argumento h, que es la diferencia entre las horas cronométricas de las observaciones y de la culminacion de cada estrella.

Ejemplo.— El 20 de Enero de 1857 observé, entre otros, el siguiente par de estrellas, cuyos números son los que tienen en el Catálogo de la Sociedad Británica:

ESTRELLAS.	CRONOMETRO.	NIVEL.		MICROMETRO.
		o	e	
1624 al S.	$9^h\ 13^m\ 43^s$	46	46	+4.82
1648 al N.	9 17 28	47	45	−5.82

Las posiciones aparentes, tomadas del mismo Catálogo, eran:

1624.....	$\alpha = 5^h\ 8^m\ 8^s.66$	$\delta = +\ 11°\ 10'\ 44.''3$
1648.....	$\alpha' = 5\ 12\ 1.94$	$\delta' = +\ 27\ 48\ 38.\ 4$

Las horas medias de sus tránsitos son $9^h\ 6^m\ 19^s$ y $9^h\ 10^m\ 12^s$, y como el cronómetro tenia un adelanto de $7^m\ 20^s$, las horas cronométricas de las culminaciones fueron $9^h\ 13^m\ 39^s$ y $9^h\ 17^m\ 32^s$ respectivamente, de modo que para las reducciones al meridiano, se tiene h y h' de 4^s, y por consiguiente $m = 0.''01$. Cada division del nivel valia $0.''98$, y una revolucion del micrómetro $42.''8$. Calculemos los diversos términos de la fórmula (1).

$M = +\ 4.82$	$o = 46$	$e = 46$
$M' = -\ 5.82$	$o' = 47$	$e' = 45$
$M' - M = -\ 10.64$	$o - o' = -\ 1$	$e - e' = +\ 1$

$$\tfrac{1}{2}(M' - M)\,R = -\ 3'\ 47.''69 \qquad \tfrac{1}{4}\big((o - o') - (e - e')\big)\,v = -\ 0.''49$$

Tomando por distancia zenital media $\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 8°\ 19' = 8.°3$, se halla $\Delta\,\rho = 0.''0173$, de donde resulta que la correccion por refraccion es:

$$-\ 0.''0173 \times 3.'8 = -\ 0.''066$$

Para la reduccion al meridiano, suponiendo $\phi = 19°\ 26'$, se tiene:

	9.9745.....	cos. ϕ.....	9.9745		
cos. δ.....	9.9917	cos. δ'.....	9.9457		
	8.0000.....	m	8.0000	$x = 0.''064$	
sen. ζ.....	—9.1568	sen. ζ'.....	—9.1637	$x' = 0.\ 057$	
x.....	8.8094	x.....	8.7575	$\frac{1}{2}(x - x') = 0.''003$	

Con los anteriores elementos se obtiene por último:

δ =	$11°\ 10'\ 44.''3$
δ' =	$27\ 48\ 38.\ 4$
$\frac{1}{2}(\delta + \delta')$ =	$19\ 29\ 41.\ 35$
$\frac{1}{2}(z - z')$ =	$-\ 3\ 47.\ 69$
	$19\ 25\ 53.\ 66$
Refraccion =	$-\ 0.\ 066$
Nivel =	$-\ 0.\ 490$
Reduccion =	$-\ 0.\ 003$
ϕ =	$19°\ 25'\ 53.''10$

El promedio de 17 pares de estrellas que observé la misma noche dió $\phi = 19° 25' 54.''0$.

Tal es en resúmen el sencillísimo método americano ó de Talcott; método cuya perfeccion no tiene casi mas límite que el grado de exactitud con que se conozcan las declinaciones de las estrellas, y por eso conviene elegir las mas dignas de confianza. Con el fin de lograr hasta donde es posible la compensacion de errores originados por los que puedan existir en las declinaciones, es útil valerse de diferentes pares de estrellas, mas bien que hacer muchas observaciones del mismo par; y se nota, en efecto, que los resultados medios de distintos pares presentan por lo comun mayor discordancia que el promedio obtenido en una sola noche de trabajo, con tal que se hayan observado varios pares diferentes. Para determinar la latitud de México hice 333 observaciones empleando 43 pares de estrellas, y el resultado final para el lugar en que estaba el instrumento, fué 19° 25' 53.''07, latitud que referida geodésicamente (pág. 135, ecuacion (2)) á la Escuela de Ingenieros, da para este punto $\phi = 19° 26' 12.''03$. Si se desechan de la combinacion los dos pares cuyos resultados difieren mas de los restantes, se obtiene por 308 observaciones que la latitud de la Escuela es..... $\phi = 19° 26' 12.''33$.

Por vía de ejercicio pongo á la vista los datos referentes á las observaciones del 24 de Diciembre de 1856. El telescopio estaba tan cerca del meridiano, que fueron sensiblemente nulas las reducciones á este plano, y por eso no constan las horas de observacion.

ESTRELLAS.	DECLINACIONES.	NIVEL-		MICROMETRO.	LATITUD.
		o	*e*		
672 S.	7° 54′ 00.″1	45.5	49.0	+7.30	19° 25′ 52.″67
752 N.	31 9 37. 7	46.0	48.5	−9.33	
798 S.	11 49 39. 7	46.5	48.0	+0.03	19° 25′ 52.″82
831 N.	27 5 58. 9	47.0	47.5	−5.40	
971 S.	18 14 44. 3	48.0	46.5	−7.37	19° 25′ 52.″43
999 N.	20 30 52. 0	47.0	48.0	+1.21	
1055 N.	21 32 5. 2	48.0	47.0	−2.97	19° 25′ 55.″64
1096 S.	17 21 48. 1	50.0	45.5	−0.08	

270.—Si el lector se ha formado una idea exacta del telescopio

zenital, comprenderá fácilmente que el método de Talcott puede aplicarse con cualquiera instrumento provisto de micrómetro y de un buen nivel, ya sea que su inversion se verifique en virtud de una semi-revolucion azimutal, ó ya quitándolo de sus apoyos, como sucede en el telescopio comun de tránsitos. La única circunstancia que se requiere es que en sus dos posiciones permanezca invariable el ángulo formado por el nivel y el anteojo, y bajo este punto de vista, hay muchos instrumentos que pueden emplearse ventajosamente para aplicar este procedimiento, el altazimut entre otros.

El altazimut portátil no tiene á veces micrómetro en el ocular, en cuyo caso no puede aplicarse en rigor el método de Talcott; porque será preciso medir con la graduacion del círculo vertical la cantidad $z - z'$ que entra en la fórmula. Sin embargo, si es pequeña la diferencia $z - z'$, creo que pueden obtenerse resultados tan exactos como con el telescopio zenital, con tal que las lecturas del círculo puedan aproximarse á 1″, y esto es bastante comun en el altazimut, que por lo general tiene microscopios micrométricos en lugar de vernieres para estimar las fracciones de la graduacion (pág. 81).

Con el altazimut de esta construccion, y aun con el círculo vertical comun, puede medirse la latitud siguiendo el mismo plan de Talcott, si no con todas las ventajas que provienen del uso del telescopio zenital, al ménos con la de lograr la eliminacion mas ó ménos completa de los errores angulares constantes; pues es evidente que en la cantidad $z - z'$ solo quedará la diferencia de los errores peculiares á los puntos cuyas graduaciones sean z y z', y la parte de error accidental, como es el de lectura, aproximacion &c. Si se procura que $z - z'$ no sea considerable, hay en general fundamento para creer que su valor resulte sensiblemente exacto.

El modo de observar con estos instrumentos consistirá en dirigir el anteojo á la primera estrella cerca del meridiano, y luego que se tenga en la interseccion de los hilos, anotar la hora, las indicaciones del nivel y la graduacion del limbo. En seguida dejando fijo el círculo, hacerlo girar 180° en azimut al derredor de la columna vertical, dirigiendo despues el telescopio, por medio de su movimiento independiente, á la segunda estrella, con el fin de recoger los nuevos datos de hora, nivel y graduacion. Procediendo de esta manera, las indicaciones z y z' se obtienen en puntos del limbo no muy distantes uno de otro, y por consiguiente, con mas probabilidad de exactitud.

Siguiendo el mismo principio se obtienen muy buenos resultados aun con el sextante, á pesar de que en este instrumento no se puede eliminar el error de excentricidad en cada lectura, por no tener mas que un vernier, y de ser este error á veces muy diverso en puntos de la graduacion bastante próximos, segun se ha indicado en la pág. 302. Pongo en seguida las últimas observaciones de este género que hice en San Luis Potosí, las cuales aunque son en rigor dos series completas de alturas circunmeridianas, se pueden reducir ó calcular con ménos trabajo combinándolas de acuerdo con el procedimiento americano, para obtener desde luego el mismo resultado medio que se obtendria por su reduccion independiente.

ABRIL 30 DE 1867.

λ Ursæ majoris.	SEXTANTE.	*α Virginis.*	SEXTANTE.
$9^h\ 23^m\ 6^s.5$	115° 29′ 25″	$10^h\ 43^m\ 4^s.5$	114° 36′ 00″
,, 27 22.7	,, 28 00	,, 44 20.5	,, 39 10
,, 29 22.0	,, 26 20	,, 45 21.7	,, 41 20
,, 31 48.0	,, 23 35	,, 46 40.0	,, 43 20
,, 33 16.5	,, 22 5	,, 48 3.7	,, 45 5
	115° 25′ 53″	,, 50 27.0	,, 48 15
		,, 52 25.2	,, 48 20
			114° 43′ 4″

La indicacion del barómetro era 0m.617; la del termómetro libre cuando se observó la primera estrella fué 22.°5, y cuando se observó la segunda 22.°0. Aunque estos datos deberian servir para el cálculo de las refracciones, en el caso que considero no hay inconveniente en adoptar la diferencia de refracciones medias prescindiendo de temperatura y presion, á causa de la corta diferencia de altura que tenian las estrellas.

Las horas cronométricas de los tránsitos eran $9^h\ 22^m\ 42^s$ para *γ Ursæ* y $10^h\ 53^m\ 49^s$ para *α Virginis*, por lo cual se halla que las reducciones al meridiano son 103.″3 y 177.″3 respectivamente.

Como la cuarta parte de la diferencia de indicaciones del sextante representa la cantidad $\frac{1}{2}(z - z')$, y las declinaciones de las estrellas eran: $\delta = -10°\ 28'\ 7.''1$ y $\delta' = +54°\ 26'\ 5.''2$, tendrémos:

115° 25′ 53″
114 43 4
42 49 + 4 = 10′ 42.″2

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') &= 21°\ 58'\ 59.''0 \\
\tfrac{1}{2}(z - z') &= +10\ 42.\ 2 \\
\tfrac{1}{2}(r - r') &= +\ 0.\ 2 \\
\tfrac{1}{2}(x - x') &= -\ 37.\ 0 \\
\hline
\phi &= 22°\ 9'\ 4.''4
\end{aligned}$$

Si con la correccion inicial del sextante, que esa noche fué..... $e_0 = 1' \, 45''$, se reducen las anteriores observaciones como circunmeridianas, lo que necesariamente aumenta el trabajo, se encontrará:

Por γ *Ursæ maj*..... $\phi = 22° \, 9' \, 24''$
Por α *Virginis*..... $\phi = 22 \;\; 8 \;\; 45$

cuyo promedio reproduce la latitud obtenida ántes, y cuya semidiferencia 19.″5 proviene, al ménos en su mayor parte, del error del sextante, que produce efectos contrarios en las observaciones al Norte y al Sur del zenit. La correccion que indica es..... $\triangle G = -39''$.

CAPITULO XVIII.

DETERMINACION DE LA LATITUD.—MÉTODO DE LITTROW.

271.—Si se mide la distancia zenital z de una estrella circumpolar en un punto cualquiera del círculo que describe al derredor del polo, este valor de z diferirá de la colatitud de la estacion tanto ménos cuanto mas pequeña sea la distancia polar $d = 90° - \delta$ de la estrella. Se comprende fácilmente este principio, recordando que la colatitud no es otra cosa mas que la distancia zenital del mismo polo. Segun esto, llamando x la diferencia que existe entre la colatitud y la distancia zenital z de una circumpolar, podrémos establecer la ecuacion: $z + x = 90° - \phi$, ó bien:

$$\phi = 90° - (z + x) \quad \text{.....} \quad (1)$$

Por otra parte, siendo d la distancia polar y h el ángulo horario de la estrella en el instante de la observacion, se tendrá:

$$\cos.\ z = \text{sen.}\ \phi \cos.\ d + \cos.\ \phi\ \text{sen.}\ d \cos.\ h$$

y sustituyendo el valor (1) de ϕ, y desarrollando, resulta:

$$1 = (\text{sen.}\ d \cos.\ h - \cos.\ d \tan.\ z)\ \text{sen.}\ x + (\cos.\ d + \text{sen.}\ d \cos.\ h \tan.\ z) \cos.\ x \ldots\ldots (2)$$

Si d fuese nulo, lo seria tambien x, de manera que podrémos considerar que esta última cantidad es una funcion de la primera, de la forma:

$$x = A\,d + B\,d^2 + C\,d^3 \ldots\ldots (3)$$

Suponiendo ahora que se trate de una estrella muy inmediata al polo, tal como α ó δ *Ursæ minoris*, el valor de x será siempre muy pequeño, y así limitándonos á los términos de tercer órden en el desarrollo de su seno y de su coseno, hallarémos:

$$\text{sen.}\ x = x - \tfrac{1}{6} x^3 = A\,d + B\,d^2 + (C - \tfrac{1}{6} A^3)\,d^3$$
$$\cos.\ x = 1 - \tfrac{1}{2} x^2 = 1 - \tfrac{1}{2} A^2\,d^2 - A\,B\,d^3$$

Introduciendo estos valores en la ecuacion (2) y desarrollando el seno y el coseno de d, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} &\left[(d - \tfrac{1}{6} d^3) \cos.\ h - (1 - \tfrac{1}{2} d^2) \tan.\ z\right] \left[A\,d + B\,d^2 + (C - \tfrac{1}{6} A^3)\,d^3\right] \\ &+\left[1 - \tfrac{1}{2} d^2 + (d - \tfrac{1}{6} d^3) \cos.\ h \tan.\ z\right] \left[1 - \tfrac{1}{2} A^2\,d^2 - A\,B\,d^3\right] \end{aligned}\right\} = 1$$

Ejecutando las multiplicaciones hasta los términos de tercer órden, reduciendo y ordenando respecto de las potencias de d, resulta:

$$\left.\begin{aligned} &(\cos.\ h \tan.\ z - A \tan.\ z)\,d \\ &+ (A \cos.\ h - B \tan.\ z - \tfrac{1}{2} A^2 - \tfrac{1}{2})\,d^2 \\ &+ \left(\begin{matrix} B \cos.\ h + \tfrac{1}{2} A \tan.\ z - \tfrac{1}{6} \cos.\ h \tan.\ z - \tfrac{1}{2} A^2 \cos.\ h \tan.\ z \\ -A\,B + \tfrac{1}{6} A^3 \tan.\ z - C \tan.\ z \end{matrix}\right) d^3 \end{aligned}\right\} = 0$$

Segun la forma de esta ecuacion, es indispensable que sean nulos separadamente los coeficientes de las diversas potencias de d, por lo

que tendrémos las siguientes relaciones para la determinacion de A, B y C:

$$\cos. h - A = 0$$

$$A\,(\cos. h - \tfrac{1}{2} A) - \tfrac{1}{2} - B \tan. z = 0$$

$$\tfrac{1}{2} A\,(1 - A \cos. h + \tfrac{1}{3} A^2) \tan. z + B \cos. h - \tfrac{1}{6} \cos. h \tan. z - A B - C \tan. z = 0$$

De la primera resulta:

$$A = \cos. h$$

y este valor introducido en la segunda produce:

$$B = -\tfrac{1}{2} \text{sen.}^2 h \cot. z$$

Por último, sustituyendo ambos valores en la tercera, se obtiene:

$$C = \tfrac{1}{3} \cos. h \text{ sen.}^2 h$$

En consecuencia la expresion (3) será, expresando en segundos los pequeños arcos d y x:

$$x = d \cos. h - \tfrac{1}{2} d^2 \text{ sen.}^2 h \cot. z \text{ sen. } 1'' + \tfrac{1}{3} d^3 \cos. h \text{ sen.}^2 h \text{ sen.}^2 1''$$

Sustituido el valor de x en la ecuacion (1), dará finalmente por expresion de la latitud:

$$\phi = 90° - z - d \cos h + \tfrac{1}{2} (d \text{ sen } h)^2 \cot z \text{ sen } 1'' - \tfrac{1}{3} (d \cos h)\,(d \text{ sen } h)^2 \text{ sen}^2 1'' \ldots\ldots (4)$$

272.—Esta serie se debe á Mr. Littrow, Director del Observatorio de Viena, y constituye uno de los mejores procedimientos para determinar la latitud por observaciones de estrellas circumpolares muy próximas al polo. Sus principales ventajas consisten en que puede aplicarse en un instante cualquiera; en que no demanda el conocimiento previo de la latitud aproximativa, y en que llena siempre las condiciones favorables á la observacion que resultan de las investigaciones del Capítulo XV. Segun dije al principio, las estrellas que se emplean generalmente en este método son la polar y la δ *Ursæ minoris*, por ser aquellas cuya distancia al polo es bastante pequeña para que la serie sea muy convergente, y ser tambien fácilmente observables con instrumentos portátiles.

Cuando se observa alguna de estas estrellas en las inmediaciones de sus mayores elongaciones, no hay inconveniente en repetir por algun tiempo las medidas de z, pues en tales circunstancias el movimiento ascensional varia proporcionalmente á las duraciones trascurridas; pero en otra posicion, con especialidad cerca de sus tránsitos, importa no invertir mucho tiempo, porque no existe esa proporcionalidad; y así es que deberán agruparse las observaciones en series parciales, como se indicó en la pág. 419.

Ejemplo.—Calculemos por medio de la fórmula de Littrow las observaciones de la polar que constan en la pág. 421, y cuyos datos son:

$$z = 71^\circ\ 52'\ 31.''0 \qquad h = -148^\circ\ 55'\ 57.''6 \qquad d = 1^\circ\ 27'\ 18.''5$$

Expresando en segundos la distancia polar, tendrémos..... $d = 5238.''5$, y el cálculo será en consecuencia:

		$\frac{1}{2}$ sen. $1''$....	4.38454	$\frac{1}{2}$ sen.^{2} $1''$...	8.8940
d.....	3.7192069	.....	3.71921	d cos. h.....	3.6520—
cos. h.....	9.9327586—	sen. h.....	9.71269—	(d sen. h)^2...	6.8638
	3.6519655—	d sen. h.....	3.43190—		9.4098—
		cot. z.....	9.51498		
	—4487.''1		0.76332		—0.''2
			+ 5.''8		

$90^\circ - z =$	18°	7′	29.''0
Primer término = +	1	14	47. 1
Segundo „ = +			5. 8
Tercer „ = +			0. 2
$\phi =$	19°	22′	22.''1

Por esta aplicacion se ve la pequeñez del tercer término de la serie, que puede omitirse en aquellos casos en que no se crea indispensable la mayor precision, ó bien cuando el instrumento que haya servido para medir á z no corresponda á ese grado de exactitud, como sucede con el sextante.

El método de Littrow, empleado exclusivamente para la determinacion de una latitud, ofreceria á veces el inconveniente de no prestarse á la eliminacion de los errores angulares, por ser solo aplicable á las circumpolares; pero puede usarse combinado con el mas gene-

ral de distancias zenitales circunmeridianas, procurando que estas últimas se refieran á estrellas australes que culminen casi á la misma altura que aquellas. Por otra parte, haciendo uso de un altazimut, y en general, de un buen instrumento cuyas correcciones se hayan determinado con anterioridad, puede decirse que no hay que temer aquel inconveniente.

á la dist.ª polar media $\delta_0 = 1^\circ 20'$ ó sea á la declinacion media $\delta = 88^\circ 40'$, pues

$$A = -d_0 \cos h - \frac{1}{2}(d_0 \operatorname{sen} h)(d_0 \operatorname{sen} h)^2 \operatorname{sen} 1'' \qquad B = \frac{1}{2}(d_0 \operatorname{sen} h)^2 \cot z \operatorname{sen} 1'' + \frac{1}{8}(\tan^3 h)(d_0 \operatorname{sen} h)^4 \operatorname{sen}^3 1''$$

los valores de A estan dados con su respectivo signo de 0^h á 12^h de angulo horario y de 1^m en 1^m, pudiendo tomar los mismos valores para los angulos horarios superiores á 12^h entrando á la tabla con el argumento 24^h – ángulo horario y dejando su signo de los valores.

CAPITULO XIX.

DETERMINACION DE LA LATITUD.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

273.— La eliminacion inmediata de los errores angulares, que acaso son los que mas directamente influyen en las observaciones de latitud, se consigue observando dos estrellas en el momento en que adquieren la misma distancia zenital aparente. Conviene escogerlas de tal manera que el promedio de sus declinaciones sea próximamente igual á la latitud que se busca, y ademas, que no difieran mucho en ascension recta; porque de ese modo pueden observarse cerca del meridiano para no temer la influencia de algun pequeño error en la hora y para terminar toda la operacion en poco tiempo.

Una vez hecha la eleccion conveniente, se dirige el telescopio del instrumento á la que culmine primero, ya sea la del Norte ó la del Sur, y luego que se tiene en la interseccion de los hilos, si el telescopio tiene retícula, ó que se confunden las dos imágenes si se emplea el sextante ó cualquiera otro instrumento de reflexion, se anota la hora y se deja el instrumento fijo en la posicion que tenia, á fin de esperar el instante en que la otra estrella adquiere la misma al-

tura para anotar la hora correspondiente. Siendo estas horas los únicos datos que debe recoger el observador, es innecesario apuntar la indicacion del instrumento angular, á no ser por pura precaucion para conocer algun cambio accidental que pudiera sufrir en el tiempo que trascurre de una observacion á otra.

Siendo t y t' las horas anotadas y $\triangle t$ y $\triangle t'$ las correspondientes correcciones del cronómetro, las horas exactas serán: $T = t + \triangle t$ y $T' = t' + \triangle t'$. Entónces las fórmulas (6) de la pág. 340 no contendrán mas incógnita que ϕ, y recordando que $\omega = \varepsilon + \psi$, podrán calcularse en el órden siguiente para determinar la latitud, introduciendo en ella las horas exactas:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \tfrac{1}{2}(T - T') + \tfrac{1}{2}(a' - a) \\ \varepsilon &= \tfrac{1}{2}(T + T') - \tfrac{1}{2}(a + a') \\ \text{tan. } \psi &= \text{tan. } \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \text{ tan. } \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \text{ cot. } \theta \\ \text{tan. } \phi &= \frac{\text{sen. } (\varepsilon + \psi) \text{ sen. } \theta}{\text{tan. } \frac{1}{2}(\delta - \delta') \text{ cos. } \psi} = \frac{\text{sen. } (\varepsilon + \psi) \text{ tan. } \frac{1}{2}(\delta + \delta') \text{ cos. } \theta}{\text{sen. } \psi} \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

Si es solar el cronómetro de que se sirve el observador, se convierten en siderales la duracion $\frac{1}{2}(T - T')$ y la hora media..... $\frac{1}{2}(T + T')$.

Ejemplo.—Apliquemos las fórmulas á las siguientes observaciones que, entre otras, hice en San Luis Potosí el 27 de Abril de 1867, con sextante y un cronómetro solar cuyo adelanto á las 9^h de la noche era de $10^m\ 7^s.64$, y su variacion diaria de $-3^s.87$. Esta marcha es bastante pequeña para que pueda suponerse nula sin error de importancia en intervalos cortos, al ménos en esta clase de observaciones en que la lentitud del movimiento ascensional de las estrellas, por estar cerca del meridiano, da lugar á una incertidumbre en las horas de las observaciones, evidentemente superior al error que se cometeria desechando la correccion por la marcha del cronómetro. Sin embargo, llevaré en cuenta la variacion á fin de presentar un tipo de cálculo mas general y completo.

a Ursæ maj. al N.	SEXTANTE.	*a Virginis.* al S.
$9^h\ 1^m\ 43^s.0$	$99°\ 10'$	$9^h\ 28^m\ 9^s.5$
„ $7\ 22.2$	$99\ 00$	„ $27\ 33.0$
„ $18\ 55.5$	$98\ 30$	„ $25\ 53.0$

Las posiciones de las estrellas eran:

α *Ursæ majoris*..... $\alpha = 10^h\ 55^m\ 31^s.12$..... $\delta = +62°\ 28'\ 9.''2$
α *Virginis*..... $\alpha' = 13\ 18\ 13.49$..... $\delta' = -10\ 28\ 7.\ 1$

Habiéndose observado tres alturas iguales de cada estrella, obtendrémos otras tantas determinaciones de la latitud. Apliquemos el cálculo á los datos de la primera, que corresponde á la graduacion 99° 10′ del sextante:

$\frac{1}{2}(\delta - \delta') = 36°\ 28'\ 8.''1$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\delta + \delta') = 26°\ 00'\ 1.''0$

$\frac{1}{2}(t - t') =$	$+0^h\ 13^m\ 13^s.25$	$\frac{1}{2}(t + t') =$	$9^h\ 14^m\ 56^s.25$
Marcha =	$+\ 0.\ 03$	Correccion =	$-\ 10\ \ 7.64$
Acel. =	$+\ 2.\ 17$		
		Hora media =	$9^h\ 4^m\ 48^s.61$
$\frac{1}{2}(T - T') =$	$-\ 0^h\ 13^m\ 15^s.39$	Ascen. recta ☉ =	$2\ 21\ \ 7.17$
$\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) =$	$1\ 11\ 21.18$	Acel. =	$1\ 29.50$
		$\frac{1}{2}(T + T') =$	$11^h\ 27^m\ 25^s.28$
$\theta =$	$0^h\ 58^m\ 5^s.79$	$\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') =$	$12\ \ 6\ 52.30$
	$14°\ 31'\ 26.''8$	$\varepsilon =$	$-\ 0^h\ 39^m\ 27^s.02$
			$-\ 9°\ 51'\ 45.''3$

---

tan. $\frac{1}{2}(\delta - \delta')$.....	9.8687160	sen. $(\varepsilon + \psi)$.....	9.8451605
tan. $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$.....	9.6881871	.....	9.6881871
cot. θ.....	0.5865886	cos. θ.....	9.9858943
tan. ψ.....	0.1434917		9.5192419
		sen. ψ.....	−9.9095880
$\psi =$	$54°\ 17'\ 51.''6$		
$\varepsilon =$	$-9\ 51\ 45.\ 3$	tan. ϕ.....	9.6096539
$\omega = \varepsilon + \psi =$	$44°\ 26'\ 6.''3$	$\phi =$	$22°\ 8'\ 56.''6$

Haciendo el cálculo con los datos de la segunda observacion se obtiene $\phi = 22°\ 8'\ 54.''4$, y con los referentes á la tercera,..... $\phi = 22°\ 9'\ 4.''2$. El promedio de los tres resultados será, pues:... $\phi = 22°\ 8'\ 58.''4$.

En la pág. 105 y siguientes de los "Nuevos Métodos Astronómicos" puede verse la correccion que es preciso hacer á las horas cuando se desea hallar desde luego la latitud valiéndose del promedio de una serie de observaciones, en vez de determinarla por cada una de ellas, como se ha hecho en el ejemplo anterior. Sirviéndose de los promedios es acaso un poco mas breve el cálculo; pero ofrece

en cambio el inconveniente de que no conociéndose los resultados individuales, tampoco se puede juzgar acerca de su concordancia; y fácilmente se comprende que basta que sea defectuosa una sola de las observaciones para que vicie todo el resultado, lo cual no sucede cuando se calculan una á una, puesto que al tomar su término medio se desechan de la combinacion aquel ó aquellos resultados que respecto de los demas presenten una discordancia que se crea superior al error posible de observacion. Por otra parte, el cálculo individual de las observaciones no es tan dilatado como parece á primera vista, en atencion á que son constantes todas aquellas cantidades que dependen de la posicion de las dos estrellas. Por todas estas razones no he creido de gran utilidad la exposicion del método de cálculo basado en el uso de los promedios de las horas con el fin de hacerlo correspondiente al de las distancias zenitales observadas.

En el hecho de ser las fórmulas (1) independientes de la indicacion del instrumento angular, se concibe que tambien el resultado lo será del error del elemento z; y que se evita el uso de los instrumentos meteorológicos por no necesitarse el conocimiento de la refraccion atmosférica, al ménos si no trascurre mucho tiempo entre las observaciones de las dos estrellas y sus distancias zenitales no son muy considerables. Todas estas ventajas del método son muy importantes para un viajero, que á veces no puede disponer de todos los elementos indispensables para la aplicacion de otros procedimientos.

Como puede suceder que á consecuencia del estado de los niveles del instrumento, de la diferencia de refraccion cuando entre las observaciones trascurre un tiempo considerable, ó por cualquiera otra causa las alturas de las dos estrellas no sean exactamente iguales, se hará en tales casos una pequeña correccion á una de las horas. Sea $\triangle z$ la diferencia de distancias zenitales, en la cual supongo incluidas todas las cantidades que la producen y x la correccion correspondiente. Siendo $\triangle z$ siempre muy pequeña, lo será tambien x, y tendrémos: $x = \frac{d\,h}{d\,z} \triangle z$. Sustituyendo el valor de $\frac{d\,h}{d\,z}$ (pág 321) y expresando en segundos de tiempo el de x, resulta:

$$x = \frac{\text{sen.}\, z\, \Delta z}{15 \cos.\, \phi \cos.\, \delta\, \text{sen.}\, h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En esta correccion se introducen valores aproximativos de ϕ y de

z; teniendo cuidado con el juego de los signos. Así, por ejemplo, si la segunda estrella se observa á una altura demasiado grande, $\triangle z$ será positiva para esa estrella, de modo que si está al Oeste, siendo entónces tambien h positivo, lo será x, y la hora correspondiente á la igualdad de alturas es $T + x$, que es la que debe emplearse en el cálculo de la latitud.

274.— Cuando se conozca la latitud aproximativa de la estacion, puede hacerse el cálculo de este otro modo. Determinando á θ, ε y ψ por las tres primeras fórmulas, se tendrá: $\omega = \varepsilon + \psi$. Sea ahora ϕ la latitud aproximativa y $\triangle \phi$ su correccion: si con ϕ se calcula el valor de ω, se tendrá un resultado inexacto ω' por la ecuacion:

$$\text{sen. } \omega' = \frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(\delta - \delta') \text{ tan. } \phi \text{ cos. } \psi}{\text{sen. } \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

y la diferencia $\omega - \omega'$ será debida únicamente al error que tenga la latitud supuesta, el cual se ha designado por $\triangle \phi$. Haciendo... $\omega - \omega' = \triangle \omega$, se tendrá: $\triangle \phi = \frac{d\phi}{d\omega'} \triangle \omega$; y diferenciando el valor de sen. ω' con relacion á ϕ, resulta $\frac{d\phi}{d\omega'} = \frac{\text{sen. } 2\phi}{2 \text{ tan. } \omega'}$, por lo cual se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle \phi = \dfrac{\text{sen. } 2\phi}{2 \text{ tan. } \omega'} (\omega - \omega') \\ \text{Latitud correcta.} = \phi + \triangle \phi \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

En nuestro ejemplo hallamos $\omega = 44° 26' 6.''3$. Si suponiendo $\phi = 22° 10'$ calculamos el valor de ω', se tiene:

tan. $\frac{1}{2}(\delta - \delta')$	9.8687160	$\frac{1}{2}$.....	9.69897
tan. ϕ.....	9.6100359	sen. 2ϕ.....	9.84437
cos. ψ.....	9.7660961	$\omega - \omega'$.....	2.25050—
sen. θ.....	—9.3993057	tan. ω'.....	—9.99219
sen. ω'.....	9.8455423	$\triangle \phi$.....	1.80165—
ω'	$= 44° 29' 4.''2$	$\triangle \phi$	$= -1' 3.''3$
ω	$= 44\ 26\ 6.\ 3$	ϕ	$= 22\ 10\ 00.\ 0$
$\omega - \omega'$	$= -2' 57.''9 = -177.''9$	Latitud	$= 22° 8' 56.''7$

Si por haber sido muy errónea la latitud supuesta, resulta muy considerable el valor de su correccion $\triangle \phi$, debe repetirse la operacion tomando por ϕ el resultado del primer cálculo.

275.—Digamos para terminar que luego que se haya obtenido el valor definitivo de la latitud del lugar, puede aplicarse el método de la pág. 348 para determinar la correccion $\triangle G$ que corresponde á los puntos de la graduacion que sirvieron en las observaciones, si es que se tuvo ocasion de anotar las indicaciones del barómetro y del termómetro para calcular la refraccion. El método es aun mas conveniente en este caso, en atencion á que en las observaciones ejecutadas á poca distancia del meridiano tiene ménos influencia un pequeño error en la hora que cuando el astro está cerca del primer vertical. Aplicando el procedimiento á las alturas del 27 de Abril que han servido de ejemplo, y habiendo sido de $0^m.614$ la presion atmosférica, de 20.°5 la temperatura del aire, de 22.°0 la del barómetro, y de $1'\ 50''$ el error inicial del sextante, resulta la refraccion $r=38.''7$, y en término medio $\triangle G=-45.''$ Esta correccion puede suponerse que es la que corresponde á la graduacion 99° próximamente del sextante.

CAPITULO XX.

DETERMINACION SIMULTÁNEA DE LA HORA Y DE LA LATITUD.

276.—Cuando no se reflexiona detenidamente acerca de la influencia relativa de los elementos que contribuyen á la determinacion de una cantidad cualquiera, parece indispensable la completa exactitud de aquellos para que resulte la incógnita con el mismo grado de precision. Esta condicion es ciertamente necesaria en teoría; pero como por una parte en la práctica todas nuestras apreciaciones tienen inevitablemente un límite mas allá del cual es inútil

pretender llevar la exactitud, y por otra, la combinacion de los datos que han de producir la cantidad que se busca, es generalmente de tal naturaleza ó de tal forma, que hace muy variables las influencias de los elementos conocidos, se infiere desde luego que modificando convenientemente y hasta donde sea posible aquella combinacion, somos dueños hasta cierto punto de eliminar el efecto de un elemento inexacto. Así, por ejemplo, hemos visto en la pág. 323, que por la simple eleccion de la figura del triángulo astronómico, se destruye casi del todo la influencia de un pequeño error de la latitud, pudiéndose obtener la hora con suficiente exactitud práctica aunque este último elemento no se conozca mas que aproximadamente, con solo observar el astro cerca del primer vertical de la estacion. De una manera análoga vimos en la pág. 418 que puede determinarse con la misma exactitud práctica la latitud de un lugar sin que influya un pequeño error de la hora, con solo ejecutar la observacion en los momentos del tránsito del astro.

Con estos ejemplos se comprenderá toda la importancia de las investigaciones dirigidas á estudiar la influencia relativa de los datos de un problema. Precisamente en el caso que he citado, dependiendo la hora de la latitud y esta de aquella, pareceria imposible la determinacion exacta de ambos elementos sin el estudio previo del efecto que cada uno de ellos ejerce en la resolucion de los dos problemas; pero habiéndose expuesto ampliamente en los Capítulos VII, VIII, IX y X la pequeña influencia de la latitud en la determinacion de la hora, y en los que preceden á este, desde el XV inclusive, el efecto igualmente insignificante que tiene en la latitud un pequeño error de la hora, se comprenderá sin dificultad que sujetándose á las prescripciones que resultan de aquel estudio, es posible hallar ambas cantidades partiendo de datos puramente aproximativos.

Lo que precede es quizá suficiente para que el observador guíe en todos casos sus operaciones de la manera mas eficaz para la determinacion de los dos importantes elementos, hora y latitud; pero no me parece inútil trazarle una marcha sistemática que le dé brevemente el mismo resultado, pues al ocupar por la primera vez una estacion para emprender una serie de trabajos astronómicos, hay veces que se ignora del todo el valor aproximativo de aquellas cantidades. El método que me parece mas sencillo para determinarlas

con el grado de aproximacion bastante para que en seguida se pueda proceder á su correccion definitiva, consiste en medir las distancias zenitales de dos estrellas, situada la una cerca del meridiano, y la otra tan inmediata al primer vertical como sea posible, anotando las horas cronométricas correspondientes. Para estimar la direccion de ambos planos basta el conocimiento de algunas constelaciones, con especialidad de las próximas al polo, y sobre todo el de la estrella polar, cuyo azimut nunca llega á 2° en nuestras regiones.

La estrella observada cerca del meridiano dará una distancia zenital que difiera muy poco, acaso solo algunos segundos, de su distancia zenital meridiana, por ser tan lento el movimiento ascensional de los astros en los momentos de sus tránsitos. En consecuencia, las fórmulas de la pág. 422 suministran un valor de la latitud suficientemente exacto para que pueda emplearse sin inconveniente alguno en la determinacion de la hora, sirviéndose al efecto de la distancia zenital de la estrella observada cerca del primer vertical y aplicando el método del Capítulo VII. La poca influencia que entónces tiene el error de la latitud da por resultado que se hallará la hora casi con entera exactitud.

Los dos elementos así determinados bastarán generalmente para aplicar en seguida cualquiera otro procedimiento con el fin de corregir la latitud; pero cuando no se tiene oportunidad de practicar nuevas observaciones, como sucede al hacer una rápida exploracion, importa sacar el mejor partido posible de las únicas que hayan podido ejecutarse. En tal caso, la hora hallada se emplea en reducir al meridiano la distancia zenital de la primera estrella, aplicando el método del Capítulo XVI, ó bien en determinar con mas precision la latitud por el procedimiento del Capítulo XV, pues en cualquiera de los dos no tiene casi influencia alguna el pequeñísimo error que pudiera existir en el estado del cronométro, en virtud de haberse empleado un valor inexacto de la latitud al calcular la hora por la segunda estrella. Por otra parte, la comparacion del resultado mas exacto con el valor de ϕ supuesto al principio, da á conocer si la diferencia es de tal importancia que exija la repeticion del cálculo de la hora, en cuyo caso se procede á hacer una nueva correccion siguiendo el mismo método, aunque raras veces es necesario. De esta manera he podido determinar con mucha aproximacion y viajando con rapidez, las latitudes de varios lugares, cuando ape-

nas contaba con unas cuantas horas de permanencia en ellos. Es claro que la precision de los resultados depende en gran parte del grado de exactitud con que puedan medirse las distancias zenitales, é importa por lo mismo emplear un instrumento bien conocido, así como barómetro y termómetro para calcular la refraccion. Por lo general, en mis exploraciones me he servido de un ipsómetro en vez del primero de aquellos instrumentos, pues por su medio es fácil determinar la presion atmosférica (Tomo I, pág. 517). Tambien siempre que ha sido posible he determinado la hora por alturas iguales (Capítulos VIII y IX) con el fin de eliminar el elemento angular y sus correcciones.

277.—Cuando se conocen aproximadamente la latitud y el estado del cronómetro, pueden formarse ecuaciones de condicion para corregir los valores aproximativos, sirviéndose al efecto de las observaciones de dos ó mas estrellas. Las ecuaciones se forman de este modo: sea z la distancia zenital de cualquiera de las estrellas y ϕ la latitud supuesta: si con estos elementos y la declinacion se calcula el ángulo horario de la estrella, se obtendrá en general un valor de h erróneo, á causa del error que tenga ϕ. Por otra parte, la hora de la observacion combinada con la correccion que se supone al cronómetro y con la ascension recta de la estrella, suministrará otro valor de h tambien aproximativo, puesto que no se sabe con precision cuál sea el verdadero estado del cronómetro. Los dos valores de h obtenidos por uno y otro medio resultarán mas ó ménos discordes, y entónces estableceremos algebraicamente la condicion de que tomando en cuenta las correcciones de todos los elementos de que dependen uno y otro valor de h, deben estos resultar iguales.

Con ϕ, z y δ se calcula h por la ecuacion:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(z+\phi-\delta)\ \text{sen. } \frac{1}{2}(z-\phi+\delta)}{\cos.\ \phi \cos.\ \delta}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Sea ahora $\triangle\ \phi$ la correccion que demanda el valor de ϕ, y $\triangle\ h$ la correspondiente al ángulo horario. Se tendrá: $\triangle\ h = \frac{d\ h}{d\ \phi} \triangle\ \phi$, y calculando el coeficiente diferencial por medio de la ecuacion:... cos. z = sen. ϕ sen. δ + cos. ϕ cos. δ cos. h, se halla sin dificultad:

$$\frac{d\ h}{d\ \phi} = \frac{\text{tan. } \delta}{\text{sen. } h} - \frac{\text{tan. } \phi}{\text{tan. } h}$$

Expresando á $\triangle h$ en segundos de tiempo y haciendo para abreviar:

$$B = \frac{1}{15}\left(\frac{\tan.\,\delta}{\text{sen.}\,h} - \frac{\tan.\,\phi}{\tan.\,h}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

la expresion correccta del valor de h deducido del cálculo es:

$$h + B\,\Delta\,\phi$$

Para hallar otro valor deducido de la observacion, sea c la correccion supuesta al cronómetro á una hora cualquiera T, y llamemos v su variacion en la unidad de tiempo. En cualquiera otro instante t, que supongo ser su indicacion al medir z, se tendrá: ..... $\triangle\,t = c + \triangle\,c + v\,(t - T)$, siendo $\triangle\,c$ la correccion que necesita c. La expresion del ángulo horario será, pues:

$$t + c + \triangle\,c + v\,(t - T) - a$$

Igualando este valor con el precedente, y haciendo:

$$\tau = (a + h) - \big(t + c + v\,(t - T)\big) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

la ecuacion de condicion será:

$$B\,\Delta\,\phi - \Delta\,c + \tau = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Para cada una de las estrellas se calculan las fórmulas (1), (2), (3) y (4), y en seguida se resuelven las ecuaciones de condicion resultantes. Como las incógnitas son únicamente $\triangle\,\phi$ y $\triangle\,c$ bastan las observaciones de dos estrellas para determinarlas; pero si se han observado en mayor número pueden combinarse todas las ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados, (pág. 58).

Ejemplo.—El 13 de Mayo de 1867 entre otras observaciones hice las siguientes con sextante. La indicacion comun del instrumento fué 114° 00′, y el cronómetro solar de que me servia atrasaba $0^s.2$ por hora.

ESTRELLAS.	CRONOMETRO.	ASCEN. RECTAS.	DECLINACIONES.
α *Leonis* al O...	$8^h\ 58^m\ 24^s.74$	$10^h\ 1^m\ 18^s.14$	+12° 36′ 48.″0
α *Virginis* al S.	9 41 16.50	13 18 13.47	—10 28 7. 1

Tomemos $\phi = 22° 9'$ por latitud aproximativa, y admitamos, atendiendo al estado del cronómetro en los dias anteriores y á su marcha conocida, que en el instante de la observacion de α *Leonis* su correccion fuese $c = -9^m 50^s.00$. Las dos estrellas se observaron á la misma distancia zenital, que corregida por los errores instrumentales y por la refraccion fué $z = 33° 1' 30''$. Como el cálculo, si bien muy sencillo es largo, solo desarrollaré el que se refiere á α *Virginis* para que sirva de tipo.

$z =$ 33° 1′ 30.″0
$\phi =$ 22 9 00. 0
$\delta =$ −10 28 7. 1

$a =$ 32° 49′ 18.″5 ..... sen 9.7340218
$b =$ 0 12 11. 5 ..... sen 7.5497881
cos. ϕ ..... −9.9667048
cos. δ ..... −9.9927101

sen.$^2 \frac{1}{2} h$... 7.3243950 $\quad \frac{1}{2} h = -2° 37' 59.''3$

sen.$\frac{1}{2} h$... 8.6621975 $\quad h \begin{cases} = -5° 15' 58.''6 \\ = -0^h 21^m 3^s.91 \end{cases}$

8.8239 ..... $\frac{1}{15}$ 8.8239

tan. δ ..... 9.2666— tan. ϕ 9.6097
sen. h ..... −8.9628— tan. h ..... −8.9646—

9.1277+ 9.4690—

+0.1342
+0.2944

$B = +0.4286$

$t =$ 9h 41m 16s.50
$c + v\,(t - T) =$ — 9 49. 86

Hora media = 9 31 26. 64
Asc. recta = 3 24 12. 00
Acel. = + 1 33. 87

Hora sideral = 12 57 12. 51
$a + h =$ 12 57 9. 56

$r =$ — 2s.95

El ángulo horario se ha tomado negativo porque la estrella todavía no pasaba por el meridiano cuando se observó; y por ser solar el cronómetro se convirtió $t + c + v\,(t - T)$ en hora sideral. La hora T á que se refiere la correccion supuesta al cronómetro, puede ser un instante cualquiera, y por comodidad he tomado por T la hora de la observacion de la primera estrella. La ecuacion de condicion para α *Virginis* será en consecuencia:

$$+0.429\,\Delta\phi - \Delta c - 2^s.95 = 0$$

Haciendo un cálculo semejante para α *Leonis*, se obtendrá la

ecuacion que le corresponde y es la primera que va en seguida, de modo que se combinarán las dos siguientes:

$$-0.014\,\Delta\phi - \Delta c - 1^s.68 = 0$$
$$+0.429\,\Delta\phi - \Delta c - 2.\,95 = 0$$

Restando una de otra se tiene: $0.443\,\Delta\phi = 1.27$, de donde resulta: $\Delta\phi = +\,2.''9$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones de condicion se obtendrá: $\Delta c = -\,1^s.72$, de manera que la latitud y la correccion del cronómetro verdaderas que se deducen de estas observaciones, son:

$$\phi + \Delta\phi = 22^\circ\,9'\,00'' + 2.''9 = 22^\circ\,9'\,2.''9$$
$$c + \Delta c = -\,9^m\,50^s - 1^s.72 = -9^m\,51^s.72$$

La pequeñez de las correcciones indica que en este ejemplo los supuestos fueron casi exactos; pero no hay inconveniente en adoptarlos mas distantes de la verdad. Lo que siempre debe procurarse es observar una de las estrellas cerca del meridiano y la otra cerca del primer vertical, á fin de que difieran bastante los dos coeficientes de $\Delta\phi$. En la Sec. II, Cap. III de los "Nuevos Métodos Astronómicos" puede verse el método semejante que conviene seguir para determinar la correccion del instrumento angular, á la vez que la de la latitud y la del estado del cronómetro, lo cual supone la observacion de tres estrellas por lo ménos á la misma altura. Esta última circunstancia no es indispensable en el procedimiento que acabo de exponer, aunque sí lo es el conocimiento exacto de las dos distancias zenitales.

278.—Otro método que no exige el conocimiento aproximativo de la latitud ni de la hora y que es al mismo tiempo independiente del elemento angular z, consiste en observar tres estrellas diferentes á la misma altura, aplicando en seguida las ecuaciones (1) del Capítulo precedente. Para evitar equivocaciones convengamos en designar sin acento las cantidades que se refieren á la estrella mas occidental, con un acento las que corresponden á la estrella intermedia, y con dos acentos los relativos á la mas oriental, que es aquella que tiene mayor ascension recta. Siendo ademas Δt la

correccion incógnita del cronómetro á la hora t y v su variacion horaria, las que corresponden á las horas t' y t'' son:

$$\Delta t' = \Delta t + v\,(t' - t) \qquad\qquad \Delta t'' = \Delta t + v\,(t'' - t)$$

Establecido esto, la combinacion sucesiva de la estrella occidental con las otras dos, dará dos valores de θ y de ψ, que serán:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \tfrac{1}{2}(t - t') + \tfrac{1}{2} v\,(t - t') + \tfrac{1}{2}(a' - a) \\ \theta' &= \tfrac{1}{2}(t - t'') + \tfrac{1}{2} v\,(t - t'') + \tfrac{1}{2}(a'' - a) \\ \text{tan. } \psi &= \text{tan. } \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\ \text{tan. } \tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\ \text{cot. } \theta \\ \text{tan. } \psi' &= \text{tan. } \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'')\ \text{tan. } \tfrac{1}{2}(\delta + \delta'')\ \text{cot. } \theta' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Como no puede conocerse el valor de $\omega = \varepsilon + \psi$, en atencion á que ε es funcion de las correcciones del cronómetro, se tendrán dos incógnitas en la ecuacion tan. $\phi = \frac{\text{sen. } (\varepsilon + \psi)\ \text{tan. } \frac{1}{2}(\delta + \delta')\ \text{cos. } \theta}{\text{sen. } \psi}$, por lo cual no puede calcularse directamente bajo esa forma, sino del modo siguiente.

El ángulo horario de la primera estrella seria $h = \varepsilon + \theta$, de donde resulta: $\varepsilon = h - \theta$, ó bien $\varepsilon + \psi = h - \theta + \psi$. Si hacemos $Q = \theta - \psi$, y ademas $q = \frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(\delta + \delta')\ \text{cos. } \theta}{\text{sen. } \psi}$, se tendrá: tan. $\phi = q$ sen. $(h - Q)$. Una combinacion semejante de la primera y tercera estrellas daria ecuaciones de la misma forma, de modo que para determinar las dos incógnitas h y ϕ, se tiene:

$$\text{tan. } \phi = q\ \text{sen. } (h - Q) \qquad\qquad \text{tan. } \phi = q'\ \text{sen. } (h - Q')$$

La eliminacion de tan. ϕ y el desarrollo de la ecuacion resultante producen la siguiente, que determina á h:

$$\text{tan } h = \frac{q\ \text{sen. } Q - q'\ \text{sen. } Q'}{q\ \text{cos. } Q - q'\ \text{cos. } Q'}$$

Conociendo el valor de h, cualquiera de las ecuaciones anteriores suministra el de ϕ, siendo tambien fácil calcular el de Δt, puesto que se tiene la relacion: $h = t + \Delta t - a$.

En resúmen, despues de calculados los valores de θ, θ', ψ y ψ' por las fórmulas (5), se calculan las que siguen:

$$q = \frac{\tan.\ \frac{1}{2}(\delta + \delta')\ \cos.\ \theta}{\text{sen. } \psi} \qquad q' = \frac{\tan.\ \frac{1}{2}(\delta + \delta'')\ \cos.\ \theta'}{\text{sen. } \psi'}$$

$$Q = \theta - \psi \qquad Q' = \theta' - \psi'$$

$$\tan.\ h = \frac{q\ \text{sen. } Q - q'\ \text{sen. } Q'}{q\ \cos.\ Q - q'\ \cos.\ Q'} \qquad \text{... (6)}$$

$$\tan.\ \phi = q\ \text{sen. } (h - Q) = q'\ \text{sen. } (h - Q')$$

$$\Delta t = h + a - t$$

Ejemplo.—El 9 de Mayo de 1867 hice las siguientes observaciones sirviéndome de un cronómetro solar cuya variacion era casi insensible en intervalos cortos, por lo que supondré $v = 0$. La indicacion comun del sextante fué $G = 113° 15'$.

α *Leonis*.....	$t = 9^h\ 15^m\ 58^s.3$	$a = 10^h\ 1^m\ 18^s.19$	$\delta = +12°\ 36'\ 47.''7$
γ *Ursæ maj*..	$t' = 9\ 32\ 23.0$	$a' = 11\ 46\ 50.65$	$\delta' = +54\ 26\ 7.\ 0$
α *Bootis*.....	$t'' = 8\ 46\ 42.1$	$a'' = 14\ 9\ 37.62$	$\delta'' = +19\ 52\ 31.\ 9$

No desarrollo todo el cálculo por ser tan semejante á otros que se han detallado en los Capítulos precedentes, y solo indicaré los principales resultados para que al desarrollarlo el lector encuentre puntos de rectificacion.

$\theta =$	$11°\ 8'\ 8.''1$	$\theta' =$	$34°\ 42'\ 33.''1$
$\psi =$	$-52\ 7\ 50.\ 3$	$\psi' =$	$-\ 1\ 31\ 44.\ 8$
$Q =$	$63\ 15\ 58.\ 4$	$Q' =$	$36\ 14\ 17.\ 9$

log. $q =$	9.9156238—	log. $q' =$	0.9530755—
q sen. $Q =$	— 0.73541	q cos. $Q =$	—0.37041
q' sen. $Q' =$	— 5.30603	q' cos. $Q' =$	—7.23961
Numerador =	+ 4.57062	Denominador =	+6.86920

El resto del cálculo es como sigue:

Num.....	0.6599751
Den.....	—0.8369062
tan. h.....	9.8230689

$h =$	$+33°\ 38'\ 20.''2$		$+33°\ 38'\ 20.''2$
$Q =$	$+63\ 15\ 58.\ 4$	$Q' =$	$+36\ 14\ 17.\ 9$
$h - Q =$	$-29°\ 37'\ 38.''2$	$h - Q' =$	$-\ 2°\ 35'\ 57.''7$
q.....	9.9156238—	q.....	0.9530755—
sen. $(h - Q)$...	9.6940396—	sen. $(h - Q')$...	8.6565950—
tan. ϕ.....	9.6096634	tan. ϕ.....	9.6096705
$\phi =$	$22°\ 8'\ 58.''2$	$\phi =$	$22°\ 8'\ 59.''4$

La pequeña diferencia de los dos valores de ϕ proviene de los ligeros errores inevitables de la aproximacion logarítmica, y el promedio $\phi = 22° 8' 58.''8$ es el que en general convendrá adoptar. Para la correccion del cronómetro tendrémos:

$h =$	$+ 2^h$	14^m	$33^s.35$
$a =$	10	1	18.19
Hora sideral =	12	15	51.54
Asc. recta =	3	8	25.78
	9	7	25.76
Reduc. =		— 1	29.68
Hora media =	9^h	5^m	$56^s.08$
$t =$	9	15	58.30
$\Delta t =$		-10^m	$2^s.22$

Una vez hallada la hora y la latitud podria determinarse la correccion del sextante aplicando el método expuesto en la pág. 349, sin mas elementos adicionales que el error inicial y la refraccion.

CAPITULO XXI.

DETERMINACION DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS LUNARES.

279.—El principio general en que se funda la determinacion de la longitud geográfica se ha expuesto en la pág. 241, y consiste en comparar las horas locales que se cuentan en dos estaciones en el momento en que se produce un fenómeno instantáneo, como es aquel en que un astro adquiere cierta posicion en la esfera celeste. Por lo regular la hora del primer meridiano, ó sea del meridiano de las Efemérides, es susceptible de calcularse de antemano, y la observacion

directa es la que da á conocer en otra estacion cualquiera la hora que corresponde al fenómeno en cuestion.

Se comprende desde luego la importancia de que el astro cuya posicion debe servir para la medida de la longitud tenga un movimiento rápido sobre la esfera; porque debiéndose suponer siempre algun error en la observacion, es claro que influirá en el resultado, tanto mas cuanto mas pequeña sea la variacion que sufra la posicion del astro con relacion al tiempo. De todos los astros la luna es la que por su proximidad á la tierra se mueve aparentemente con mas rapidez respecto de las estrellas fijas, y es por lo mismo la que sirve para la determinacion de las longitudes. La variacion de su ascension recta excede generalmente poco de 2^m por hora; pero aun suponiéndola de 144^s en una hora media, seria $\frac{1}{25}$ del tiempo, y en consecuencia cada segundo de error que se cometiera al determinar su ascension recta por la observacion, produciria otro de 25^s en la longitud deducida. Como es tan irregular el movimiento de la luna, hay veces que solo llega á unos 100^s por hora, en cuyo caso el error e de la medida directa originaria el de $36\,e$ en el resultado. Adoptando la variacion media de la luna en ascension recta para hacer las consideraciones que preceden, resulta próximamente 27.5 por coeficiente medio del error de observacion.

Estos guarismos indican la gran trascendencia que tiene aquel error y ponen de manifiesto la dificultad de determinar exactamente la longitud por observaciones celestes, aun sirviéndose del astro cuyas circunstancias son mas favorables al problema. Es cierto que en una operacion delicada no es de creerse que el error de observacion llegue á 1^s, pues acaso siempre sea posible reducirlo á ménos de $0^s.2$; pero tambien hay que tomar en cuenta el hecho de que las Tablas de la luna tienen á veces errores que exceden de $0^s.5$, y que estos producen el mismo efecto que los de observacion. Los errores tabulares pueden, sin embargo, eliminarse haciendo uso de las observaciones directas ejecutadas en el primer meridiano ó en otro cuya longitud se conozca exactamente, en lugar de servirse de las posiciones de la luna tomadas de las Efemérides; pero este medio de correccion, de que presentaré algun ejemplo en los Capítulos siguientes, no siempre puede aplicarse por falta de observaciones correspondientes á la que se desee comparar con ellas.

Todas estas generalidades son aplicables á cualquiera de los pro-

cedimientos en que se observa la luna para determinar una longitud geográfica; y á ellas debe añadirse la de que siempre se supone conocido un valor aproximativo de la misma longitud, de manera que por lo regular el problema se reduce á calcular la correccion que necesita el primer supuesto. La longitud aproximativa se llama *estima*, y para que se comprenda la necesidad de su conocimiento, basta indicar que como en una estacion cualquiera la medida de la posicion de la luna no puede ser por lo general directa, sino calculada con ayuda de otros varios elementos que son los que suministra directamente la observacion, es preciso tomar ciertos datos de las Efemérides para la hora del primer meridiano que corresponde al mismo instante físico en que se practicó aquella, y para esto es indispensable la estima. Podria creerse á primera vista que el error de esta, influyendo necesariamente en los elementos calculados por interpolacion y suministrando en consecuencia solo sus valores aproximativos, deberia originar en las operaciones de cálculo otro error de importancia; pero tal conclusion deja de admitirse luego que se reflexiona en las pequeñas variaciones que tienen todos ó la mayor parte de los elementos tabulares repecto del tiempo. Un error de 1^m, por ejemplo, en la estima respecto del valor de la verdadera longitud, es bastante considerable, pues generalmente se conoce aquella con mas aproximacion; pero aun en ese caso se tendria con el mismo error la hora del meridiano de las Efemérides, y en tan corto tiempo casi no tienen variacion apreciable muchos de sus elementos. Suponiendo, sin embargo, que estos resultasen sensiblemente erróneos, si se procura que sea pequeña su influencia en la combinacion que de ellos debe hacerse, eligiendo convenientemente las condiciones de la observacion, es claro que por su medio se hallará un valor de la longitud mas exacto que la estima supuesta al principio, y que si aun queda algun error en el resultado se hará desaparecer repitiendo los cálculos con la nueva estima que se deduzca de los primeros. En resúmen, la determinacion de la longitud, considerada bajo este punto de vista, no viene á ser mas que una aplicacion del método de aproximaciones sucesivas, en la cual el error originado por cada supuesto inexacto, decrece con tal rapidez, que hace generalmente innecesaria la repeticion del cálculo, al ménos cuando una simple observacion preliminar haya dado á conocer la estima con aproximacion de unos cuantos segundos de tiempo.

280.—Concretémonos ahora al método que forma el objeto de este Capítulo. Los Almanaques Náuticos traen en las últimas páginas correspondientes á cada mes, las distancias angulares del centro de la luna al del sol, al de varios planetas y á algunas de las principales estrellas fijas. Estas distancias están calculadas de 3^h en 3^h del meridiano de Greenwich, y son geocéntricas ó tales como se verian desde el centro de la tierra. Si, pues, un observador mide en una estacion cualquiera la distancia angular entre la luna y alguno de aquellos astros, anotando la hora media correspondiente, y reduce su observacion á lo que seria vista desde el centro de la tierra, podrá hallar en seguida por interpolacion á qué hora de Greenwich tenia lugar aquella distancia, sirviéndose al efecto de las que constan en las Efemérides. La comparacion de esta hora con la local de la observacion le dará por diferencia la longitud de su estacion respecto del meridiano de aquel Observatorio, puesto que ambas corresponden al instante físico en que tuvo la luna determinada poscion en el cielo.

Siendo α y α', δ y δ' las ascensiones rectas y las declinaciones de la luna y del otro astro respectivamente, las distancias lunares de las Efemérides están calculadas por la ecuacion:

$$\cos. d = \text{sen. } \delta \text{ sen. } \delta' + \cos. \delta \cos. \delta' \cos. (\alpha - \alpha') \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

puesto que en el triángulo formado por el polo y los centros de ambos astros se conocen dos lados y el ángulo comprendido $\alpha - \alpha'$.

La observacion se hace comunmente con sextante ó cualquiera otro instrumento de reflexion, por ser los que mejor se prestan á colocarse en el plano de los objetos; y como solo es visible el borde iluminado de la luna, lo que se mide directamente es la distancia de este limbo al otro astro. Para mas generalidad supondré que el observador tome el ángulo comprendido entre los bordes de los dos astros, y así siendo D' la distancia que obtenga, la comprendida entre sus centros será:

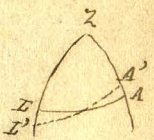
$$D = D' \pm S \pm s \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

representando S el semidiámetro aparente ó aumentado de la luna (pág. 266), s el del otro astro, y debiéndose tomar los signos superiores cuando el ángulo medido sea entre los bordes mas inmedia-

tos. Siempre que se observe la distancia lunar respecto de una estrella fija, se tendrá $s = 0$.

Como la refraccion y la paralaje alteran las posiciones de los astros, el valor de D es la distancia aparente tal como se ve desde la superficie de la tierra, y es la que debe reducirse en seguida al centro para hacerla comparable con los datos de las Efemérides. Sea L (fig. 51ª) la posicion geocéntrica de la luna y A la de del otro astro: puesto que es tan considerable el valor de la paralaje de la luna, su efecto que es el de hacerla parecer mas baja, excede al efecto contrario de la refraccion que la hace parecer mas elevada, de manera que desde la superficie de la tierra se verá en L'. En el otro astro el efecto de la refraccion será superior al de su pequeña paralaje, y así es que lo verémos en A'. En consecuencia, el ángulo obtenido por la observacion será $D = A'\,L'$, miéntras que el que se trata de hallar es el geocéntrico $d = A\,L$. Con el fin de tener los datos necesarios para la reduccion, supongamos conocidas las distancias zenitales aparentes $Z\,L' = Z'$ y $Z\,A' = z'$, así como las verdaderas $Z\,L = Z$ y $Z\,A = z$, que no difieren de las anteriores mas que por el efecto combinado de la refraccion y de la paralaje de altura. El triángulo aparente $L'\,Z\,A'$ da la ecuacion siguiente, en la cual M representa la diferencia de azimutes $L'\,Z\,A'$:

$$\text{cos. } D = \text{cos. } Z' \text{ cos. } z' + \text{sen. } Z' \text{ sen. } z' \text{ cos. } M$$



En el triángulo verdadero $L\,Z\,A$ es el mismo el ángulo M, y por consiguiente se tendrá:

$$\text{cos. } d = \text{cos. } Z \text{ cos. } z + \text{sen. } Z \text{ sen. } z \text{ cos. } M$$

Eliminando á cos. M entre las dos ecuaciones, resulta:

$$\frac{\text{cos. } D - \text{cos. } Z' \text{ cos. } z'}{\text{sen. } Z' \text{ sen. } z'} = \frac{\text{cos. } d - \text{cos. } Z \text{ cos. } z}{\text{sen. } Z \text{ sen. } z}$$

Añadiendo la unidad á cada miembro de esta ecuacion y reduciendo, se halla:

$$\frac{\text{cos. } D - \text{cos. } (Z' + z')}{\text{sen. } Z' \text{ sen. } z'} = \frac{\text{cos. } d - \text{cos. } (Z + z)}{\text{sen. } Z \text{ sen. } z}$$

que tambien puede escribirse de este modo:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(Z' + z' + D) \text{ sen. } \frac{1}{2}(Z' + z' - D)}{\text{sen. } Z' \text{ sen. } z'} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(Z + z) - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} d}{\text{sen. } Z \text{ sen. } z}$$

de la cual se obtiene, haciendo $m = \frac{1}{2}(Z' + z' + D)$:

$$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} d = \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}(Z + z) - \frac{\text{sen. } Z \text{ sen. } z}{\text{sen. } Z' \text{ sen. } z'} \text{ sen. } m \text{ sen. } (m - D)$$

Para hacer esta ecuacion fácilmente calculable por logaritmos, hagamos uso de un ángulo subsidiario N, sujeto á la condicion:

$$\text{sen.}^2 N = \frac{\text{sen. } Z \text{ sen. } z}{\text{sen. } Z' \text{ sen. } z'} \cdot \frac{\text{sen. } m \text{ sen. } (m - D)}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(Z + z)} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

y se tendrá sustituyendo:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} d = \text{sen. } \tfrac{1}{2}(Z + z) \text{ cos. } N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

fórmula que da la distancia reducida.

281.—Las distancias zenitales aparentes y verdaderas de los dos astros se obtienen ó por la medida directa ó por el cálculo. En el primer caso se toman las alturas ó las distancias zenitales aparentes al mismo tiempo que se mide la distancia D, lo cual demanda el concurso de tres observadores trabajando simultáneamente, ó bien la repeticion de la medida de Z' y z' por un solo observador, á fin de hallar por interpolacion sus valores correspondientes al instante en que se haya medido el arco D. Si hay tres observadores, miéntras uno de ellos toma la distancia del astro á la luna, los otros dos miden sus dobles alturas con horizontes artificiales, manteniendo las imágenes en contacto por medio del tornillo de aproximacion hasta que el primer observador les indica que paralicen el movimiento cuando con su sextante haya establecido el contacto de los bordes de ambos astros. Apuntada la hora cronométrica que corresponde á ese instante, los tres observadores leen las indicaciones de sus respectivos instrumentos, dos de las cuales dan las dobles alturas y la tercera la distancia aparente de los astros, despues de corregidas por los errores de los sextantes.

Si una sola persona ha de practicar toda la observacion, debe co-

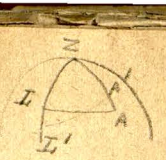
menzar por medir la altura del sol, del planeta ó de la estrella, anotando la hora correspondiente; y en seguida la de la luna, apuntando tambien la hora cronométrica. Hecho esto, mide la distancia angular de los dos astros con su hora respectiva; y por último vuelve á tomar las alturas, comenzando por la luna en esta segunda vez. Como todas estas operaciones no duran mucho, se supone proporcional al tiempo el movimiento ascensional de los dos astros, y puesto que se tienen dos alturas de cada uno y las horas cronométricas correspondientes, podrá hallarse por una simple proporcion el valor de las alturas para el instante de la medida de la distancia, comparando la diferencia de aquellas con el tiempo trascurrido. La hipótesis de proporcionalidad entre el ascenso ó descenso y el tiempo es sensiblemente exacta, excepto cuando alguno de los astros esté muy inmediato al meridiano; pero aun en este caso se sigue el mismo procedimiento, por no ser indispensable mucha precision en los datos Z' y z', y lo único que debe hacerse es procurar invertir poco tiempo en toda la operacion. Las distancias zenitales aparentes, corregidas por refraccion y paralaje, suministran las verdaderas Z y z. En caso de observarse una estrella fija, solo se corrige z' por la refraccion, puesto que su paralaje es nula.

Finalmente, puede prescindir el observador de la medida directa de Z' y z', y calcular las distancias zenitales verdaderas Z y z para la hora de la observacion por las fórmulas (3) de la pág. 239, interpolando al efecto para el mismo instante la ascension recta y la declinacion de la luna con ayuda de la estima ó longitud aproximativa, por medio de las fórmulas (3) de la pág. 290. Designando en seguida por R, r y P, p las refracciones y paralajes de altura de la luna y el astro respectivamente, se tendrá: $Z' = Z - R + P$ y..... $z' = z - r + p$, puesto que las correcciones deben aplicarse con signo contrario á las distancias zenitales verdaderas para obtener las aparentes. Aquí conviene advertir que como las Tablas de refraccion tienen la distancia zenital aparente por argumento, deberá hacerse uso del valor aproximativo $Z' = Z - \rho + P$ para calcular el de R, determinando á P por la fórmula (4) de la pág. 265. Se ve que la operacion de gabinete es mas laboriosa cuando se calculan las distancias zenitales verdaderas en vez de medirse directamente las aparentes; pero muchas veces es preferible este procedimiento por ser quizá mas exacto cuando haya poco error en la estima.

Al tomar la distancia D deben tenerse presentes las reglas para el manejo del sextante expuestas en el Capítulo VI, especialmente las que se refieren á la intensidad de las imágenes. Por lo comun se dirige el telescopio al astro ménos luminoso, á fin de que el mas brillante sea el que sufra la doble reflexion; así es que cuando se observe la luna con el sol se visará la primera directamente, y si se observa otro astro cualquiera con la luna, aquel será el que se vise. Si á pesar de haber alejado el telescopio del limbo con el fin de dar la misma intensidad á las imágenes fuese la luz de la luna demasiado fuerte respecto de la del planeta ó de la estrella, se pondrá uno de los vidrios ménos oscuros delante del espejo mayor. Tratándose del sol, se hará uso de la combinacion de helioscopios que se juzgue mas conveniente.

Importa tambien cerciorarse de la exactitud de la distancia D' de los bordes, haciendo oscilar ligeramente el sextante al derredor del eje del telescopio, á fin de que la imágen refleja se mueva hácia un lado y otro de la directa. Con el tornillo de aproximacion deben irse haciendo las correcciones hasta que en ese leve movimiento el borde de la luna toque solamente al del sol ó del planeta, ó bien á la estrella en su caso. Para encontrar pronto las imágenes de los dos astros en el campo del telescopio, puede ponerse de antemano la alidada en la distancia lunar aproximativa que indiquen las Efemérides para aquella hora, pues aunque esta es geocéntrica nunca difiere mucho de la aparente, y se evita tambien de este modo el peligro de tomar equivocadamente el ángulo de la luna con otra estrella. Diré, por último, que siguiendo la regla general de visar directamente el astro ménos luminoso, hay necesidad á veces de tener el sextante con la graduacion hácia abajo.

282.— Antes de presentar una aplicacion numérica de la determinacion de la longitud por el método de distancias lunares, indiquemos dos pequeñas correcciones que generalmente no pueden omitirse sin error. Cuando los astros están poco elevados sobre el horizonte, la diversa refraccion que obra en sus bordes superior é inferior da al disco una apariencia elíptica contrayendo sensiblemente el diámetro vertical. Resulta de aquí que el semidiámetro tabular solo corresponde al horizontal del astro, y como por lo regular el arco medido D' está en un plano inclinado, deberán introducirse en la ecuacion (2) los semidiámetros que convienen al pun-



to de los discos por donde pasa aquel plano. Las contracciones que les corresponden se calculan fácilmente en funcion de los ángulos $Q = Z\,L'\,A'$ y $q = Z\,A'\,L'$, cuyos valores no se necesitan con mucha exactitud. En la pág. 12 hemos visto que la expresion del radio de una elipse en funcion del semi-eje mayor a, es..... $a\,(1 - \frac{1}{2}\,e^2\,\text{sen.}^2\,\phi)$; y atendiendo á que $\frac{1}{2}\,e^2$ es casi igual á $\frac{a-b}{a}$ (pág 7), el valor precedente equivale á este otro: $a - (a - b)\,\text{sen.}^2\,\phi$. Puede tomarse por ϕ el ángulo formado por el radio con el eje a, y como este ángulo es complementario de los que ahora designo por Q y q, si llamamos C y c las contracciones de los semidiámetros verticales, deberán emplearse en la fórmula (2) los siguientes en lugar de S y s:

$$S - C\,\text{cos.}^2\,Q \qquad\qquad s - c\,\text{cos.}^2\,q \qquad\qquad \ldots\ldots (5)$$

Los ángulos Q y q se calculan con la aproximacion suficiente por las ecuaciones que siguen, haciendo uso del valor de D suministrado por la fórmula (2) y empleando logaritmos de cuatro ó cinco cifras:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,Q &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,(z' + D - Z')\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,(z' + Z' - D)}{\text{sen.}\,D\,\text{sen.}\,Z'}} \\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,q &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,(Z' + D - z')\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,(Z' + z' - D)}{\text{sen.}\,D\,\text{sen.}\,z'}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

En cuanto á las contracciones C y c se determinan calculando las refracciones que corresponden á la distancia zenital del centro del astro mas el semidiámetro, y á la misma distancia zenital ménos el semidiámetro. La diferencia de ambas refracciones da la contraccion del diámetro vertical, y por consiguiente la semidiferencia será la que corresponde al semidiámetro. Por lo general no hay inconveniente en servirse solo de las refracciones medias ρ, cuyos logaritmos constan en la Tabla I del fin. Cuando las distancias zenitales de los astros no exceden de 45° ó 50° son sensiblemente nulos los valores de las contracciones.

La segunda correccion proviene de que referidas las distancias zenitales de la luna al zenit verdadero y no al geocéntrico, tambien la paralaje por cuyo medio se convierte Z' en Z debe reducirse al extremo de la normal terrestre (pág. 277 y siguientes). Segun esto, la fórmula (4) da la distancia lunar tal como se veria desde este úl-

timo punto, y en consecuencia es preciso hacerle una pequeñísima correccion para reducirla al centro de la tierra. Sea P (fig. 52ª) el polo de la esfera celeste, L' el lugar que ocupa la luna vista desde el extremo de la normal y L la posicion en que se ve desde el centro, siendo $u = L\,L'$ la diferencia de declinaciones geocéntrica y reducida al extremo de la normal. El valor de u consta en la pág. 280, fórmula (22), á saber: $u = A$ sen. φ.

El arco $A\,L'$ es el que he designado por d, puesto que el otro astro, á causa de su gran distancia, se ve en A, ya sea que se suponga observado desde el centro de la tierra ó desde el punto en que la normal corta al eje polar. El arco $A\,L = d'$ será, pues, la distancia lunar geocéntrica que tratamos de calcular. Llamando δ y δ' las declinaciones geocéntricas de la luna y del otro astro respectivamente, se tiene: $P\,L = 90° - \delta$, $P\,A = 90° - \delta'$ y el triángulo $A\,P\,L$ da:

$$\text{sen. } \delta' = \text{sen. } \delta \text{ cos. } d' + \text{cos. } \delta \text{ sen. } d' \text{ cos. } L$$

En el triángulo $A\,L\,L'$ se tendrá igualmente:

$$\text{cos. } d = \text{cos. } d' \text{ cos. } u + \text{sen. } d' \text{ sen. } u \text{ cos. } L$$

Eliminando á cos. L y tomando la unidad por el coseno, y el arco por el seno del pequeño ángulo u, resulta:

$$\text{cos. } d - \text{cos. } d' = \frac{u}{\text{cos. } \delta}\,(\text{sen. } \delta' - \text{sen. } \delta \text{ cos. } d')$$

Como d y d' difieren muy poco, pueden tomarse una por otra en el segundo miembro, así como $(d' - d)$ sen. d en lugar del primero, con lo cual se obtiene:

$$d' - d = \frac{u}{\text{cos. } \delta}\left(\frac{\text{sen. } \delta'}{\text{sen. } d} - \frac{\text{sen. } \delta}{\text{tan. } d}\right)$$

y sustituyendo el valor de u se halla finalmente:

$$d' = d + \frac{A \text{ sen. } \phi}{\text{cos. } \delta}\left(\frac{\text{sen. } \delta'}{\text{sen. } d} - \frac{\text{sen. } \delta}{\text{tan. } d}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

283.— Teniendo ya la distancia geocéntrica d' no queda mas que compararla con las de las Efemérides para obtener la hora corres-

pondiente del primer meridiano. A este fin, llamando d_1 la que mas se aproxime á d', τ la hora que le corresponde y v la variacion de distancia que dan las Tablas por el tiempo constante de 3^h, se tendrá $x = \frac{10800^s}{v}(d' - d_1)$ por correccion de la hora τ. Segun esto, la hora del primer meridiano en que era d' la distancia lunar, tendrá por expresion:

$$T' = \tau + \frac{10800^s}{v}(d' - d_1) \quad \ldots\ldots (8)$$

y llamando T la hora local de la observacion, la longitud del lugar será:

$$L = T' - T \quad \ldots\ldots (9)$$

Como el valor de v es algo variable, conviene calcularlo para un instante intermedio entre τ y T', lo que exigiria la determinacion aproximativa de esta última hora. Sin embargo, las Efemérides dan los logaritmos de $\frac{10800}{v}$ con el título de "Log. proporcional de la diferencia," los cuales constan al lado de cada una de las distancias; de manera que lo que puede hacerse es calcular la fórmula (8) con el logaritmo que den las Tablas, y en seguida corregir el primer resultado interpolando aquel logaritmo para el instante intermedio de que hemos hablado, si es que se cree de alguna importancia tal correccion. En lugar de proceder de esta manera, seria mas exacto calcular la hora T' atendiendo á las diferencias segundas por medio de la fórmula (4) de la pág. 291, en la que $y - a$ representa la diferencia que ahora he designado por $d' - d_1$.

$t = \frac{y-a}{A} - \frac{B}{A}\left(\frac{y-a}{A}\right)^2$

$A = \Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2$

$B = \frac{1}{2}\Delta_2$

Ejemplo.—El 21 de Diciembre de 1861 tomé cerca de la ciudad de México una serie de cuatro distancias de Aldebaran (*α Tauri*) al limbo mas lejano de la luna. El promedio, corregido por los errores del sextante, fué $D' = 79° 42' 20''$, y la hora media correspondiente, $T = 10^h 30^m 54^s.8$. La latitud del lugar era $\phi = 19° 25' 53''$ y la estima $L = 6^h 36^m 23^s$. No habiendo medido las distancias zenitales aparentes, calculé las verdaderas por las fórmulas (3) de la pág. 239, tomando los datos para la hora $T + L$ de Greenwich y reduciendo la declinacion de la luna al extremo de la normal. De este modo obtuve:

$$Z = 76° 53' 46'' \qquad z = 3° 29' 24''$$

La paralaje horizontal de la luna, corregida por latitud y altura (pág. 278, fórmula (21)) fué $\pi = 56' 59.''6$ y el semidiámetro apa-

$\pi = \pi_0 + \frac{1}{2}\pi_0 e^2 \sin^2\varphi + \pi_0 \frac{m}{a}$

rente (pág. 270), $S = 15'\ 36.''6$. Calculando la paralaje de altura por la fórmula (4), pág. 265, hallé $P = 55'\ 42.''7$. Para determinar la refraccion se tenia: presion $0^m.590$ á 0° de temperatura, é indicacion del termómetro libre, 5°. Calculando el valor de R con estos datos y $Z + P = 77°\ 49.'5$ resultó $209''$, y repitiendo el cálculo con $Z + P - R = 77°\ 46'$ encontré $207.''7$, por lo que la distancia zenital aparente será: $Z' = 77°\ 46'\ 1''$. De una manera análoga resulta para la estrella $z' = 3°\ 29'\ 21''$.

Con Z', z' y $D = D' - S = 79°\ 26'\ 43''$, la primera de las fórmulas (6), calculada con logaritmos de cuatro decimales, produce $Q = 3°\ 7'\ 16''$ próximamente; y calculando la refraccion para $Z' + S$ y $Z' - S$ se halla $212.''2$ y $203.''5$, de donde se infiere que la contraccion del semidiámetro vertical de la luna es $C = 4.''3$. Con C y Q la primera de las fórmulas (5) da $15'\ 32''$ por semidiámetro corregido, y así la distancia lunar aparente es $D = 79°\ 26'\ 48''$. Calculemos ahora las ecuaciones (3) y (4) recordando que ..... $m = \frac{1}{2}(Z' + z' + D)$.

$D = 79°\ 26'\ 48''$	sen. Z.....	9.9885413	
$Z' = 77\ 46\ 1$	sen. z.....	8.7844342	
$z' = 3\ 29\ 21$	sen. m.....	9.9938127	
	sen. $(m - D)$..	8.1983746	
$m = 80°\ 21'\ 5''$	sen. Z'	—9.9900252	
$m - D = 0\ 54\ 17$	sen. z'.....	—8.7843306	
	sen.^{2} $\frac{1}{2}(Z+z)$	—9.6196108	cos. N..... 9.9917555
			sen. $\frac{1}{2}(Z+z)$.... 9.8098054
	sen.^{2} N.....	8.5711962	
			sen. $\frac{1}{2}d$..... 9.8015609
	sen. N.....	9.2855981	
			$\frac{1}{2}d = 39°\ 17'\ 19''$
	$N = 11°\ 7'\ 44''$		$d = 78\ 34\ 38$

Para calcular la reduccion al centro de la tierra, se tienen los datos:

$$\delta = +\ 8°\ 38'\ 46.''8 \qquad \pi = 57' \qquad \delta' = +\ 16°\ 13'\ 48.''2$$

Con los dos primeros se halla log. $A = 1.354$ en la Tabla de la pág. 280, y así:

A.....	1.354			Primer término.....	$2.''2$
sen. ϕ.....	9.522			Segundo ,, ...	$-\ 0.\ 2$
cos. δ.....	—9.995				
	0.881.....		0.881	$d' - d =$	$+\ 2.\ 0$
sen. δ'.....	9.446	sen. δ.....	9.177	$d =$	$78\ 34\ 38.\ 0$
ten. d.....	—9.991	tan. d.....	—0.695		
	0.336		9.363	$d' =$	$78°\ 34'\ 40''$

Refiriéndonos ahora al Almanaque americano, hallamos que el 21 de Diciembre de 1861, á 15^h y á 18^h de Greenwich las distancias geocéntricas de α *Tauri* al centro de la luna, eran:

$$\begin{aligned} &A\ 15^h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ d_1 = 77^\circ\ 25'\ 41'' \\ &\,,,\ 18 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ d_1 = 79\ \ 2\ \ 56 \end{aligned}$$

La que mas se aproxima á la observada d' es la segunda, y así tomarémos $r = 18^h$, $d_1 = 79^\circ\ 2'\ 56''$ y $v = 1^\circ\ 37'\ 15'' = 5835''$ para obtener:

$$\begin{aligned} d' &= 78^\circ\ 34'\ 40'' \\ d_1 &= 79\ \ 2\ \ 56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d' - d_1 &= -28'\ 16'' = -1696'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ 10800^s \ldots\ldots\ 4.0334238 \\ v &= 1^\circ\ 37'\ 15'' = 5835'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ -3.2294258- \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -3.7660409 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3.4968087- \\ -3139^s.1 = -\ 0^h\ 52^m\ 19^s.1 \end{array} \right.$$

$$r = 18\ \ 00\ \ 00.0$$

$$\begin{aligned} \text{Hora media de Greenwich} \ldots\ldots\ T' &= 17^h\ 7^m\ 40^s.9 \\ \,,,\ \ \,,\ \ \text{local} \ldots\ldots\ T &= 10\ 30\ 54.8 \end{aligned}$$

$$\text{Longitud} \ldots\ldots\ L = 6^h\ 36^m\ 46^s.1$$

Entre 18^h y 21^h de Greenwich la variacion de la distancia es $14''$ mayor, á saber, $v = 5849''$. Para proceder con la posible exactitud deberia hacerse uso del valor de v correspondiente al instante medio $17^h.6$ entre r y T'; y como el empleado en el cálculo puede suponerse que corresponde á $16^h.5$, variando á razon de $14''$ por 3^h, hallarémos proporcionalmente $v = 5840''$ para $17^h.6$. Repitiendo el cálculo con este valor se encuentra $L = 6^h\ 36^m\ 48^s.8$ por longitud segun esta observacion.

284.—El resultado excede en mas de 20^s á la estima ó longitud supuesta al principio, y como esta es casi exacta, debe atribuirse la diferencia al efecto combinado de los pequeños errores de observacion y de los que pueden existir en la posicion tabular de la luna. Los primeros, obrando directamente sobre d', producen en la hora T' de Greenwich y por consiguiente en la longitud, el efecto..... $\frac{10800^s}{v} \triangle G$, segun lo manifiesta la fórmula (8), siendo $\triangle G$ la correccion que necesite la graduacion del instrumento en el punto en que se haya hecho la lectura angular. Los segundos dan por resultado un valor inexacto de la distancia tabular d_1, calculada por la

ecuacion (1). Determinemos los coeficientes de estos errores, suponiendo que $\triangle \alpha$ y $\triangle \delta$ son las correcciones que necesitan la ascension recta y la declinacion de la luna que constan en las Efemérides. Diferenciando la ecuacion (1) respecto de α y de δ sucesivamente, hallarémos:

$$\frac{d\,d_1}{d\,\alpha} = \frac{\cos.\,\delta\,\cos.\,\delta'\,\text{sen.}\,(\alpha-\alpha')}{\text{sen.}\,d_1}$$

$$\frac{d\,d_1}{d\,\delta} = \frac{\text{sen.}\,\delta\,\cos.\,\delta'\,\cos.\,(\alpha-\alpha') - \cos.\,\delta\,\text{sen.}\,\delta'}{\text{sen.}\,d_1}$$

Multiplicando por 15 el primer coeficiente diferencial con el objeto de poder introducir á $\triangle \alpha$ en segundos de tiempo, la correccion de la distancia tabular será:

$$\Delta d_1 = \frac{15\,\cos.\,\delta\,\cos.\,\delta'\,\text{sen.}\,(\alpha-\alpha')}{\text{sen.}\,d_1}\,\Delta\alpha + \frac{\text{sen}\,\delta\,\cos.\,\delta'\,\cos.\,(\alpha-\alpha') - \cos.\,\delta\,\text{sen.}\,\delta'}{\text{sen.}\,d_1}\,\Delta\delta$$

y como segun lo manifiesta la ecuacion (8), esta correccion debe quedar multiplicada por $\frac{10800^s}{v}$, produciendo el efecto de disminuir, cuando es positiva, la hora T' y por tanto la longitud, hallarémos que la correccion de L por los errores del instrumento y de las coordenadas de la luna, tiene por expresion:

$$\left.\begin{aligned}\Delta L = \frac{10800}{v}\,\Delta G - \frac{162000}{v}\cdot\frac{\cos.\,\delta\,\cos.\,\delta'\,\text{sen.}\,(\alpha-\alpha')}{\text{sen.}\,d_1}\,\Delta\alpha \\ + \frac{10800}{v}\cdot\frac{\cos.\,\delta\,\text{sen.}\,\delta' - \text{sen.}\,\delta\,\cos.\,\delta'\,\cos.\,(\alpha-\alpha')}{\text{sen.}\,d_1}\,\Delta\delta\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10)$$

En nuestro ejemplo, á la hora de la observacion se tenia:

Luna.....	$\alpha = 9^h\ 50^m\ 11^s.15$	$\delta = +\ 8^\circ\ 38'\ 46.''8$
α *Tauri*.....	$\alpha' = 4\ \ 28\ \ 2.69$	$\delta' = +\ 16\ \ 13\ \ 48.\ \ 2$

Calculando con estos elementos los coeficientes de los errores, para lo cual bastan logaritmos de tres ó cuatro decimales, se halla:

$$\Delta L = 1.8\,\Delta G - 26.5\,\Delta\alpha + 0.5\,\Delta\delta$$

ecuacion que permite corregir el primer resultado luego que se conocen las correcciones de graduacion y posicion tabular de la luna. En nuestro caso habiéndose corregido desde un principio la lectura angular por los errores del instrumento, tendrémos $\triangle G = 0$. Con el fin de aplicar esta fórmula, y á falta de observaciones correspondientes de la luna, tomaré por posicion correcta el término medio de las que le asignan los Almanaques inglés y americano el dia de la observacion, á saber:

A 17^h de Greenwich (Almanaque amer.).....	$a = 9^h\ 49^m\ 56^s.50$	$\delta = 8°\ 40'\ 18.''5$
,, ,, ,, ,, (Almanaque inglés).....	$a = 9\ 49\ 57.37$	$\delta = 8\ 40\ 12.\ 5$
Promedios.....	$a = 9^h\ 49^m\ 56^s.93$	$\delta = 8°\ 40'\ 15.''5$

Habiendo tomado del primero todos los datos del cálculo, sus correcciones respecto de los promedios serán: $\triangle a = +\ 0^s.43$..... y $\triangle \delta = -\ 3.''0$. Sustituyendo resultará:

$$\triangle L = -\ 11^s.4 - 1^s.5 \infty - 12^s.9$$

y la longitud correcta será: $L + \triangle L = 6^h\ 36^m\ 35^s.9$.

En la práctica el método de distancias lunares no corresponde generalmente á su rigor teórico, á causa de la dificultad de medir exactamente los arcos celestes con instrumentos de reflexion cuyo poder óptico es siempre pequeño, pues aunque por su medio se obtienen las lecturas angulares con aproximacion de $5''$, es evidente que en la apreciacion de los contactos puede cometerse un error mas considerable, y cada segundo de error en el ángulo produce otro de 2^s en la longitud con poca diferencia. En cuanto á los errores instrumentales de excentricidad, &c., se eliminarán en su mayor parte observando distancias de estrellas situadas tanto al Este como al Oeste de la luna, porque aquellos errores producirán efectos contrarios, y en consecuencia un promedio independiente de los mismos, sobre todo si las distancias medidas son poco diferentes. No obstante estos defectos, el método de distancias lunares es casi el único que pueden aplicar los marinos, de modo que bajo este punto de vista es de la mayor importancia, suministrando siempre la longitud con la aproximacion bastante para las necesidades usuales de la navegacion. Para evitarse trabajo de gabinete, en lugar de calcular las distancias zenitales verdaderas, toman por lo regular los marinos las alturas aparentes

sirviéndose del horizonte del mar y corrigiéndolas por la depresion (Tomo I, pág. 463). Con esto y con el auxilio de varias Tablas preparadas al efecto, que constan en todos los tratados de navegacion, se abrevia el cálculo notablemente. El Profesor norteamericano Mr. Chauvenet en su "*Manual of spherical and practical Astronomy*", presenta un método abreviado para reducir las distancias lunares, que á la exactitud práctica necesaria reune mucha facilidad para la ejecucion de los cálculos.

CAPITULO XXII.

DETERMINACION DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES DE LA LUNA.

285.— Determinando por medio de la observacion directa el ángulo horario de la luna y conociendo la hora media ó sideral de la misma observacion, será fácil hallar en seguida la ascension recta por la combinacion de ambos elementos (pág. 237). Entónces se podrá calcular la hora del primer meridiano que corresponda á la ascension recta obtenida, y comparándola con la hora local de la observacion se hallará por diferencia la longitud del lugar.

$\alpha = T - h$

Para determinar el ángulo horario se mide la distancia zenital del borde visible de la luna, que corregida por refraccion, paralaje de altura y semidiámetro, da á conocer la distancia zenital verdadera de su centro. Este dato, la latitud de la estacion y la declinacion

de la luna reducida al extremo de la normal terrestre, permiten calcular el ángulo horario por las ecuaciones usuales. El último de estos elementos se toma de las Efemérides por interpolacion con diferencias segundas, sirviéndose al efecto de la *estima* ó longitud aproximativa, y se reduce despues por la fórmula (22) de la pág. 280. Debemos advertir que como el centro de la esfera celeste se supone entónces en el extremo de la normal del observador, es preciso reducir al mismo punto la paralaje horizontal, procediendo como se ha explicado en la pág. 278; y de esta manera podrá emplearse la latitud geográfica del lugar en vez de la geocéntrica.

Reducidos así todos los elementos al extremo de la normal terrestre, es claro que se obtendrá el mismo ángulo horario que si se hubieran empleado los elementos geocéntricos, puesto que aquel punto se halla sobre el eje de la tierra, y por consiguiente en el meridiano del observador. Segun esto, sea z' la distancia zenital aparente de uno de los bordes de la luna, tal como la da el instrumento, despues de corregida por sus errores de índice, micrómetro, excentricidad, niveles, &c., y r la refraccion. Entónces $z' + r$ será la distancia zenital aparente del mismo borde, tal como se veria desde el lugar de la observacion sin la existencia de la atmósfera, y si con esta cantidad se calcula la paralaje de altura por la ecuacion:.. sen. p = sen. π sen. $(z' + r)$, tendrémos que $z' + r - p$ representará la distancia zenital del limbo observado, tal como se veria desde el extremo de la normal terrestre, siendo π la paralaje horizontal ecuatorial adicionada por las dos pequeñas correcciones relativas á latitud y altura, que suministran las Tablas de la pág. 264, de acuerdo con lo expuesto en la 278. Designando ahora por s el semidiámetro geocéntrico ó tabular de la luna, la distancia zenital verdadera de su centro será: $z = z' + r - p \pm s$, evitándose así la necesidad de tomar en cuenta el aumento del semidiámetro. Se usará el signo $\{\pm\}$ cuando se haya observado el limbo $\{{\text{superior.} \atop \text{inferior.}}\}$

Llamando T la hora sideral exacta á la cual se midió z', M la hora media simultánea ó correspondiente y L la estima, tenemos que la hora del primer meridiano es $M + L$, siendo esta la que sirve para tomar de las Efemérides la paralaje horizontal ecuatorial π_0, el semidiámetro s y la declinacion geocéntrica d de la luna. La declinacion reducida δ se obtendrá por la fórmula $\delta = d + A$ sen. ϕ tomando el log. A de la Tabla de la pág. 280.

Conocidos los tres elementos ϕ, z y δ se tiene:

$$a = \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} (\phi - \delta) \qquad b = \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2} (\phi - \delta)$$

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\cos. \phi \cos. \delta}} \qquad a = T - h$$

Para hallar la hora del primer meridiano á la cual la luna tiene α por ascension recta, sea α' la que mas se aproxima á α en las Efemérides y τ la hora correspondiente. Designando por m la variacion horaria de la ascension recta, la hora media de Greenwich que corresponde al instante físico de la observacion, es:

$$M' = \tau + \frac{3600}{m} (\alpha - \alpha')$$

y en consecuencia la longitud será:

$$\lambda = M' - M$$

286.—Las fórmulas precedentes contienen la resolucion del problema en la hipótesis de la exactitud de todos sus elementos; pero tal exactitud no puede admitirse por lo general. Prescindiendo de los errores puramente de observacion, que afectan directamente á T y á z, hay otros que provienen del que tenga la estima, la cual sirve para tomar los datos d, π_0 y s. Si la estima no es exacta, la hora de Greewich resulta puramente aproximativa, y los elementos tabulares interpolados para ese instante quedarán necesariamente mas ó ménos erróneos, siendo sus errores funciones del que exista en la longitud supuesta. En tal concepto, el valor de λ obtenido por la última fórmula, no debe considerarse mas que como la primera aproximacion, que importa corregir en seguida. (*)

Ademas del error que proviene de la estima, hay que tener en cuenta los de las Tablas astronómicas, y que en este método como en todos los que se refieren á observaciones de la luna, no se pueden eliminar mas que valiéndose de las ejecutadas el mismo dia en

(*) De acuerdo con lo expuesto en la pág. 475, podria repetirse el cálculo empleado por nueva estima el valor de λ; pero es mas breve llevar de una vez en cuenta las correcciones, como se explicará en el texto, que está tomado del Capítulo IV, Sec. I de mis "Nuevos Métodos Astronómicos."

algun Observatorio permanente cuya posicion se conozca con exactitud. Como estas correcciones de las Efemérides por lo general no se pueden conseguir inmediatamente, se ejecutan los cálculos suponiendo exactos los elementos tabulares, y determinando los coeficientes de sus errores hipotéticos, con el fin de hacer las correspondientes correcciones al primer resultado luego que se obtienen las de las Tablas lunares. Considerando, segun esto, que la correccion de λ es una funcion de las que necesitan los elementos de que depende, vamos á determinar su forma, admitiendo para mas generalidad que fueron incorrectos todos los datos empleados en la resolucion.

Sea L la estima, y $L + \triangle L$ la longitud correcta que se busca. Como los elementos tabulares se tomaron para la hora $M + L$ del meridiano de las Efemérides, han debido resultar con el error que proviene de la omision de $\triangle L$, puesto que en este pequeño espacio de tiempo todos varian mas ó ménos. Si se sustituye el valor de a en el de M', y este en el de λ, se obtiene:

$$\lambda = \tau + \frac{3600}{m}(T - h - a') - M$$

En el supuesto de que no existiese error alguno en los elementos, el resultado anterior deberia ser igual á $L + \triangle L$, de suerte que introducidas sus correcciones, se tendrá:

$$L + \triangle L = \tau + \frac{3600}{m}(T - h - a' + \triangle T - \triangle h - \triangle a') - M - \triangle M$$

y abreviando con ayuda del valor de λ, resulta:

$$\triangle L = \lambda - L + \frac{3600}{m}(\triangle T - \triangle h - \triangle a') - \triangle M$$

La correccion del ángulo horario depende de las de sus elementos z, ϕ y δ, y como la del último proviene por una parte del error de las Tablas, y por otra del error de la estima, si designamos por ν la variacion de declinacion en un segundo de tiempo sideral, la correccion de δ será $\triangle_{*}\delta + \nu \triangle L$, en la que designo por medio de la característica $\triangle_{*}$ la parte que proviene del error tabular. Segun esto, la correccion del ángulo horario es:

$$\triangle h = \frac{dh}{dz}\triangle z + \frac{dh}{d\phi}\triangle \phi + \frac{dh}{d\delta}(\triangle_{*}\delta + \nu \triangle L)$$

puede considerarse Δδ en gral. bien que sea tab. las ? que se haya tomado prox. ó bien que estuviese equivoc.
y lo mismo los otros

valor que sustituido en la última ecuacion, produce despejando:

$$\Delta L = \frac{\lambda - L + \frac{3600}{m}\left(\Delta T - \Delta a' - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}\Delta z - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\phi}\Delta\phi - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta}\Delta\delta\right) - \Delta M}{1 + \frac{3600}{m}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta}\cdot\nu}$$

~~Por abreviacion he suprimido el acento de a'; pero~~ téngase presente que $\Delta a'$ representa la correccion de la ascension recta tabular de la luna. En cuanto á los coeficientes diferenciales, constan en la pág. 321, y son:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = \frac{\text{sen. } z}{\cos.\phi \cos.\delta \text{ sen. } h}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\tan.\delta}{\text{sen. } h} - \frac{\tan.\phi}{\tan. h}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta} = \frac{\tan.\phi}{\text{sen. } h} - \frac{\tan.\delta}{\tan. h}$$

los cuales deben dividirse por 15, puesto que Δh se necesita en segundos de tiempo. En cuanto al valor de ν, se deduce de la variacion n de la declinacion en una hora de tiempo medio, ó sea en 3610^s de tiempo sideral, por la relacion: $\nu = \frac{n}{3610} = 0.000277\ n$. Los logaritmos de ν constan en la Tabla VIII, cuyo argumento es n.

287.—Establecidas todas las fórmulas de este método, harémos su resúmen reduciéndolo á las siguientes reglas prácticas. Con la hora media M de la observacion y la estima L, la hora media aproximativa del meridiano á que se refieran las Efemérides, es $M + L$. Para este instante tómense de las Tablas la declinacion geocéntrica d interpolada con diferencias segundas, y la paralaje horizontal ecuatorial π_0. En cuanto al semidiámetro, puede tomarse tambien de las Efemérides, ó de la pequeña Tabla que sigue, cuyo argumento es π_0.

π_0	s	π_0	s	π_0	s	$\Delta\pi_0$	Δs	$\Delta\pi_0$	Δs
53′ 00″	14′ 28.″1	56′ 00″	15′ 17.″3	59′ 00″	16′ 6.″5	1″	0.″27	7″	1.″91
53 30	„ 36. 3	56 30	„ 25. 5	59 30	„ 14. 7	2	0. 55	8	2. 18
54 00	„ 44. 5	57 00	„ 33. 7	60 00	„ 22. 9	3	0. 82	9	2. 46
54 30	„ 52. 7	57 30	„ 41. 9	60 30	„ 31. 1	4	1. 09	10	2. 73
55 00	15 0. 9	58 00	„ 50. 1	61 00	„ 39. 3	5	1. 36	20	5. 46
55 30	„ 9. 1	58 30	„ 58. 3	61 30	„ 47. 5	6	1. 64	30	8. 19

En seguida con π_0 y d por argumentos se toma de la Tabla de la

pág. 280 el log. A para corregir la declinacion por la fórmula: .... $\delta = d + A$ sen. ϕ. Despues se corrige la paralaje por latitud y altura añadiéndole las dos pequeñas cantidades que suministran las Tablas de la pág. 264, con lo cual se obtiene π para calcular las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{sen. } p = \text{sen. } \pi \text{ sen. } (z' + r) & z = z' + r - p \pm s \\ a = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} (\phi - \delta) & b = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} (\phi - \delta) \\ \text{sen. } \frac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\cos. \phi \cos. \delta}} & a = T - h \end{array}\right\} \ldots (1)$$

en las que r es la refraccion y T la hora sideral correspondiente á la media M. En el valor de z se dará á s el signo + cuando se haya observado el limbo superior de la luna y — en el caso contrario. El ángulo horario h se tomará positivo al Oeste del meridiano y negativo al Este, siendo en el último caso $T + h$ la ascension recta observada.

En las Efemérides horarias de la luna se toma la ascension recta a' que mas se aproxime á a, la hora τ correspondiente y tambien los movimientos horarios m y n en ascension recta y declinacion. No hay inconveniente en tomar estos últimos para la hora τ, en cuyo caso los valores de m y n serán los términos medios de las diferencias de ascension recta y de declinacion respectivamente entre τ y la hora que precede, y τ y la hora que sigue. En seguida, con el argumento n se toma el log. ν de la Tabla VIII, y se calculan las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \tau + \dfrac{3600}{m} (a - a') - M \\ P = \dfrac{\text{d } h}{\text{d } z} = \dfrac{\text{sen. } z}{\cos. \phi \cos. \delta \text{ sen. } h} \\ Q = \dfrac{\text{d } h}{\text{d } \phi} = \dfrac{\text{tan. } \delta}{\text{sen. } h} - \dfrac{\text{tan. } \phi}{\text{tan. } h} \\ R = \dfrac{\text{d } h}{\text{d } \delta} = \dfrac{\text{tan. } \phi}{\text{sen. } h} - \dfrac{\text{tan. } \delta}{\text{tan. } h} \\ F = \dfrac{240}{m} \\ \Delta L = \dfrac{\lambda - L + 15 F (\Delta T - \Delta a) - F P . \Delta z - F Q . \Delta \phi - F R . \Delta \delta - \Delta M}{1 + F R \nu} \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Como por lo regular se hace uso de los valores mas exactos que es posible obtener de los elementos T, M, ϕ y z, se evita el cálculo de P y Q, lo cual reduce la última fórmula á la siguiente:

$$\Delta L = \frac{1}{1+FR_\nu}\,(\lambda - L - 15F\,.\,\Delta\alpha - FR\,.\,\Delta\delta)$$

A pesar de esto, siempre es útil calcular los coeficientes de las demas correcciones para poder estimar la influencia de los errores posibles de los elementos. En el valor de Δz supongo incluidas las correcciones de la paralaje de altura, del semidiámetro, &c.; y aunque en todo rigor deberian haberse llevado en cuenta las partes de esas correcciones que provienen de ΔL, lo mismo que se ha hecho respecto de la declinacion, en la práctica es innecesario atendida la pequeña variacion horaria de la paralaje y del semidiámetro, de manera que aunque la estima tenga un error de uno ó dos minutos de tiempo, estos elementos se toman con suficiente exactitud de las Efemérides.

Dependiendo en gran parte la precision del resultado de la exactitud con que se obtenga el ángulo horario de la luna, parece inútil recomendar la conveniencia de observarla cerca del primer vertical, ó al ménos cuando no sea pequeño su azimut, segun lo demostrado en el Capítulo VII. Pongamos á la vista una aplicacion numérica completamente detallada.

Ejemplo.—El 2 de Mayo de 1860 hice las siguientes observaciones del limbo superior de la luna al Este, con un altazimut establecido en el monumento que fija la extremidad occidental de la base del Valle. En las dos posiciones del instrumento se observó el tránsito del borde por los cinco hilos horizontales de la retícula.

Primera posicion.	Segunda posicion.	NIVEL.
$6^h\ 31^m\ 22^s.00$	$6^h\ 34^m\ 25^s.75$	Oc Ob
„ 31 44.25	„ 34 58.50	58 58
„ 32 5.50	„ 35 18.50	58 58
„ 32 26.50	„ 35 40.50	
„ 32 48.50	„ 36 2.75	
$6^h\ 32^m\ 5^s.35$.....Promedios.....$6^h\ 35^m\ 19^s.20$		$\beta = 58°\ 15'\ 24.''0$
		$\alpha = 32\ 28\ 8.\ 0$

Como resulta nula la correccion por el nivel, se tiene..... $z' = 57°\ 53'\ 38.''0$. Con este dato y las indicaciones del barómetro

y del termómetro se obtuvo $r = 1' 9.''4$. El cronómetro solar adelantaba $2^m\ 11.^s07$ en el instante de la observacion, por lo que las horas media y sideral correspondientes son:

$$t = 6^h\ 33^m\ 42.^s27$$
$$\Delta t = -\ 2\ \ 11.\ 07$$
$$M = 6^h\ 31^m\ 31.^s20$$
$$\text{Asc. recta} = 2\ \ 43\ \ 33.\ 71$$
$$\text{Acel.} = +\ 1\ \ \ 4.\ 82$$
$$T = 9^h\ 16^m\ \ 9.^s23$$

La latitud del lugar es $\phi = 19° 25' 23.''0$ y su longitud..... $6^h\ 36^m\ 19.^s1$; pero tomemos por estima $L = 6^h\ 37^m\ 28.^s8$ para obtener $M + L = 13^h\ 9^m\ 00^s$ por hora aproximativa de Greenwich, á fin de interpolar los elementos d y π_0. Haciendo la interpolacion y adoptando los promedios de los valores que suministran los Almanaques inglés y americano, se halla: $d = -\ 9° 6' 56.''0$..... y $\pi_0 = 60' 2.''1$. Calculemos á δ, á π y á s: este último por la Tabla precedente.

A 1.375

sen. ϕ..... 9.522 $\qquad d = -\ 9° 6' 56.''0$

0.897 ..... $+\ 7.\ 9$

$\delta = -\ 9° 6' 48.''1$

$\pi_0 = 60'\ 2.''1$		Por $60'\ 00''$.....	$16'\ 22.''9$
Correc. por $\phi =$	$+1.\ 3$	,, 2	0. 55
Correc. por $n =$	$+1.\ 2$	,, 0. 1	0. 03
$\pi = 60'\ 4.''6$			$s = 16'\ 23.''5$

Con estos datos procedamos al cálculo del ángulo horario y de la ascension recta de la luna.

$z' = 57° 53' 38.''0$			
$r = +\ 1\ \ 9.\ 4$			
$p = -50\ 53.\ 9$	sen. π..... 8.2424098	$\phi =$	$19° 25' 23.''0$
$s = +16\ 23.\ 5$	sen. $(z' + r)$..... 9.9280085	$\delta = -\ 9\ \ 6\ 48.\ 1$	
$z = 57° 20' 17.''0$	sen. p..... 8.1704183	$\phi - \delta =$	$28° 32' 11.''1$

$\frac{1}{2}z = 28^\circ\ 40'\ 8.''5$
$\frac{1}{2}(\phi - \delta) = 14\ 16\ 5.\ 5$

$a = 42^\circ\ 56'\ 14.''0$ ..... sen..... 9.8332725
$b = 14\ 24\ 3.\ 0$ ..... sen 9.3956827

$\frac{1}{2}h = -25^\circ\ 14'\ 53.''5$ 9.2289552
$h = -\ 3^h\ 21^m\ 59^s.13$ cos. ϕ..... −9.9745527
$T = 9\ 16\ 9.23$ cos. δ..... −9.9944829

$\alpha = 12^h\ 38^m\ 8^s.36$ 9.2599196

sen. $\frac{1}{2}h$..... 9.6299598

El promedio de las Efemérides inglesas y americanas da por ascension recta de la luna $\alpha' = 12^h\ 37^m\ 51^s.41$ á la hora de Greenwich $\tau = 13^h$. Para esa hora tenemos $m = 133^s.83$ y $n = -933.''5$.

$\alpha = 12^h\ 38^m\ 8^s.36$
$\alpha' = 12\ 37\ 51.41$

$\alpha - \alpha' = + 16^s.95$ ..... 3600..... 3.55630
..... 1.22917+
m..... −2.12655
2.65892+

$\tau = 13^h\ 00^m\ 00^s.00$
$+ 7\ 35.95$

$M' = 13^h\ 7^m\ 35^s.95$
$M = 6\ 31\ 31.20$

$\lambda = 6^h\ 36^m\ 4^s.75$
$L = 6\ 37\ 28.80$

$\lambda - L = -\ 1^m\ 24^s.05 = -84^s.05$

Tomando ahora de la Tabla VIII el log. ν con $n = -933.''5$, y calculando los coeficientes diferenciales P, Q y R, se halla:

Log. $P = 0.0688-$ Log. $Q = 9.6979+$ Log. $R = 9.7705-$ Log. $\nu = 9.4126-$

con los cuales procederémos al cálculo de las últimas fórmulas (2).

240.....	2.3802	F.....	0.2537	$\lambda - L$...	1.9245−	*15*.....	1.1761
m.....	−2.1265	R.....	9.7705−	$1+FR\nu$	−0.1050	F.....	0.2537
		ν.....	9.4126−			$1+FR\nu$	−0.1050
F.....	0.2537				1.8195−		
			9.4368		−66.00		1.3248
			+0.2734				+21.12

F.....	0.2537	.....	0.2537	.....	0.2537		
P.....	0.0688−	Q.....	9.6979	R.....	9.7705−		
$1+FR\nu$	−0.1050	.....	−0.1050	.....	−0.1050	.....	0.1050
	0.2175−		9.8466		9.9192−		9.8950
	−1.65		+0.70		−0.83		+0.79

En consecuencia, la verdadera correccion de la estima L, es:

$$\Delta L = -1^m\,6^s.00 + 21.12\,\Delta T - 21.12\,\Delta\alpha + 1.65\,\Delta z - 0.70\,\Delta\phi + 0.83\,\Delta\delta - 0.79\,\Delta M$$

Estos coeficientes sirven para apreciar la influencia de los errores que podria contener cada uno de los elementos; así, en nuestro ejemplo, un error de 10″ en la distancia zenital habria originado el de $16^s.5$ en la longitud, miéntras que el mismo error de 10″ en la latitud, hubiera producido el de 7^s. Debe notarse que la magnitud del coeficiente del error de la hora y de la ascension recta indica que en este método, como en casi todos los que se refieren á observaciones de la luna, es de la mayor importancia conocer el tiempo con mucha precision, y hacer uso de las correcciones de las Tablas determinadas en algun Observatorio fijo. Un error de 1^s en T, que seria sensiblemente el mismo para M, daria por resultado el de $20^s.33$ en la longitud. Por el contrario, los otros coeficientes son generalmente pequeños y mudan de signo observando la luna á distintos lados del meridiano, de lo que se infiere que el promedio de dos observaciones ejecutadas el mismo dia al Este y al Oeste, resulta casi independiente de los demas errores, sobre todo si se procura que tengan lugar en condiciones semejantes de azimut y altura. En las pág. 178 y siguientes de mis "Nuevos Métodos Astronómicos" puede verse un procedimiento basado en la observacion de alturas iguales de la luna, así como en la pág. 169 otro modo de calcular la longitud cuando solo se ha medido su distancia zenital á un lado del meridiano.

Estando seguros de la exactitud de la hora, de la medida angular y de la latitud, como sucede en nuestro caso, se abrevia mucho el cálculo reduciéndolo al de los coeficientes de $\triangle\,\alpha$ y $\triangle\,\delta$. En el ejemplo anterior se tendrá, pues, por longitud correcta:

$$L + \triangle L = 6^h\,36^m\,22^s.8 - 21.12\,\triangle\alpha + 0.83\,\triangle\delta$$

que quedaria completamente determinada conociendo las correcciones de las Efemérides. El dia de la observacion las Tablas inglesas y las americanas difieren $0^s.85$ en la ascension recta de la luna y 11.″7 en su declinacion, y por eso á falta de mejores datos he empleado los promedios, que segun toda probabilidad le asignan una

posicion sensiblemente exacta. Suponiendo nulas las pequeñas correcciones que aun necesiten estos promedios, se tendria $6^h\ 36^m\ 22^s.8$ por longitud, que solo difiere cosa de $3^s.7$ de la que obtuve para la misma estacion por un gran número de observaciones diferentes y calculadas por medio de las correspondientes de Greenwich y Cambridge.

288.—En los cálculos anteriores supuse intencionalmente un error de mas de 1^m en la estima, y esto fué con el objeto de hacer palpable su pequeña influencia, y con el de facilitar la interpolacion de la declinacion haciendo que la hora $M + L = 13^h\ 9^m$ de Greenwich tuviera un número de minutos entero y múltiplo de 3. Como se tiene necesidad de interpolar este elemento con diferencias segundas, es cómodo servirse de la pequeña Tabla que pongo á continuacion, y que contiene los coeficientes de las diferencias primeras y segundas, obtenidos de este modo. Si en la fórmula de interpolacion de la pág. 290 se sustituyen los valores de A y B, resulta:

$$y = a + t\,\triangle_1 - \tfrac{1}{2}\,t\,(1-t)\,\triangle_2$$

y haciendo $t' = \frac{1}{2}\,t\,(1-t)$, se tiene:

$$y = a + t\,\triangle_1 - t'\,\triangle_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Segun esto, cuando se desea interpolar un elemento para H horas y m minutos del primer meridiano, se tendrá para las Efemérides horarias:

$$t = \frac{m}{60} \qquad\qquad t' = \frac{m\,(60-m)}{7200}$$

que son los valores que he reducido á Tabla, calculándolos de 3^m en 3^m. Como t y t' son números pequeños, se hace con su ayuda la interpolacion con mucha facilidad sin el uso de los logaritmos.

m	t	t'	m	t	t'	m	t	t'
0^m	0.00	0.00	21^m	0.35	0.11	42^m	0.70	0.10
3	.05	.02	24	.40	.12	45	.75	.09
6	.10	.04	27	.45	.12	48	.80	.08
9	.15	.06	30	.50	.12	51	.85	.06
12	.20	.08	33	.55	.12	54	.90	.04
15	.25	.09	36	.60	.12	57	.95	.02
18	0.30	0.10	39	0.65	0.11	60	0.00	0.00

Recordemos que en la fórmula anterior, a representa la coordenada ó elemento que se busca, á la hora H, de modo que..... $y - a = t\,\Delta_1 - t'\,\Delta_2$ es su correccion por el trascurso de las m minutos. Para aplicar la Tabla calculemos la declinacion de la luna el 2 de Mayo de 1860 á la hora $H + m = 13^h\ 9^m$ de Greenwich. Los Almanaques suministran en término medio los elementos siguientes:

A 12^h		$-8°\ 49'\ 1.''0$		
„ 13	$a =$	$-9\ \ 4\ 36.\ \ 0$	$\Delta_1 =$	$-15'\ 35.''0$ $\quad +3.''0$
„ 14		$-9\ 20\ \ 8.\ \ 0$		$-15\ \ 32.\ \ 0 \quad +3.\ \ 3$
„ 15		$-9\ 35\ 36.\ \ 7$		$-15\ \ 28.\ \ 7$

Para $m = 9^m$ la Tabla da: $t = 0.15$ y $t' = 0.06$, y puesto que se tiene $\Delta_1 = -932.''0$ y $\Delta_2 = +3.''1$, resultará:

$t\,\Delta_1 =$	$-2'\ 19.''8$
$t'\,\Delta_2 =$	$-\quad\ 0.\ \ 2$
Correccion =	$-2\ 20.\ \ 0$
$a =$	$-9\ \ 4\ 36.\ \ 0$
$d =$	$-9°\ 6'\ 56.''0$

Esta fué, en efecto, la declinacion geocéntrica que despues se redujo al extremo de la normal en nuestro ejemplo. Siempre puede tomarse por $M + L$ la hora mas inmediata á alguno de los minutos enteros de la Tabla, adoptando por estima: $L = H + m - M$, cuyo error en ningun caso llegará á $1^m\ 30^s$.

CAPITULO XXIII.

DETERMINACION DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE LA LUNA Y DE UNA ESTRELLA.

289.— El procedimiento del Capítulo anterior supone conocida con exactitud la indicacion del instrumento angular, así como los datos necesarios para calcular la refraccion atmosférica. En el que voy á exponer ahora se eliminan aquellos elementos por medio de la observacion de una ó mas estrellas á la misma distancia zenital aparente que el borde visible de la luna. Esta circunstancia, que trae consigo la ventaja de no ser indispensables los instrumentos meteorológicos, y la de poderse operar con un clisímetro incorrecto, da á este método una gran superioridad respecto del otro, especialmente para el viajero.

La observacion se reduce á tomar una serie de distancias zenitales de la luna y de la estrella, poniendo el instrumento angular en cualesquiera graduaciones, con tal de que sean las mismas para los dos astros, anotando las horas correspondientes. Operando con sextante es cómodo poner graduaciones equidistantes, de 10′ en 10′ ó de 20′ en 20′ por ejemplo; y si se opera con altazimut ú otro círculo cualquiera, pueden observarse los tránsitos de ambos astros por todos los hilos horizontales sin alterar la posicion del telescopio, siendo solo necesario mover el instrumento en azimut despues de observar el paso del primer astro para dirigirlo al segundo. Conviene elegir una estrella cuya posicion no difiera mucho de la de la luna, á fin de que sin que trascurra mucho tiempo, puedan ejecutarse ambas observaciones hácia la misma region del cielo y lo mas cerca que sea posible del primer vertical.

En cuanto al cálculo es muy semejante al del Capítulo anterior, pues la única diferencia consiste en que se determina la distancia zenital aparente valiéndose de la observacion de la estrella. En efecto, con la hora sideral de esta observacion y la ascension recta se conoce el ángulo horario; y con este dato, la latitud del lugar y la declinacion puede calcularse la distancia zenital de la estrella por las fórmulas (3) de la pág. 239. Llamando Z el resultado, tendrémos que esta cantidad será equivalente á la que designé por $z' + r$ en el Capítulo precedente, puesto que ambas indican la distancia zenital, ya corregida por el efecto de la refraccion. Entónces podrá procederse al cálculo de las demas ecuaciones (1) y (2) del mismo Capítulo con la ventaja de no haber sido necesario conocer ni la indicacion del instrumento ni el valor de la refraccion. Las fórmulas siguientes, en las que he acentuado los elementos referentes á la posicion de la estrella, representan por consiguiente el método de cálculo:

$$\text{tan. } M = \frac{\text{tan. } \delta'}{\text{cos. } h'} \qquad \text{cos. } Z = \frac{\text{sen. } \delta'}{\text{sen. } M} \text{ cos. } (M - \phi)$$

$$\text{sen. } p = \text{sen. } \pi \text{ sen. } Z \qquad z = Z - p \pm s$$

$$a = \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} (\phi - \delta) \qquad b = \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2} (\phi - \delta)$$

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{cos. } \phi \text{ cos. } \delta}} \qquad a = T - h$$

debiéndose aplicar en seguida las ecuaciones (2) del Capítulo anterior.

Ejemplo.— El 11 de Mayo de 1867 hice en San Luis Potosí las siguientes observaciones sirviéndome de un cronómetro solar que atrasaba $0^s.1$ por hora.

SEXTANTE.	α *Bootis* al E.	α *Leonis* al O.	Limbo inf. de la luna al O.
111° 00′.....	8h 33m 52s.5	9h 12m 57s.5	
,, 30	,, 34 58.5	,, 11 50.7	
112 00	,, 36 1.7	,, 10 44.7	9h 28m 8s.5
,, 30	,, 37 6.5	,, 9 39.5	,, 26 57.7
113 00	,, 38 13.0	,, 8 34.0	,, 25 47.7
,, 30	,, 39 16.5	,, 7 28.0	,, 24 37.0
114 00	,, 40 22.0	,, 6 22.5	,, 23 26.7
,, 30	,, 41 25.0	,, 5 15.7	,, 22 16.5
115 00	,, 42 31.0	,, 4 10.5	,, 21 5.7
,, 30	,, 43 36.0	,, 3 4.7	,, 19 54.5
116 00	,, 44 39.5	,, 1 58.0	,, 18 43.5
,, 30	,, 45 43.5	9 00 52.5	
117 00	,, 46 49.5	8 59 46.0	
Promedios 114° 00′.....	8h 40m 21s.17.....	9h 6m 21s.87.....	9h 23m 26s.42

Si se determina el estado del cronómetro por medio de las dos estrellas aplicando el método del Capítulo VIII, se halla que á $8^h\ 53^m$ su correccion era $\triangle t = -9^m\ 56^s.23$, y siendo de $3^h\ 16^m\ 18^s.89$ el tiempo sideral á medio dia de San Luis, resultan las siguientes horas exactas, que van acompañadas de las posiciones de las estrellas:

	HORAS MEDIAS.	HORAS SIDERALES.	ASCEN. RECTAS.	DECLINACIONES.
a Bootis.....	$8^h\ 30^m\ 24^s.92$	$11^h\ 48^m\ 7^s.66$	$14^h\ 9^m\ 37^s.62$	$+19°\ 52'\ 32.''3$
a Leonis.....	8 56 25.66	12 14 12.67	10 1 18.17	+12 36 47. 9
Luna.....	9 13 30.24	12 31 20.06		

La altura de la ciudad sobre el nivel del mar es de 1880^m próximamente, la latitud del lugar en que se hicieron las observaciones, $\varphi = 22°\ 8'\ 58.''7$ y su longitud $6^h\ 43^m\ 48^s$; pero tomemos por estima $L = 6^h\ 43^m\ 29^s.76$, á fin de interpolar los datos para $15^h\ 57^m$ de Greenwich. El Almanaque Náutico americano da para ese instante: $\alpha = +7°\ 52'\ 31.''5$, $\pi_0 = 57'\ 30.''5$ y $s = 15'\ 42.''0$, de los que resultan: $\delta = +7°\ 52'\ 40.''1$ y $\pi = 57'\ 33.''1$. Como se han aplicado ya varias veces las fórmulas anteriores, no me parece necesario escribir todo el cálculo, y solo pondré á la vista sus principales resultados.

Las primeras ecuaciones dan:

Por *a Bootis*..... $Z = 33°\ 1'\ 40.''6$
Por *a Leonis*..... $Z = 33\ 1\ 40.\ 0$

Adoptando $Z = 33°\ 1'\ 40.''3$, se halla por las demas:

$$z = 32°\ 14'\ 36.''3 \qquad h = +2^h\ 00^m\ 12^s.91 \qquad a = 10^h\ 31^m\ 7^s.15$$

En las Efemérides horarias de la luna, á $\tau = 16^h$ de Greenwich se halla: $a' = 10^h\ 31^m\ 13^s.34$ y $m = 128^s.85$, por lo que las fórmulas (2) del Capítulo precedente, dan: $\lambda = 6^h\ 43^m\ 36^s.81$, ó bien..... $\lambda - L = +7^s.05$.

Finalmente, á la misma hora de Greenwich se halla $n = -574''$, por lo cual calculando solo el coeficiente $R = \frac{dh}{d\delta}$ en atencion á que los demas elementos se conocian con precision, deberá obtenerse:

$$\triangle L = +8^s.49 - 33.66\ \triangle a - 1.29\ \triangle \delta$$

y por consiguiente la expresion de la longitud correcta es:

$$L + \triangle L = 6^h\ 43^m\ 38^s.25 - 33.66\ \triangle \alpha - 1.29\ \triangle \delta$$

que ya no dependerá de otra cosa mas que de las correcciones tabulares.

Cuando trascurra un tiempo considerable entre las observaciones de la estrella y de la luna, de modo que pueda temerse que hayan variado las condiciones atmosféricas de las cuales depende el valor de la refraccion, deben tomarse en cuenta las indicaciones del termómetro libre para calcular la diferencia de refracciones como se ha dicho en la pág. 365. Tanto por esta causa de error, como por los que podría producir algun cambio en el estado de los niveles, el cual indicaria una leve variacion en la distancia zenital de la luna, seria preciso hacer las pequeñas correcciones correspondientes por cualquiera de los métodos que voy á indicar. Siendo como ántes Z la distancia zenital verdadera de la estrella, si se ha reconocido en virtud de las causas ántes mencionadas, que al observar la luna la distancia zenital era $Z + \triangle z$, podrá corregirse el ángulo horario h, ó si se quiere, la ascension recta obtenida α, restando con su signo á esta ó sumando á aquel el valor de x dado por la fórmula de la pág. 462, á saber:

$$x = \frac{\text{sen. } z}{15 \cos.\phi \cos.\delta \text{ sen. } h} \triangle z = \frac{1}{15} P \,.\, \triangle z$$

para cuya aplicacion se tendrán todos los elementos necesarios luego que se haya determinado el valor de h por medio de las ecuaciones que constan al principio de este Capítulo. Entónces se proseguirá el cálculo con $\alpha - x$ en lugar de α.

Tambien puede tomarse en cuenta la correccion $\triangle z$ calculando su coeficiente, que forma parte del valor de $\triangle L$ en las fórmulas (2) del Capítulo precedente, é introduciendo en seguida el valor numérico de $\triangle z$ con el signo que le corresponda. Aplicando este método á nuestro ejemplo, se halla que el coeficiente de $\triangle z$ es:

$$-\frac{FP}{1 + FR_\nu} = -2.60$$

Supongamos para aplicarlo, que se creyese mas conveniente adop-

tar por Z el valor que suministró la estrella α *Leonis*. Como el cálculo se hizo tomando el promedio de los dos valores de Z, si queremos emplear solo el de α *Leonis* tendrémos $\Delta z = -0.''3$. Entónces la correccion de la longitud por esta causa será:.....
$2.6 \times 0.3 = +0^s.78$.

Si por el contrario, se prefiere corregir el valor de α, hallarémos:

$$\tfrac{1}{15} P = 0.077$$

y por consiguiente $x = -0.077 \times 0.3 = -0^s.023$, de modo que la ascension recta en vez de ser la que consta arriba, seria:.....
$\alpha - x = 10^h 31^m 7^s.173$. El cálculo hecho con esta cantidad originaria tambien un aumento de unos $0^s.78$ en la longitud; pero debe notarse que es mucho mas fácil aplicar el otro método atendiendo á que en este, por ser siempre muy pequeño el valor de x respecto de la correccion que se busca, seria necesario llevar la aproximacion de α hasta la tercera decimal para obtener la misma precision que en aquel. Por otra parte, como la disminucion de α produce el mismo efecto que el aumento de la ascension recta tabular α', podria multiplicarse x por el coeficiente de $\Delta \alpha$. En nuestro ejemplo este coeficiente es de — 33.66, y en consecuencia resultaria:.....
$33.66 \times 0^s.023 = +0^s.77$, que es sensiblemente el mismo valor hallado por los otros dos métodos.

Parece inútil advertir que solo deben aplicarse estos medios de correccion cuando se descubra el error despues de hecho todo ó la mayor parte del cálculo, porque seria mas dilatado repetirlo; pero si se conocieren de antemano, es evidentemente preferible corregir directamente el valor de Z ántes de proceder á la aplicacion de las fórmulas.

CAPITULO XXIV.

DETERMINACION DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE CULMINACIONES LUNARES.

290.— En los dos Capítulos que anteceden se ha visto que una vez hallada por la observacion la ascencion recta de la luna, es muy fácil calcular la hora correspondiente del primer meridiano, y en consecuencia la longitud del lugar. El medio mas directo de obtenerla consiste en observar el tránsito del astro por el meridiano, puesto que aquella coordenada no es otra cosa mas que la hora sideral de la observacion. Es cierto que no se puede observar el paso meridiano del centro de la luna, sino únicamente el de su limbo iluminado; pero de este dato se deduce fácilmente la ascension recta de aquel punto, y entónces la misma hora sideral, convertida en hora media, podrá compararse con la del primer meridiano que corresponda á la ascension recta obtenida por la observacion directa.

Esta manera general de considerar la cuestion supone conocidas las correcciones del telescopio de tránsitos ó del altazimut que se emplee, así como la del cronómetro, y todas ellas con la mayor precision; porque ya he tenido ocasion de indicar que en la determinacion de la longitud por observaciones de la luna, los errores cometidos en la hora guardan con los del resultado la relacion de 1 á 30 próximamente. Bajo este punto de vista podria creerse que solo en los Observatorios permanentes, en donde son grandes la perfeccion y la estabilidad de los instrumentos, seria posible obtener resultados exactos por medio de este procedimiento; pero verémos que no hay necesidad de ceñirse únicamente á la observacion de la luna, sino que se puede combinar la de esta con la de una ó mas estre-

llas inmediatas, á fin de eliminar casi del todo el efecto de los errores instrumentales. De este modo, en lugar de horas absolutas, entrarán como datos para la resolucion simples *diferencias* de tiempo, que generalmente pueden suponerse exentas de error.

En las Tablas que llevan por título "*Culminaciones de la luna,*" los Almanaques Náuticos ingleses dan para cada dia del año la ascension recta del limbo visible en el momento de su tránsito por el meridiano de Greenwich. Los almanaques americanos indican la hora media del paso del centro de la luna por el meridiano de Washington; pero unos y otros dan las ascensiones rectas y las declinaciones de varias estrellas cercanas á la luna, y que por esta razon se llaman "*culminantes con la luna.*" Por lo general son cuatro las estrellas, dos de las cuales pasan por el meridiano ántes que la luna, y dos despues. Observados sus tránsitos con el de este astro, cada una de las observaciones dará lugar á una relacion como la que consta en la pág. 379 entre las correcciones instrumentales y la ascension recta del objeto observado, de modo que para el borde visible de la luna, se tendrá:

$$A = \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \qquad B = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \qquad C = \frac{1}{\cos \delta}$$

$$\alpha = t + \triangle t + A\,a + B\,b + C\,c$$

y para cualquiera de las estrellas:

$$\alpha' = t' + \triangle t' + A'\,a + B'\,b + C'\,c$$

La diferencia de ambas ecuaciones da:

$$\alpha - \alpha' = t - t' + (\triangle t - \triangle t') + (A - A')\,a + (B - B')\,b + (C - C')\,c$$

Esta expresion manifiesta que para obtener la diferencia exacta de ascensiones rectas, no es necesario conocer las correcciones absolutas del guarda-tiempo, sino únicamente su marcha en el pequeño intervalo cronométrico $t - t'$; y que aunque no se conozca el valor exacto de las constantes instrumentales a, b y c, el resultado no tendrá error de importancia, en atencion á que solo quedan multiplicadas por las diferencias de los coeficientes A, B y C, los cuales dependiendo de la latitud y de las declinaciones de los astros, tienen casi el mismo valor para la luna que para las estrellas culminantes con ella, puesto que sus declinaciones son muy poco diferentes.

Si se adopta la forma de la expresion que consta en la pág. 390, siendo t la hora cronométrica ya corregida por el error de colimacion, se tiene para la luna:

$$a = t + \triangle t + m + n \tan. \delta$$

y acentuando siempre los elementos referentes á las estrellas, se tendrá igualmente:

$$a' = t' + \triangle t' + m + n \tan. \delta'$$

de donde resulta:

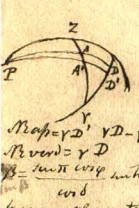
$$a - a' = t - t' + (\triangle t - \triangle t') + n (\tan. \delta - \tan. \delta')$$

ecuacion en la que tambien figura solamente la marcha del cronómetro, y en la que el valor de la constante instrumental n solo multiplica á la diferencia (tan. δ — tan. δ') cuya pequeñez se comprende desde luego por el hecho de diferir muy poco las declinaciones. Así, pues, siguiendo uno ú otro método de reduccion, admitirémos que puede obtenerse con mucha exactitud la *diferencia* de ascensiones rectas; de manera que designándola por γ, y llamando a' la ascension recta de cualquiera de las estrellas, la del borde visible de la luna será:

$$a = a' + \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y debiendo suministrar cada una de las estrellas observadas el mismo resultado, se adoptará por a el promedio de todos los valores obtenidos, á fin de eliminar en lo posible los pequeños errores de observacion.

291.—Antes de ocuparnos del modo de hallar la ascension recta del centro de la luna, indiquemos la manera de reducir al hilo medio sus tránsitos incompletos, cuando por cualquiera circunstancia no haya podido observarse en todos los de la retícula. En tales casos es preciso tomar en cuenta dos correcciones, la una debida á la paralaje, y la otra al movimiento propio de la luna en ascension recta. En la pág. 381 vimos que el tránsito incompleto de una estrella se reduce por la fórmula $I = \frac{i}{\cos. \delta}$, en la que i representa el promedio de los intervalos ecuatoriales de los hilos en que se haya observado el paso; pero tratándose de la luna, cuando su distancia en tiempo al hilo medio, que supondré en el plano del meridiano, es



aparentemente I, su distancia real es $I - \beta$, representando β la paralaje de ascension recta, cuyo efecto es aumentar el valor numérico del ángulo horario I. En este caso especial atendida la pequeñez de I, la expresion de β (pág. 271, ecuacion (11)) será:....

$$\beta = \frac{\pi \cos.\phi \operatorname{sen.} 1''}{\cos.\delta} I,$$

por lo cual la verdadera distancia del limbo observado al meridiano es:

$$\left(1 - \frac{\pi \cos.\phi \operatorname{sen.} 1''}{\cos.\delta}\right) \frac{i}{\cos.\delta}$$

Esta expresion daria el tiempo que invertiria la luna en pasar del hilo lateral al medio, si no tuviera variacion en ascension recta; pero si representamos por μ esta variacion en 1ˢ de tiempo sideral, es claro que mientras una estrella fija describe 1ˢ en el sentido del ecuador en virtud del movimiento diurno, la luna solo describirá... $1^s - \mu$; y como para igualdad de espacios los tiempos están en razon inversa de las velocidades, el tiempo que emplea la luna en llegar al hilo medio, será:

$$I' = \left(\frac{1 - \frac{\pi \cos.\phi \operatorname{sen.} 1''}{\cos.\delta}}{1 - \mu}\right) \frac{i}{\cos.\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Los logaritmos de $1 - \mu$ pueden tomarse de nuestra Tabla IX con el movimiento horario en ascension recta por argumento.

El 30 de Noviembre de 1857, por ejemplo, solo pude observar el limbo de la luna en el cuarto hilo, cuya distancia al hilo medio era $i = -16^s.125$. La latitud del lugar es $\phi = 19°\ 26'$, y la paralaje, la declinacion y el movimiento horario eran respectivamente:..... $\pi = 3687''$, $\delta = 26°\ 3'$ y $m = 167^s.1$.

i.....	1.2075—	π.....	3.5667
cos. δ.....	—9.9535	cos. ϕ.....	9.9745
$1 - \mu$.....	—9.9794	sen. $1''$.....	4.6856
		cos. δ.....	—9.9535
	1.2746—		1.2746—
	—18ˢ.82		9.5479—
	+ 0. 35.		

Reduccion..... $I' = -18^s.47$

La reduccion solo habria sido de—17ˢ.95 para una estrella de igual declinacion. Cuando el eje del telescopio está sensiblemente desviado

do del plano del meridiano, seria preciso en todo rigor multiplicar tambien la correccion azimutal a, y en general todas las correcciones instrumentales, por el mismo factor de $\frac{i}{\cos. \delta}$ en la fórmula anterior; pero como habitualmente son aquellas pequeñas, es suficientemente exacto aumentarlas en su cuarentava parte; porque calculando el coeficiente con valores medios de π, ϕ, δ y m, da próximamente $1.025 = 1 + \frac{1}{40}$.

En cuanto á los cálculos necesarios para prepararse á observar una culminacion de la luna, se reducen á determinar la hora media del tránsito del centro del astro por el meridiano del lugar con ayuda de la estima. Los Almanaques ingleses y americanos dan en la cuarta página correspondiente á cada mes, la hora media del paso por el meridiano de Greenwich, aproximada hasta un décimo de minuto, que es lo bastante. Los Almanaques americanos traen tambien el mismo dato respecto del meridiano de Washington, acompañado de su diferencia por una hora de longitud. En uno y otro caso se calcula la hora del tránsito para cualquiera otro lugar por una simple proporcion, esto es: siendo L la estima contada desde el meridiano á que se refieran las Efemérides, H' la hora del paso en el mismo meridiano y v la variacion ó diferencia horaria, se tendrá:..... $H = H' + L\,v$. El valor de v deberia interpolarse para $\frac{1}{2}\,L$, á fin de proceder con mas exactitud; pero no es necesario hacerlo así cuando el cálculo solo tiene por objeto prepararse á observar la culminacion. La estima debe expresar horas y fracciones, puesto que v se refiere á la misma unidad. Si el Almanaque no contuviese el valor de v, podrá tomarse $v = \frac{d}{24}$, siendo d la diferencia de horas del tránsito de un dia al siguiente. Entónces la hora que se busca será: $H = H' + \frac{L}{24}\,d$. El dia 1º de Enero de 1871, por ejemplo, pasará la luna por Greenwich á $8^h\ 13^m.2$: si se desea saber la hora de su culminacion en México, tendrémos $L = 6^h.608$ y $v = 1^m.8$; por consiguiente:

$$H' = 8^h\ 13^m.20$$
$$Lv = \quad 11.\ 89$$
$$H = 8^h\ 25^m.09$$

Si hubiéramos tomado por H' la hora del paso en Washington, tendriamos $L = 1^h.47$, que es próximamente la longitud de México respecto de ese meridiano. El valor de H da el tránsito del centro

de la luna, y para obtener el de sus bordes se añadirá $\mp 1^m$, que es con poca diferencia lo que invierte en pasar el semidiámetro, tomando el signo — para el limbo primero ú occidental y + para el segundo ú oriental. Las estrellas que hayan de observarse con la luna se preparan como dijimos en la pág. 395.

Los Almanaques americanos no traen en la actualidad las posiciones *aparentes* de las estrellas culminantes con la luna, sino sus posiciones *medias*, ó sea sin las correcciones por nutacion, precesion y aberracion; y aunque esto no impide que su preparacion sea suficientemente exacta haciendo uso de las ascensiones rectas medias por ser tan pequeñas esas correcciones, debe tenerse presente que para el cálculo de la longitud sí es preciso corregirlas, y á este fin el Almanaque suministra los datos y explicaciones necesarias. Otro tanto debe decirse de las estrellas que se tomen de los Catálogos, pues estos solo contienen las posiciones medias. Suele suceder, sin embargo, que algunas de las 200 estrellas próximamente, cuyas posiciones aparentes da el Almanaque americano, están favorablemente situadas respecto de la luna, en cuyo caso pueden observarse como culminantes con este astro, evitándose las correcciones que he mencionado.

292.—Indiquemos ahora los principales métodos para calcular la longitud por medio de las culminaciones de la luna. La cantidad que he designado por α, á la vez que representa la ascension recta del limbo visible de este astro, es tambien la hora sideral de la observacion, la cual convertida en hora media designaré por M; y como las Efemérides horarias se refieren al centro del astro, tendrémos que para calcular la hora correspondiente M' del primer meridiano será preciso deducir de la cantidad observada α, la ascension recta del centro de la luna. Reflexionemos para esto que en el instante α ó M en que el borde se halla en el meridiano, la distancia angular de su centro á este plano es precisamente igual al semidiámetro geocéntrico s; y que el triángulo formado por el polo, el centro de la luna y el punto de su disco que está en contacto con el meridiano, siendo rectángulo en este último punto, da por valor del pequeño ángulo horario de la luna en segundos de tiempo:

$$h = \frac{s}{15 \cos. \delta} \qquad (3)$$

En consecuencia, la ascension recta del centro en el instante M en que la del borde es α, tiene por expresion:

$$a = \alpha \pm h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

debiéndose tomar el signo superior durante la primera semilunacion, quiere decir, desde la neomenia hasta el plenilunio, que es cuando el limbo iluminado es el primero que pasa por el meridiano. De los elementos s y δ, el primero varia con mucha lentitud, y como el segundo solo se necesita aproximado hasta los minutos, ambos pueden tomarse con la estima y la hora M, sin necesidad de hacer la interpolacion con diferencias segundas.

Siendo ahora a' la ascension recta que mas se acerca á la observada a, y τ la hora correspondiente del meridiano de las Efemérides, se tendrá:

$$L = \tau + \frac{3600}{m}(a - a') - M$$

fórmula en la cual m representa el movimiento horario de la luna en ascension recta, calculado para el instante intermedio..... $\frac{1}{2}(\tau + M + L)$ entre τ y la hora aproximativa $M + L$ obtenida con ayuda de la estima. Para tomar en cuenta el error tabular, que no permite hallar desde luego el verdadero resultado, la expresion general de la longitud correcta es:

$$L + \triangle L = \tau + \frac{3600}{m}(a - a') - M - \frac{3600}{m} \triangle \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

en la cual $\triangle \alpha$ representa la correccion de las Tablas.

Ejemplo.—Tomemos una de las culminaciones que observé en Tacubaya en 1858. Las posiciones de las estrellas están tomadas del Almanaque inglés para el dia de la observacion, y la declinacion aproximativa de la luna se calculó para la hora local del tránsito. El cronómetro solar tenia una marcha de $0^s.06$ por hora. Las horas de las observaciones están ya corregidas por el pequeño error de colimacion, ó indican por consiguiente, los instantes cronométricos de los tránsitos por el plano de colimacion del telescopio.

Las cuatro estrellas que van acompañadas de un asterisco son las que señala ese dia el Almanaque como culminantes con la luna: yo añadí otras y observé algunas mas para determinar las correcciones instrumentales. Para obtener el valor de n (pág. 391) combiné η *Piscium* con α *Eridani*, y tambien α *Eridani* con α *Arietis*. De la primera combinacion resulta $n = -0^s.07$ y de la segunda $n = -0^s.06$, por lo cual adopté $n = -0^s.065$. El término medio de todas las lecturas del nivel da $b = -0^s.08$, de lo que resulta $m = -0^s.062$; pero atendiendo á sus fuertes diferencias, me ha parecido mas conveniente calcular, con cada una de sus indicaciones, el valor correspondiente de m é interpolar en seguida para cada estrella.

Tacubaya, Noviembre 19 de 1858.—Culminaciones.—Luz al Oeste.

ESTRELLAS.	CRONOMETRO.	NIVEL.	ASCENC. RECTAS.	DECLINACIONES.
η *Piscium*.....	$9^h\ 32^m\ 57^s.22$		$1^h\ 23^m\ 57^s.49$	$+14°\ 37'$
α *Eridani*.....	9 41 28.44	$-0^s.23$	1 32 30.25	−57 57
γ^1 *Arietis* (*).....	9 54 45.02		1 45 48.98	+18 36
ι *Arietis* (*).....	9 58 35.87	$-0^s.17$	1 49 40.33	+17 7
α *Arietis*	10 8 8.88		1 59 14.97	+22 48
67 *Ceti*.....	10 18 50.01		2 9 58.34	− 7 4
ξ^2 *Ceti*.....	10 29 31.26	$-0^s.03$	2 20 41.13	+ 7 50
γ *Ceti*.....	10 44 48.51		2 36 1.06	+ 2 39
Luna — I *Limbo*...	10 54 19.68			+21 3
ε *Arietis* (*).....	10 59 55.53	$+0^s.10$	2 51 10.60	+20 46
ζ *Arietis* (*).....	11 15 31.73		3 6 49.38	+20 31

Determinemos el valor de γ, y por consiguiente el (1) de α, valiéndonos de la primera estrella culminante con la luna.

γ^1 *Arietis*.		Luna.—I *Limbo*.	
n	8.8129—	n	8.8129—
tan. δ	9.5270	tan. δ	9.5853
n tan. δ	8.3399—	n tan. δ	8.3982—
n tan. δ =	$-0^s.022$	n tan. δ =	$-0^s.025$
m =	−0. 165	m =	+0. 091
Cronómetro =	$9^h\ 54^m\ 45^s.02$	Cronómetro =	$10^h\ 54^m\ 19^s.68$
	$9^h\ 54^m\ 44^s.83$		$10^h\ 54^m\ 19^s.75$

Estas son las horas cronométricas de los tránsitos por el meridiano, y como el cronómetro era solar, procederémos así:

γ^1 *Arietis*.....	$9^h\ 54^m\ 44^s.83$
1 *Limbo*.....	$10\ 54\ 19.75$
Intervalo cronométrico =	$59\ 34.92$
Marcha =	$+\ 0.06$
Aceleracion =	$+\ 9.88$
γ =	$+59^m\ 44^s.86$
a' =	$1\ 45\ 48.98$
a =	$2^h\ 45^m\ 33^s.84$

Haciendo el mismo cálculo para todas las estrellas que siguen á esta, se obtienen los resultados que pongo á continuacion.

ESTRELLAS.	TRÁNSITOS.	m	γ	a
γ^1 *Arietis*.....	$9^h\ 54^m\ 44^s.83$	$-0^s.165$	$+59^m\ 44^s.86$	$2^h\ 45^m\ 33^s.84$
ι *Arietis*.....	$9\ 58\ 35.69$	-0.157	$+55\ 53.26$	$,,\ ,,\ 33.59$
a *Arietis*.....	$10\ 8\ 8.74$	-0.117	$+46\ 18.65$	$,,\ ,,\ 33.62$
67 *Ceti*.....	$10\ 18\ 49.96$	-0.057	$+35\ 35.65$	$,,\ ,,\ 33.99$
ξ^2 *Ceti*.....	$10\ 29\ 31.24$	-0.009	$+24\ 52.61$	$,,\ ,,\ 33.74$
γ *Ceti*.....	$10\ 44\ 48.56$	$+0.055$	$+\ 9\ 32.76$	$,,\ ,,\ 33.82$
ε *Arietis*.....	$10\ 59\ 55.63$	$+0.129$	$-\ 5\ 36.81$	$,,\ ,,\ 33.79$
ζ *Arietis*.....	$11\ 15\ 31.85$	$+0.139$	$-21\ 15.60$	$,,\ ,,\ 33.78$

Promedio..... $a = 2^h\ 45^m\ 33^s.77$

Para obtener el valor medio de a es conveniente, en general, limitarse á las estrellas señaladas en el Almanaque; pero en este ejemplo, por la confianza que tenia en la observacion y por la pequeñez de las correcciones instrumentales, me he valido tambien de otras que difieren notablemente de la luna en declinacion.

Apliquemos ahora las fórmulas (3), (4) y (5) tomando todos los datos del Almanaque americano, (*) y comenzando por hallar la hora media equivalente á la sideral a.

a =	$2^h\ 45^m\ 33^s.77$
Asc. recta =	$15\ 53\ 59.51$
	$10\ 51\ 34.26$
Reduccion =	$-\ 1\ 46.74$
M =	$10^h\ 49^m\ 47^s.52$

(*) En la pág. 209 y siguientes de mis "Nuevos Métodos Astronómicos" constan estas mismas observaciones calculadas con los datos del Almanaque inglés, los cuales difieren bastante de los del americano; pero los errores de este eran ese dia menores que los de aquel, y por eso me ha parecido mejor adoptar los datos americanos.

Con esta hora y la estima $6^h\ 36^m\ 40^s$ hallamos que la hora de Greenwich es $17^h.44$, y para este instante se encuentra $s = 16'\,22.''1$ y $\delta = 21°\ 3'$.

$\frac{1}{15}$	8.82391	a	$= 2^h\,45^m\ 33^s.77$	3600	3.5563025
s	2.99216	h	$= +\ 1\ \ 10.16$	$a - a'$	1.8153120+
cos. δ	—9.97001			m	—2.1692629
		a	$= 2^h\,46^m\ 43^s.93$		
h	1.84606	a'	$= 2\ \ 45\ \ 38.57$		3.2023516+
		$a - a'$	$= +\ 65^s.36$		+26m 33s.50
		τ	$= 17^h$		
		m	$= 147^s.66$	M'	$= 17^h\ 26^m\ 33^s.50$
				M	$= 10\ \ 49\ \ 47.52$
				L	$= 6^h\ 36^m\ 45^s.98$

El movimiento horario se ha calculado para $17^h.22$ de Greenwich, que es el medio entre $\tau = 17^h.0$ y $M + L = 17^h.44$. Al efecto se tienen los datos:

A 17^h	$a' = 2^h\,45^m\ 38^s.57$	$\Delta_1 = 147^s.81$	$\Delta_2 = +\ 0^s.52$
,, 18	,, $= 2\ \ 48\ \ 6.38$	148.33	
,, 19	,, $= 2\ \ 50\ \ 34.71$		

y aplicando la fórmula (6) de la pág. 293, para lo cual se tiene..... $t = 0.22$, resulta:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 147^s.81 \\ (t - 0.5) \times 0.52 &= -0.15 \\ m &= 147^s.66 \end{aligned}$$

La longitud que se deduce de esta observacion será, pues:

$$L + \Delta L = 6^h\ 36^m\ 45^s.98 - 24.38\ \Delta\, a$$

293.—La correccion tabular $\Delta\, a$ se determina, segun he dicho varias veces, por observaciones meridianas hechas en un lugar cuya longitud se conozca axactamente; porque entónces en la correspondiente ecuacion semejante á la que precede, todo será conocido con excepcion de $\Delta\, a$. Una vez determinada esta cantidad pueden corregirse las Efemérides, ó bien introducirse como correccion en el valor de $L + \Delta\, L$, puesto que se tiene calculado su coeficiente. Tambien la observacion correspondiente, comparada con la que se desea reducir, suministra la diferencia de longitudes de los dos lugares con la eliminacion casi completa del error de las Tablas; y por consiguien-

te, si se conoce con precision la longitud absoluta de una de las estaciones que se comparen, queda determinada la de la otra.

El mismo dia que hice en Tacubaya las observaciones que sirven de ejemplo, se ejecutaron las siguientes en el Observatorio de Cambridge (Massachussets), las cuales tuvo la bondad de remitirme su Direcror Mr. W. C. Bond con otras muchas correspondientes á las que hice en aquella época.

Cambridge, Noviembre 19 de 1858.—Culminaciones.

ESTRELLAS.	Asc. rectas observadas.	γ	α
γ^1 *Arietis*	$1^h\ 45^m\ 48^s.95$	$+54^m\ 58^s.81$	$2^h\ 40^m\ 47^s.79$
ι *Arietis*	1 49 40. 28	+51 7. 48	,, ,, 47. 81
α *Arietis*	1 59 15. 04	+41 32. 72	,, ,, 47. 69
ξ^2 *Ceti*	2 20 41. 15	+20 6. 61	,, ,, 47. 74
Luna.—I *Limbo*	2 40 47. 76		
ε *Arietis*	2 51 10. 60	—10 22. 84	,, ,, 47. 76
ζ *Arietis*	3 6 49. 46	—26 1. 70	,, ,, 47. 68

Promedio..... $\alpha = 2^h\ 40^m\ 47^s.74$

La segunda columna contiene las horas del péndulo sideral del Observatorio, ya corregidas por todos los errores instrumentales; pero con el fin de adoptar las mismas ascensiones rectas de las estrellas con que reduje mis observaciones, formé la tercera columna de los valores de γ, que no son mas que las diferencias entre la hora del tránsito de la luna y los de las estrellas. Estas diferencias sumadas con su signo á las ascensiones rectas tabulares de las estrellas, que constan en las observaciones de Tacubaya, dan los valores de la ascension recta del primer limbo, cuyo promedio, por otra parte, difiere apenas del que se obtuvo directamente.

A fin de determinar la correccion tabular y aplicarla á la longitud de Tacubaya, calculemos las observaciones de Cambridge por las mismas fórmulas (3), (4) y (5).

$$\begin{aligned} \alpha &= 2^h\ 40^m\ 47^s.74 \\ \text{Tiempo sideral} &= 15\ 53\ 41.08 \\ &\hline 10\ 47\ 6.66 \\ \text{Reduc.} &= -1\ 46.01 \\ &\hline M = 10^h\ 45^m\ 20^s.65 \end{aligned}$$

Con esta hora media de aquel Observatorio y su longitud exacta,

que es $L = 4^h\ 44^m\ 30^s.66$, se halla $M + L = 15^h.50$ de Greenwich, y para este instante el Almanaque americano da: $s = 16'\ 21.''3$ y $\delta = 20°\ 40'$. Calculando, ademas, el movimiento horario m para $15^h.25$, término medio entre $M + L$ y el valor de τ que se pondrá en seguida, tendrémos:

$\frac{1}{15}$	8.82391	a =	$2^h\ 40^m\ 47^s.74$	*3600*.....	3.5563025
s.....	2.99180	h = +	1 9. 92	$a-a'$.....	1.8637391+
cos. δ.....	−9.97111			m.....	−2.1661043
		a =	$2^h\ 41^m\ 57^s.66$		
h.....	1.84460	a' =	2 40 44. 59		3.2539373+
		$a-a'$ =	+ $73^s.07$		+$29^m\ 54^s.47$
		τ =	15^h		
		m =	$146^s.59$	M' =	$15^h\ 29^m\ 54^s.47$
				M =	10 45 20. 65
				L =	$4^h\ 44^m\ 33^s.82$

Segun esta observacion, la longitud de Cambridge será:

$$L + \Delta L = 4^h\ 44^m\ 33^s.82 - 24.56\ \Delta a$$

mas como su valor exacto es $4^h\ 44^m\ 30^s.66$, se tendrá sustituyéndolo en el primer miembro de esta ecuacion:

$$3^s.16 = 24.56\ \Delta a$$

de donde resulta: $\Delta a = +\ 0^s.13$. Introduciendo esta correccion en la longitud de Tacubaya, obtendrémos:

$$L + \Delta L = 6^h\ 36^m\ 45^s.98 - 24.38 \times 0^s\ 13 = 6^h\ 36^m\ 42^s.81$$

Comparando directamente los dos meridianos, se halla:

Tacubaya.....	$6^h\ 36^m\ 45^s.98$	$- 24.38\ \Delta a$
Cambridge.....	4 44 33. 82	$- 24.56\ \Delta a$
Tacubaya al Oeste de Cambridge.....	$1^h\ 52^m\ 12^s.16$	$+ 0.18\ \Delta a$
Cambridge al Oeste de Greenwich.....	4 44 30. 66	
Tacubaya al Oeste de Greenwich.....	$6^h\ 36^m\ 42^s.82$	$+ 0.18\ \Delta a$

Se ve que tambien de esta manera queda casi eliminado del todo

el error tabular, pues aunque llegara á 1^s, apenas tendria efecto en las decimales de la longitud.

Por la triangulacion del Valle, la diferencia geodésica de meridianos entre Tabubaya y la Escuela de Ingenieros, que fué el punto á que referí la longitud de México, es de $+ 11^s.4$; y en consecuencia resultaria de esta observacion $6^h\ 36^m\ 31^s.4$ por longitud de la Escuela, que difiere ménos de 3^s de la que obtuve en 1856 y 1857 por muchas observaciones comparadas con las correspondientes de Greenwich que me remitió el Astrónomo Real de Inglaterra, Mr. G. B. Airy.

Las Efemérides americanas dan directamente la variacion v de ascension recta en 1^m de tiempo medio, la cual puede emplearse en vez del movimiento horario m, de manera que el factor $\frac{3600}{m}$ de la fórmula (5) se cambia en $\frac{60}{v}$. Así lo haré al aplicar á nuestro ejemplo el otro método de cálculo que paso á exponer.

294.—En lugar de reducir la observacion del borde de la luna á su centro por la adicion de $\pm h$, puede hallarse la hora sideral del tránsito del mismo centro por el meridiano, sumando con su signo á la cantidad observada α, el tiempo que invierte el semidiámetro en pasar por aquel plano. Como h representa el pequeño ángulo horario del centro del astro en el instante en que su limbo se halla en el meridiano, resultará evidentemente segun lo expuesto en el núm. 291, que en virtud de la variacion de ascension recta, el tiempo que emplea la luna en describir este ángulo, es:

$$\Theta = \frac{h}{1-\mu} = \frac{s}{15\,(1-\mu)\cos.\,\delta} \qquad (6)$$

y así, designando por A la ascension recta del centro de la luna en el momento del tránsito de este punto, se tiene:

$$A = \alpha \pm \Theta \qquad (7)$$

Siendo ahora H la hora media correspondiente á la sideral A, se procede al cálculo de la ecuacion (5) con A y H en lugar de α y M, absolutamente de la misma manera que en el primer método.

Apliquemos al mismo ejemplo. Para Tacubaya se encuentra con $M + L = 17^h.44$, el movimiento horario $m = 147^s.79$, que sirve de argumento para tomar de la Tabla IX el log. $(1-\mu)$.

h.....	1.84606	α =	$2^h\ 45^m\ 33^s.77$	A =	$2^h\ 46^m\ 46^s.92$
$1-\mu$.....	−9.98185	Θ =	$+\ 1\ \ 13.15$	Tiempo sid. =	$15\ \ 53\ \ 59.51$
Θ.....	1.86421	A =	$2^h\ 46^m\ 46^s.92$		$10\ \ 52\ \ 47.41$
	$73^s.15$	A' =	$2\ \ 45\ \ 38.57$	Reduc. =	$-\ 1\ \ 46.94$
		$A-A'$ =	$+68^s.35$	H =	$10^h\ 51^m\ 00^s.47$
		τ =	17^h		
		v =	$2^s.4609$	60.....	1.7781513
				$A-A'$.....	1.8347385+
		H' =	$17^h\ 27^m\ 46^s.46$	v.....	−0.3910940
		H =	$10\ \ 51\ \ 00.47$		3.2217958+
		L =	$6^h\ 36^m\ 45^s.99$		$+27^m\ 46^s.46$

$$L + \Delta L = 6^h\ 36^m\ 45^s.99 - 24.38\ \Delta\ a$$

El valor de v se ha interpolado para $17^h.23$ de Greenwich, término medio entre $H + L = 17^h.46$ y $\tau = 17^h$. He aquí los elementos para la interpolacion:

A 16^h.....	$2^s.4501$
„ 17	2. 4589
„ 18	2. 4676
„ 19	2. 4764

y siendo sensiblemente nulas las diferencias segundas, ó constantes las primeras, se tiene: $v = 2^s.4589 + 0.0087 \times 0.23 = 2^s.4609$.

Hagamos los mismos cálculos para Cambridge, tomando el argumento m de log. $(1-\mu)$ para $M + L = 15^h.50$ próximamente, con lo que se halla $m = 146^s.72$.

h.....	1.84460	α =	$2^h\ 40^m\ 47^s.74$	A =	$2^h\ 42^m\ 00^s.62$
$1-\mu$.....	−9.98198	Θ =	$+\ 1\ \ 12.88$	Tiempo sid. =	$15\ \ 53\ \ 41.08$
Θ.....	1.86262	A =	$2^h\ 42^m\ 00^s.62$		$10\ \ 48\ \ 19.54$
	$72^s.88$	A' =	$2\ \ 43\ \ 11.31$	Reduc. =	$-\ 1\ \ 46.21$
		$A-A'$ =	$-70^s.69$	H =	$10^h\ 46^m\ 33^s.33$
		τ =	16^h		
		v =	$2^s.4475$	60.....	1.7781513
				$A-A'$.....	1.8493580−
		H' =	$15^h\ 31^m\ \ 7^s.05$	v.....	−0.3887227
		H =	$10\ \ 46\ \ 33.33$		3.2387866−
			$4^h\ 44^m\ 33^s.72$		$-28^m\ 52^s.95$

$$L + \Delta L = 4^h\ 44^m\ 33^s.72 - 24.51\ \Delta\ a$$

En este caso se ha calculado v para $15^h.76$ de Greenwich, que es el instante medio entre $H + L = 15^h.52$ y $\tau = 16^h$, pues á esta última hora es á la que la ascension recta de la luna se aproxima mas á la observada A en Cambridge.

Haciendo la comparacion y desechando el pequeño resíduo que proviene de la correccion tabular, se tiene:

Tacubaya	$6^h\,36^m\,45^s.99$	$-24.38\,\Delta\,a$
Cambridge	$4\;44\;33.72$	$-24.51\,\Delta\,a$
Tacubaya al Oeste de Cambridge	$1^h\,52^m\,12^s.27$	
Cambridge al Oeste de Greenwich	$4\;44\;30.66$	
Tacubaya al Oeste de Greenwich	$6^h\,36^m\,42^s.93$	

Si en cada caso fuera necesario calcular directamente el valor de Θ, este método de reduccion presentaria un trabajo adicional respecto del primero, cual es el de tomar el movimiento horario m que sirve de argumento para la Tabla IX; pero este aumento en manera alguna es necesario. El Almanaque Náutico inglés, con el título de "*Tiempo sideral del paso del semidiámetro*," da directamente los valores de Θ para los instantes de los tránsitos superior é inferior de la luna por el meridiano de Greenwich, esto es: para cada 12^h de longitnd; y por consiguiente puede interpolarse por las fórmulas (3) de la pág. 290, en la que será $t = \frac{L}{12}$, expresando L la estima en horas. El Almanaque americano suministra actualmente el mismo dato para cada tránsito superior por el meridiano de Washington, ó sea para intervalos de 24^h de longitud. Al hacer, pues, la interpolacion con estas Efemérides, deberá tomarse $t = \frac{L}{24}$, contando la estima L respecto de Washington. Así en nuestro ejemplo siendo próximamente ..... $L = 1^h.47$ la longitud de Tacubaya al O. de este meridiano, se tendrá $t = 0.06$. Interpolemos con los siguientes datos:

1858.—Nov. 18	$\Theta = 69^s.52$		
,, 19	,, $= 72.95$	$\Delta_1 = 3^s.43$	$-0^s.09$
,, 20	,, $= 76.29$	3.34	-1.10
,, 21	,, $= 78.53$	2.24	

Con $\Delta_1 = 3^s.34$ y $\Delta_2 = -0^s.60$, se obtiene $\Theta = 73^s.17$ para el momento del paso por el meridiano de Tacubaya, que es sensiblemente el mismo valor hallado por la fórmula (6).

295.—En las págs. 213 y 218 de los "Nuevos Métodos Astronómicos" pueden verse otros procedimientos de cálculo para hallar la

longitud por medio de las culminaciones de la luna, que como los precedentes, son aplicables, sea cual fuese el valor de esta coordenada. Voy ahora á ocuparme de los mas sencillos que pueden aplicarse siempre que se comparen las observaciones ejecutadas en dos meridianos cuya diferencia de longitud no exceda de 2^h. El Almanaque inglés, bajo el título de "*Variacion de la ascension recta por una hora de longitud,*" da el incremento que sufre la ascension recta del borde visible de la luna en el tiempo que trascurre entre sus pasos por dos meridianos distantes 15° ó 1^h. Este dato, que es variable, está calculado para los instantes de sus tránsitos superior é inferior por el meridiano de Greenwich, y por interpolacion puede obtenerse para cualquiera longitud contada desde aquel. El uso á que está destinado es muy importante para reducir las observaciones practicadas en dos lugares no muy distantes en longitud, en atencion á que todo el cálculo se reduce á una sencilla proporcion.

Sean L y L' las longitudes de dos lugares en que se hayan observado las ascensiones rectas α y α' del borde de la luna, y V la variacion por una hora de longitud, interpolada para la longitud media $\frac{1}{2}(L+L')$. Entónces la diferencia de meridianos $\lambda = L - L'$ se calculará por la fórmula:

$$\lambda = \frac{3600}{V}(\alpha - \alpha') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

y una vez determinado el valor de λ, se tiene $L = L' + \lambda$, de modo que conociendo exactamente una de las longitudes se hallará fácilmente la otra.

Apliquemos este método á las observaciones de Tacubaya y Cambridge tomando del Almanaque inglés los datos siguientes:

Nov. 18 (Paso inf.).....	$V = 142^s.68$		
„ 19 (Paso sup.).....	„ $= 149.60$	$\Delta_1 = 6^s.92$	$+0^s.24$
„ 19 (Paso inf.).....	„ $= 156.76$	$\Delta_1 = 7.16$	-0.21
„ 20 (Paso sup.).....	„ $= 163.71$	$\Delta_1 = 6.95$	

Como la longitud media es en este caso $\frac{1}{2}(L+L') = 5^h.6767$ y el intervalo de las Tablas es de 12^h, tendrémos $t = \frac{5.6767}{12} = 0.473$. De estos elementos resulta $V = 152^s.98$ y el cálculo de λ será en consecuencia:

a =	$2^h\,45^m\,33^s.77$		
a' =	$2\;40\;47.74$		
		3600	3.5563025
$a - a'$ =	$+\;4^m\,46^s.03$	.....	2.4564116+
V =	152.98	.....	−2.1846347
λ =	$+1^h\,52^m\,11^s.00$	λ	3.8280794+
L' =	$4\;44\;30.66$		
L =	$6^h\,36^m\,41^s.66$		

Dijimos que este procedimiento tan sencillo se aplica sin error siempre que λ no exceda de 2^h, y en la República puede ser de la mayor utilidad para reducir las observaciones que se practiquen en nuestras ciudades, comparándolas con las de su capital ó con las de los Observatorios de los Estados-Unidos.

296.—Cuando se usa el Almanaque americano no puede aplicarse el procedimiento anterior, porque no da directamente los valores de V; pero con un ligero aumento de trabajo se puede aplicar el que sigue, muy semejante á aquel. El Almanaque americano suministra los valores de Θ, que interpolados para las dos longitudes L y L', sirven para corregir las ascensiones rectas a y a' del borde y obtener las del centro A y A', como en el método del núm. 294. Si llamamos ademas m la variacion de la ascension recta en una hora de tiempo medio, ó bien en $3609^s.86$ de tiempo sideral, y calculada para el instante intermedio $\frac{1}{2}(H + L + H' + L')$, tendrémos que la duracion sideral S trascurrida entre las dos culminaciones, es:

$$S = \frac{3609.86}{m}(A - A')$$

Determinemos otro valor de S en funcion de λ por la siguiente consideracion: Si la luna no tuviera movimiento propio en ascension recta, el tiempo sideral físicamente trascurrido entre sus tránsitos por los dos meridianos cuyas longitudes son L y L', seria precisamente λ, pues este es el que invierte cualquiera estrella fija; pero creciendo la ascension recta de la luna la cantidad $A - A'$ entre ambos tránsitos, pasará por el segundo meridiano $A - A'$ segundos despues de la hora en que deberia culminar sin la existencia de su movimiento propio, que la dirige continuamente hácia el Este. En consecuencia la duracion físicamente trascurrida es en tiempo sideral:

$$S = \lambda + (A - A')$$

Igualando este valor con el precedente, se obtiene con facilidad:

$$\lambda = \frac{3609.86 - m}{m}(A - A') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Sirviéndose de la variacion v por 1^m de tiempo medio, ó por..... $60^s.1643$ de tiempo sideral, hallariamos en virtud de consideraciones semejantes á las anteriores:

$$\lambda = \frac{60.1643 - v}{v}(A - A') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Cualquiera de estas nuevas fórmulas se emplea casi con igual ventaja. Apliquemos la última á nuestro ejemplo, tomando los valores de A y A' del núm. 294. Calculando el de v para $16^h.49$, promedio entre $H + L = 17^h.46$ y $H' + L' = 15^h.52$, se encuentra:.. $v = 2^s.4544$.

$$\begin{array}{rl} A = & 2^h\,46^m\,46^s.92 \\ A' = & 2\;\;42\;\;\;00.62 \\ \hline A - A' = & +\;4^m\,46^s.30 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 57^s.7099 \ldots\ldots\ldots & 1.7612503 \\ A - A' \ldots\ldots\ldots & 2.4568213+ \\ v \ldots\ldots\ldots & -0.3899453 \\ \hline \lambda \ldots\ldots\ldots & 3.8281263+ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lambda = & +1^h\,52^m\,11^s.72 \\ L' = & \;\;4\;\;44\;\;\;30.66 \\ \hline L = & \;\;6^h\,36^m\,42^s.38 \end{array}$$

Tambien este método solo debe aplicarse cuando sea poco considerable la diferencia de meridianos λ, condicion en que se encuentra la mayor parte de nuestro país respecto de las ciudades americanas en que se hacen observaciones con regularidad.

El método de culminaciones lunares es uno de los mas exactos para la determinacion de la longitud, y debe notarse que es casi independiente de la estima, puesto que esta cantidad solo se emplea para tomar de las Efemérides algunos elementos que varian muy poco ú otros cuyo valor no se necesita con mucha precision, como es la declinacion de la luna. Algunos astrónomos creen que los telescopios de pequeñas dimensiones producen un aumento anormal del semidiámetro de aquel astro, lo cual originaria cierto error en las longitudes obtenidas por la observacion de un solo limbo; pero el modo de eliminarlo consiste en observar tanto ántes como despues del plenilunio, porque influyendo el error supuesto de una ma-

Esta no solo es una opinion, sino que en mi concepto es una consecuencia de la irradiacion de la luna en nuestra retina y aun podria determinarse su valor para cada telescopio con la aproximacion bastante para poder aplicarse la correccion correspondiente á todas las observaciones del ☉ ☽ y planetas de diametro aparente. Podria determinarse por un metodo analogo al de Gauss que se sigue en la averiguacion de la potencia ó por culminaciones lunares de un lugar perfectamente conocido. Es variable con el estado del organo

nera igual y contraria en las longitudes que se obtengan por los dos bordes, el promedio debe resultar independiente de él, sobre todo si se combina el mismo número de unas y de otras. Un centenar de culminaciones de los dos limbos de la luna, reducidas con las correspondientes de algun Observatorio de posicion bien conocida, me parece suficiente para determinar la longitud de una estacion con todo el grado de exactitud de que es susceptible este método. Muchas veces no pueden conseguirse observaciones correspondientes á todas las que se hayan practicado en el lugar cuya longitud se trata de determinar; pero basta que se consigan algunas ejecutadas durante las mismas lunaciones, para que se puedan corregir las Efemérides, aplicando un sencillo procedimiento debido al Profesor americano Mr. Peirce, que puede verse en la pág. 225 de mis "Nuevos Métodos Astronómicos".

Para terminar lo relativo á observaciones de la luna, diré que los eclipses del sol y las ocultaciones de estrellas proporcionan acaso los mejores medios de determinar una longitud absoluta; pero por desgracia la teoría general de los eclipses es demasiado vasta para que pudiera adaptarse al plan de mi libro. El lector que lo desee debe consultar los tratados especiales de Astronomía práctica como el de Chauvenet y el de Loomis, ó los escritos de Challis y Woolhouse, inserto el primero en el Almanaque inglés de 1854, y traducido el segundo por el astrónomo mexicano D. Francisco Jimenez. En los dos Capítulos que siguen expondré los procedimientos tan exactos como sencillos que se aplican para medir la diferencia de longitudes entre lugares no muy distantes. Ambos están tomados casi textualmente de los "Nuevos Métodos" ántes citados, en los que tambien puede verse la parte práctica de la prediccion de ocultaciones y de la determinacion de la longitud por la observacion de estos fenómenos.

del individuo, con la intensidad y color de la luz, siendo el color el que menos aumenta el diámetro de los astros para un mismo telescopio = Un sextante ó aparato semejante podria servir tambien para el objeto, pero necesitaria mayor aproximacion

CAPITULO XXV.

DETERMINACION DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE SEÑALES INSTANTÁNEAS.

297.—Puesto que la diferencia de meridianos de los lugares no es otra cosa mas que la diferencia de horas, ya sean siderales ó medias, que se cuentan en ellos en un mismo instante físico, la observacion de cualquiera fenómeno instantáneo permitirá comparar las horas locales de su produccion, y por consiguiente dará á conocer la diferencia de longitudes de los puntos en que se hayan hecho las observaciones.

Los fenómenos instantáneos que se observan con este fin son celestes ó terrestres. Entre los primeros pueden contarse los eclipses de la luna y de los satélites de Júpiter, y entre los segundos las señales luminosas y las telegráficas. Los eclipses de la luna, ademas de ser muy poco frecuentes, no proporcionan la exactitud necesaria á causa de la incertidumbre que ocasiona el efecto de la penumbra, de manera que hoy casi no se hace uso de este método, si no es para obtener simplemente una ruda aproximacion. Los eclipses de los satélites de Júpiter producidos por la sombra del planeta, sus ocultaciones detras del disco y sus tránsitos sobre el mismo, se verifican con bastante frecuencia y sirven algo mejor para la determinacion de la longitud, sobre todo cuando se comparan las observaciones directas á fin de eliminar los errores tabulares y los de apreciacion de los instantes en que se verifican aquellos fenómenos. En los Almanaques Náuticos hallará el lector amplias explicaciones respecto de la *configuracion* ó posicion relativa del planeta y sus satélites, así

como las horas exactas de los eclipses y las aproximativas de los tránsitos y ocultaciones para prepararse á la observacion. Siendo H' la hora del primer meridiano, la local será $H' - L$ para la estacion cuya estima sea L, contada desde el mismo meridiano.

Una vez hecha la observacion á la hora local H, la longitud será $L = H' - H$. Debe tenerse presente, sin embargo, que el resultado depende mucho de la potencia del telescopio con que se practique la observacion, porque como al eclipsarse un satélite, va desapareciendo gradualmente, permanecerá visible por un tiempo tanto mas largo cuanto mayor sea el poder del telescopio. En la reaparicion de un satélite eclipsado sucederá por el contrario, que se vea su salida de la sombra algun tiempo ántes con un telescopio poderoso que con otro débil. Para eliminar esta causa de error lo que conviene hacer es tomar el término medio de los resultados que den la *inmersion*, ó sea el principio del eclipse, y la *emersion* ó su fin; porque los efectos del error de apreciacion serán contrarios y casi iguales numéricamente. Si dos astrónomos desde sus respectivas estaciones observan estos fenómenos con telescopio del mismo poder y en condiciones atmosféricas semejantes, obtendrán generalmente con bastante precision su diferencia de meridianos. El primer satélite es el que merece la preferencia, porque sus eclipses, á la vez que mas frecuentes, son tambien mas instantáneos. Respecto de la observacion, como no difiere esencialmente de la de señales terrestres, que se prestan á mayor exactitud, me detendré en indicar la manera de practicar la observacion de estas.

298.—Las señales luminosas se hacen en uno ó mas lugares intermedios, y comunmente elevados, entre los puntos cuya diferencia de longitud se desea obtener. Consisten en la explosion de una cantidad de pólvora proporcionada á las distancias, ó bien en la produccion y desaparicion alternativa de una luz cualquiera, con tal que sea suficientemente intensa y rápida en aparecer y desaparecer. Segun las experiencias del astrónomo mexicano D. Francisco Jimenez, son bastantes 60 gramos de pólvora para percibir á la simple vista su explosion en la trasparente atmósfera de la mesa central á una distancia de 48 kilómetros.

El modo de hacer la observacion es muy sencillo. La persona encargada de hacer las señalas las produce á intervalos regulares, por ejemplo de cinco en cinco minutos, y los astrónomos estaciona-

dos en los puntos que han de compararse, anotan en sus cronómetros, arreglados de antemano á sus respectivos meridianos, los instantes en que se verifica cada señal. La comparacion de las horas anotadas, corregidas por los errores de los cronómetros y expresadas en la misma especie de tiempo, suministra tantos resultados independientes como señales se hayan observado en ambos puntos. Siendo t y t' las horas cronométricas en que se vió una de las señales desde las estaciones occidental y oriental respectivamente, ... $\triangle t$ y $\triangle t'$ las correcciones de los cronómetros, y puesto que en la estacion oriental debe contarse la hora mas avanzada, se tiene desde luego:

$$\lambda = (t' + \triangle t') - (t + \triangle t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y el promedio de los diversos valores de λ se adopta como diferencia definitiva de meridianos.

Tal es el método en toda su sencillez; pero para alcanzar toda la precision de que es susceptible es preciso tomar ciertas precauciones. En primer lugar la determinacion previa del error y marcha de cada cronómetro debe hacerse con la mayor exactitud, aplicando los mejores procedimientos y eliminando toda causa de error constante. Así, por ejemplo, si se determina la hora por pasos meridianos, debe medirse cuidadosamente el error de colimacion, ó mejor aún, invertir frecuentemente el telescopio observando en cada posicion varias estrellas fundamentales. Siempre que sea posible se valdrán ambos observadores de las mismas estrellas para determinar las correcciones instrumentales, y harán con la frecuencia necesaria las lecturas del nivel para conocer con exactitud la inclinacion del eje.

299.— Ademas de estos procedimientos generales para la buena determinacion de las horas locales, los dos astrónomos deben medir su error relativo ó *ecuacion personal*, como se denomina generalmente. Sea á consecuencia del estado nervioso especial de cada individuo, sea por el hábito que cada cual contrae de hacer sus apreciaciones de una manera determinada, ó lo que me parece mas probable, por la dificultad de concentrar la atencion simultáneamente en los sentidos de la vista y del oido, es un hecho casi universal que dos ó mas personas que observan un mismo fenómeno y que anotan el instante de su produccion, hallan diferencias que verdaderamente sorprenden. Aun entre observadores que tienen mucha práctica, llega á veces la

diferencia hasta 1^s y mas, á pesar de que cada uno cree haber anotado la hora con aproximacion de $0^s.1$.

Se comprende desde luego que la ecuacion personal no puede dejar de tomarse en cuenta siempre que se trate de comparar la hora determinada por dos observadores diferentes. La manera de conocer su magnitud es bien sencilla. Admitamos en cada observador cierto error fisiológico particular, sea cual fuere la causa que se le atribuya, que le hace anotar la percepcion de un fenómeno en un instante diverso de aquel en que tuvo realmente lugar. Siendo t la hora que anota, τ el instante incógnito en que se verificó el fenómeno y x el error fisiológico, se tiene: $\tau = t + x$. Para otro observador será: ... $\tau = t' + x'$, y designando por e la ecuacion personal, ó la diferencia de errores fisiológicos de los dos observadores, obtendrémos: ... $e + t' - t = 0$, de donde resulta:

$$e = t - t' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Esta fórmula manifiesta que para hallar el error relativo debe tomarse la diferencia de las horas anotadas por dos observadores al percibir un mismo fenómeno. Por lo general este consiste en el tránsito de una estrella por el hilo medio de la retícula de un telescopio meridiano, para lo cual cada uno de los observadores anota el paso por uno ó varios de los hilos laterales, y reduce su observacion al hilo medio con ayuda de los intervalos ecuatoriales segun la regla de la pág. 381. Los dos resultados t y t' suministran el valor de e. Este procedimiento seguimos el Sr. Barroso que era mi ayudante en el Observatorio que existió en Chapultepec, y yo. La retícula del telescopio tenia siete hilos: el Sr. Barroso observaba el paso en los tres primeros y yo en los tres últimos, anotando cada uno las horas en el péndulo sideral del Observatorio. Despues con la estrella que seguia, yo observaba en los primeros hilos y el Sr. Barroso en los últimos. El promedio de varias estrellas observadas con el mismo objeto, dió: $e = D - B = - 0^s.13$, por lo cual aparece que el Sr. Barroso observaba los tránsitos $0^s.13$ despues que yo, y por consiguiente para comparar sus determinaciones del tiempo con las mias, será preciso restarles esa cantidad.

La ecuacion personal de dos observadores no permanece siempre constante, sino que suele sufrir notables variaciones con el trascurso

del tiempo, lo que sin duda depende de cierta modificacion gradual en el modo de observar de cada uno; y en efecto, la ecuacion es por lo comun tanto mas variable, aun en intervalos cortos, cuanto menor es la práctica de los observadores.

300.—Para medir la diferencia de longitud por el método de señales, los dos astrónomos deben determinar su error relativo ántes y despues de la observacion de aquellas, adoptando el término medio de los resultados para reducir las horas anotadas por el uno á lo que serian anotadas por el otro. Es sin duda mas seguro, siguiendo la regla general de variar las circunstancias de las observaciones á fin de que ciertos errores constantes obren en diverso sentido, que despues de observar algunas noches cambien los astrónomos de estaciones, pasando á la oriental el que ocupaba la occidental y vice versa. De este modo la ecuacion personal producirá efectos contrarios, suministrando un promedio independiente de ella.

Como ejemplo de la determinacion de la diferencia de meridianos por la observacion de señales luminosas, tomamos de una Memoria del Sr. Jimenez las observaciones hechas el 9 de Abril de 1865 con el objeto de medir la longitud de San Juan Teotihuacan, respecto de la Escuela de Ingenieros de México. (*) El Sr. Jimenez observaba en la Escuela y el Sr. Almaraz en Teotihuacan. El cronómetro del Sr. Jimenez á las $8^h\ 00^m$ *P M* tenia un atraso de $9^m\ 51^s.17$, aumentándose $3^s.345$ en 24^h, ó bien $+\ 0^s.139$ por hora. El del Sr. Almaraz á las $8^h\ 40^m$ (tiempo de Teotihuacan) tenia un adelanto de $19^m\ 17^s.19$ y una marcha horaria de $-\ 1^s.892$. Las señales de esa noche, ejecutadas en el cerro de Chiconautla, se observaron á las siguientes horas cronométricas:

	EN MÉXICO.	EN TEOTIHUACAN.
1ª señal	$8^h\ 3^m\ 10^s.25$	$8^h\ 33^m\ 22^s.50$
2ª „	„ 9 9. 00	„ 39 21. 50
3ª „	„ 12 11. 00	„ 42 23. 50
4ª „	„ 15 7. 75	„ 45 20. 50
5ª „	„ 18 6. 50	„ 48 18. 50

En la determinacion de las correcciones de los cronómetros se tomó ya en cuenta la ecuacion personal, que era de $0^s.41$ aditiva á los

(*) Reproduzco esta parte del trabajo del Sr. Jimenez con tanto mas agrado cuanto que me proporciona la ocasion de corregir algunas equivocaciones con que resultó en la pág. 234 de los "Nuevos Métodos."

Parecería á primera vista que cuando los cronómetros son solares la diferencia de las horas medias debia reducirse como otro intervalo cualquiera á sideral para tener la diferencia de meridianos; mas esto sería un error. Si desde todos los meridianos de la tierra se anotase un mismo instante físico, las horas que se contasen en ellos daria la diferencia de meridianos, pues en realidad no es espacio de tiempo, porque si así quisiera considerarse

tránsitos observados por el Sr. Almaraz. Hagamos el cálculo de la diferencia de longitud con los datos relativos á la primera señal.

EN MÉXICO.	EN TEOTIHUACAN.
$t = 8^h\ 3^m\ 10^s.25$	$t' = 8^h\ 33^m\ 22^s.50$
$\triangle t = +\ 9\ \ 51.18$	$\triangle t' = -19\ \ 16.98$
Hora media $= 8^h\ 13^m\ 1^s.43$	Hora media $= 8^h\ 14^m\ 5^s.52$

Hora media de México..... $= 8^h\ 13^m\ 1^s.43$
,, ,, ,, Teotihuacan $= 8\ \ 14\ \ 5.52$

$\lambda = 0^h\ 1^m\ 4^s.09$

Haciendo los mismos cálculos para las demas señales, se hallan los resultados siguientes:

HORAS MEDIAS DE

SEÑALES.	MÉXICO.	TEOTIHUACAN.	λ
1ª.....	$8^h\ 13^m\ 1^s\ 43$.....	$8^h\ 14^m\ 5^s.52$.....	$1^m\ 4^s.09$
2ª.....	,, 19 00.19.....	,, 20 4.33.....	,, 4.14
3ª.....	,, 22 2.20.....	,, 23 6.23.....	,, 4.03
4ª.....	,, 24 58.96.....	,, 26 3.14.....	,, 4.18
5ª.....	,, 27 57.71.....	,, 29 1.05.....	,, 3.34

El término medio que calculó el Sr. Jimenez por 24 señales observadas en cinco noches diferentes, aunque sin cambiar de estaciones, es $\lambda = 1^m\ 4^s.46$. En consecuencia, la longitud absoluta de Teotihuacan será:

Longitud de la Escuela al O. de Greenwich..... $6^h\ 36^m\ 28^s.6$
,, de Teotihuacan al E. de la Escuela..... $-\ 1\ \ 4.46$

,, de Teotihuacan al O. de Greenwich..... $6^h\ 35^m\ 24^s.14$

301.— Cuando los lugares que se comparan están de tal manera distantes que las señales luminosas hechas en un solo punto no puedan verse desde ellos á la vez, se eligen una ó mas estaciones intermedias, en cada una de las cuales se establece un observador, y la operacion se hace por partes. En rigor, las personas que ocupan las estaciones intermedias no tienen necesidad de conocer con precision las correcciones absolutas de sus cronómetros, sino solamente su marcha en un corto intervalo de tiempo.

A. *m.* *n.* *B.*

E.

Sean, en efecto, *A* y *B* las estaciones extremas y *E* una de las

sería nulo, puesto que es el mismo instante físico. Supongamos que H, H', H''... fuesen las horas medias que se contasen en cada uno de los meridianos en dicho instante físico, h, h', h'' las horas siderales del mismo instante ó ascensiones rectas del punto vernal y que es lo mismo, la hora sideral de la observacion sabemos que para cualquier lugar es igual á la ascension recta de ~~[illegible]~~ y menos la ascension recta de

intermedias. Los observadores que se hallen en A y E, al ver la señal que se produce en m, anotan las horas t y τ respectivamente, por lo que su diferencia de meridianos es:

$$\lambda_1 = (\tau + \triangle \tau) - (t + \triangle t)$$

Algunos minutos despues se produce la señal en n, que anotan los observadores de E y B á las horas τ' y t' respectivamente. Su diferencia de longitud será pues:

$$\lambda_2 = (t' + \triangle t') - (\tau' + \triangle \tau')$$

La suma de este valor y del precedente dará por diferencia de meridianos entre A y B:

$$\lambda = (t' + \triangle t') - (t + \triangle t) + \theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

representando θ el intervalo $(\tau - \tau') + (\triangle \tau - \triangle \tau')$, que no es otra cosa mas que la diferencia de horas anotadas en la estacion intermedia, corregida por la marcha del cronómetro.

302.— La trasmision de señales por medio del telégrafo electromagnético proporciona el método mas sencillo y exacto de comparar las horas locales de dos ó mas estaciones. La idea de aplicar el telégrafo á la determinacion de las diferencias de longitud parece que fué sugerida por el profesor americano Morse desde 1839; pero la primera aplicacion práctica de este método fué ejecutada por el Capitan Wilkes entre Washington y Baltimore en Junio de 1844. Desde esa fecha los numerosos experimentos hechos en América y Europa han dado resultados de una precision muy superior á la que se obtiene por los procedimientos directamente astronómicos. En la República de México el Sr. Balbontin y yo hicimos la primera operacion de este género en 1855 para determinar la longitud de Querétaro respecto de la Capital. En Marzo de 1866 el profesor Jimenez auxiliado por los Sres. Ponce de Leon y Almaraz midió de este modo la longitud de Cuernavaca. Por medio de 120 señales cambiadas en 6 noches halló que esta ciudad está á $0^m\ 25^s.30$ al Oeste de México y en consecuencia á $6^h\ 36^m\ 53^s.9$ al Oeste de Greenwich. Ultimamente (Agosto de 1869) he cambiado cerca de 200 señales telegráficas entre México y Puebla, ayudado por los Sres. Fernandez é Iglesias.

Para la mejor inteligencia del procedimiento detengámonos algu-

nos instantes en echar una rápida ojeada sobre las máquinas telegráficas. Estas se componen de dos aparatos esencialmente distintos: el primero, llamado *manipulador*, sirve para trasmitir las señales, ya sean letras ó cualesquiera otros signos convencionales. El segundo, llamado *receptor*, ó tambien *registro*, reproduce los signos que le comunica el manipulador. En toda estacion telegráfica existen por consiguiente los dos aparatos, el uno para enviar y el otro para recibir los mensajes.

Aunque varios mecanismos diversos llenan igualmente bien las funciones de cada una de estas partes de la máquina, todo manipulador está dispuesto de manera que el telegrafista, por el simple movimiento de un boton ó manecilla, pueda á su voluntad interrumpir ó restablecer instantáneamente el circuito eléctrico. Recíprocamente, todo receptor denuncia las interrupciones y restablecimientos de la corriente eléctrica por la repulsion ó atraccion de la armadura de su electro-iman, que es su parte mas esencial. Uno de los extremos del hilo de las bobinas comunica con la batería, el otro con el alambre telegráfico; y en el paso de la corriente eléctrica, desarrollado por su influencia el magnetismo del electro-iman, es atraida la barra de hierro que está delante de él. Por el contrario, durante la ruptura del circuito cesa el magnetismo del electro-iman, y la barra cediendo á la fuerza de un resorte de que está provista, vuelve á su posicion primitiva. Este movimiento alternativo de la barra produce un sonido muy perceptible cuando la corriente es algo intensa, y por tanto proporciona una señal audible, que produciéndose en el mismo instante en que el operador de otra estacion lejana toca su manipulador, podrá servir directamente para comparar las horas locales de ambas estaciones. Si la corriente es poco enérgica puede no ser muy perceptible el choque de la barra contra el electro-iman; pero en uno y otro caso su movimiento de vaiven se comunica por un juego conveniente de palancas á una aguja ó punzon, el cual graba los signos telegráficos sobre una tira de papel que se mueve uniformemente por medio de una combinacion de relojería. El punzon suministra de esa manera una señal audible ó visible, propia para la comparacion de las horas.

Concebida esta disposicion general de los aparatos telegráficos, se comprenderá el modo de operar, que es muy sencillo. El astrónomo de una de las estaciones con el boton de su manipulador es-

tablece la corriente á intervalos regulares de diez, quince ó veinte segundos, anotando en su cronómetro los instantes en que toca el boton; y el de la otra estacion, contando los segundos de su cronómetro, apunta la hora al escuchar el choque de la barra de su receptor, producido por el paso instantáneo de la corriente eléctrica. Cambiadas así algunas señales, se invierte el órden de la operacion; el astrónomo de la segunda estacion, que las habia recibido, comienza á darlas con intervalos de 10^s á 20^s, y el de la primera las recibe, anotando ambos el instante preciso de su produccion en sus respectivos cronómetros, absolutamente lo mismo que ántes. De esta manera se obtienen por cada señal observada los valores de t y t' que con las correcciones de los cronómetros en esos instantes, permiten la aplicacion de la fórmula (1). Se entiende por supuesto que las horas determinadas por uno de los astrónomos deben corregirse por su error relativo, segun se dijo al principio, aunque siempre debe procurarse cambiar de estaciones.

Ejemplo.—Tomemos las dos primeras series de señales cambiadas entre México y Puebla en la noche del 11 de Agosto de 1869. El cronómetro de México tenia un adelanto de $5^m\ 36^s.56$ á las $7^h\ 36^m$ *P M*, y una marcha horaria de $-\ 0^s.12$. El de Puebla adelantaba $0^s.32$ á las $7^h\ 40^m$, con una variacion horaria de $-0^s.05$. En México el Sr. Fernandez ó yo dábamos señales á cada 10^s, 15^s ó 20^s de nuestro cronómetro, y los Sres. Iglesias y Tagle las recibian en Puebla. Despues de trasmitidas así cosa de diez señales, comenzaba á enviarlas el Sr. Iglesias á intervalos iguales de su cronómetro y nosotros las anotamos en el nuestro.

EN MÉXICO.

ENVIADAS.	RECIBIDAS.
$7^h\ 35^m\ 40^s$	$7^h\ 27^m\ 49^s.2$
,, 36 00	,, 28 8.5
,, ,, 20	,, ,, 29.2
,, ,, 40	,, ,, 49.2
,, 37 00	,, 29 9.5
,, ,, 20	,, ,, 29.5
,, ,, 30	,, ,, 49.5
,, ,, 50	,, 30 9.5
,, 38 10	,, ,, 29.5
	,, ,, 49.5

EN PUEBLA.

ENVIADAS.	RECIBIDAS.
$7^h\ 26^m\ 00^s$	$7^h\ 33^m\ 51^s.0$
,, ,, 20	,, 34 10.5
,, ,, 40	,, ,, 30.5
,, 27 00	,, ,, 50.5
,, ,, 20	,, 35 10.5
,, ,, 40	,, ,, 30.5
,, 28 00	,, ,, 40.5
,, ,, 20	,, 36 0.5
,, ,, 40	,, ,, 20.5
,, 29 00	

Para no reducir individualmente las observaciones, hagamos el cálculo con el promedio de las 9 señales enviadas de México.

EN MÉXICO.		EN PUEBLA.	
$t =$	$7^h\ 36^m\ 56^s.67$	$t' =$	$7^h\ 35^m\ 7^s.22$
$\triangle t =$	$-\ 5\ \ 36.56$	$\triangle t' =$	-0.32
Hora media $=$	$7^h\ 31^m\ 20^s.11$	Hora media $=$	$7^h\ 35^m\ 6^s.90$

Hora media de México $= 7^h\ 31^m\ 20^s.11$
„ „ de Puebla $= -7\ 35\ \ 6.90$

$\lambda = -0^h\ 3^m\ 46^s.79$

Haciendo el mismo cálculo con las 10 señales enviadas de Puebla, resulta $\lambda = -0^h\ 3^m\ 46^s.93$. El promedio de las dos series dará, pues, $3^m\ 46^s.86$ por longitud de Puebla al Este de México, ó sea $6^h\ 32^m\ 41^s.74$ al Oeste de Greenwich. Este es casi el mismo resultado que obtuvimos por gran número de señales cambiadas en aquella noche y en las siguientes.

303.—La trasmision de señales telegráficas se presta á tanta exactitud, que en los Estados-Unidos, donde tuvo su orígen el método, se ha procurado llevarlo á toda la perfeccion de que es susceptible. Tal como lo he presentado hasta aquí, tiene el inconveniente de que los astrónomos se ven alternativamente obligados á apreciar al oido las fracciones de segundo de sus respectivos cronómetros. En efecto, el que trasmite las señales, lo hace en coincidencia con los segundos de su cronómetro, y por consiguiente no tiene que estimar fraccion alguna; pero el que las recibe percibirá por lo general el choque de la barra entre dos golpes ó sonidos consecutivos del volante de su cronómetro, y tendrá que apreciar la fraccion de segundo trascurrida entre el ruido del electro-iman y el último del cronómetro. Ahora bien, en esta clase de apreciaciones hay sin duda alguna un error personal que acaso sea diferente del determinado por la observacion de tránsitos meridianos; porque en este último caso se hace uso simultáneamente de la vista y del oido, miéntras que en la apreciacion del tiempo que trascurre entre las percepciones de dos sonidos inmediatos solo se hace uso del oido. Podria acaso evitarse esta causa de error haciendo los dos observadores algunas experiencias directas para determinar esta nueva ecuacion personal y corregir con ella los resultados. Para ello deberian anotar en un mismo cronómetro las horas en que perciben el choque de la barra contra el electro-iman, y adoptar como error relativo el término medio de todas las diferencias que hallaren.

Me parece, sin embargo, preferible ponerse á cubierto del error

de apreciacion procediendo de esta manera. Si se emplean dos cronómetros que tengan una variacion diaria muy diferente, sucederá que con frecuencia coincidan los sonidos ó golpes de sus volantes; y si al cambiar las señales telegráficas solo se aprovechan aquellas que, trasmitidas en coincidencia con los golpes de uno de los cronómetros, se reciben tambien en coincidencia con los del otro, resultará que ninguno de los astrónomos tendrá que estimar fracciones. Esto puede conseguirse usando en una de las estaciones un cronómetro sideral y en la otra uno solar. En efecto, el cronómetro sideral adelanta respecto del solar cosa de $9^s.8$ por hora, ó sea casi 1^s en seis minutos, de manera que si ambos marcan segundos, deben coincidir sus sonidos cada 6^m, y si marcan medios segundos, que es lo mas frecuente, coincidirán cada 3^m. Hay cronómetros de bolsa que dan 25 golpes en 10^s, por lo que cada sonido representa $0^s.4$, y si uno de esta especie se compara con otro que marque $0^s.5$ se obtendrá una coincidencia cada dos segundos.

Para evitar equivocaciones conviene primero determinar la diferencia aproximativa de longitud por el cambio de algunas señales, apreciando al oido las fracciones de segundo como se ha explicado ántes. En seguida uno de los observadores comienza á trasmitir las señales sin interrupcion, en coincidencia con cada segundo de su cronómetro, y continúa enviándolas por espacio de diez á quince minutos. El de la otra estacion las cuenta; pero solo anota la hora de las que se producen en consonancia con los golpes de su cronómetro, y luego que ha logrado tres ó cuatro coincidencias avisa al primer observador por medio de una señal convenida de antemano. Despues de esto comienza á su vez á trasmitir señales cada segundo, durante el mismo espacio de tiempo poco mas ó ménos, hasta que el primer observador le participa haber logrado apuntar las horas de algunas coincidencias. Como cada astrónomo tiene cuidado de anotar la hora á la cual comienza á enviar sus señales, y el otro las cuenta, es muy fácil saber en seguida cuales son las indicaciones de ambos cronómetros en cada coincidencia. Parece inútil advertir que las dos horas, despues de corregidas, deben expresarse en la misma especie de tiempo, ya sea solar ó sideral. Repitiendo la misma operacion durante varias noches, y si es posible cambiando de estaciones, se obtienen resultados, si bien en mas corto número que por el otro método, por lo comun mas acordes y sobre todo mas dignos de confianza.

304.—Se ha dado mas perfeccion todavía al método de señales telegráficas con la introduccion de los electro-cronógrafos, que como su nombre lo indica, son instrumentos destinados á representar por medio de la electricidad la medida del tiempo con signos ó caractéres visibles. El aparato telegráfico comun de Morse, que representa por medio de puntos ó líneas el paso de la corriente eléctrica sobre un papel que se mueve uniformemente, puede servir muy bien como cronógrafo, y lo único que se necesita es que sus signos se produzcan á iguales intervalos de tiempo. A este fin se coloca dentro del circuito un péndulo astronómico comun, cuyas oscilaciones interrumpan y restablezcan alternativamente la corriente, á fin de que en cada segundo señale el punzon del receptor una línea pequeña en el papel telegráfico. De esta manera un solo péndulo hace marcar el tiempo en todas las estaciones comunicadas por el conductor, y en cada una de ellas se obtiene una tira de papel cuyas líneas equidistantes representan segundos; y si un observador desea anotar el instante en que se produce un fenómeno cualquiera, basta que toque la manecilla de su manipulador, el cual enlazado con el circuito eléctrico, producirá una señal semejante á las del péndulo. La distancia de aquella á la última de este, se podrá apreciar en seguida por medio de una escala, y comparada con la distancia constante de las líneas originadas por las oscilaciones del péndulo, dará con mucha exactitud la correspondiente fraccion de segundo.

En las páginas 241 y siguientes de los "Nuevos Métodos Astronómicos" puede verse la descripcion de los cronógrafos y la manera de emplearlos en la determinacion de las longitudes, limitándome aquí á decir que su uso se presta á tal precision, que permite medir la velocidad de la corriente eléctrica. El conjunto de experiencias practicadas con este objeto en los Estados-Unidos, le asignan cosa de 6200 leguas por segundo en los alambres telegráficos comunes, de modo que al comparar las horas locales de dos estaciones que disten entre sí 100 ó 200 leguas, puede suponerse rigurosamente instantánea la trasmision de las señales.

CAPITULO XXVI.

DETERMINACION DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE TRASPORTE DE CRONOMETROS.

305.—La comparacion de las horas locales de dos ó mas estaciones puede efectuarse trasportando de la una á la otra un cronómetro cuya variacion sea conocida, y cuyo error absoluto pueda determinarse respecto de cada uno de los meridianos, bien sea por medio de observaciones directas, ó bien por su comparacion inmediata con los cronómetros ó péndulos establecidos en cada estacion y arreglados de antemano á sus respectivos meridianos.

Supongamos por un momento que sea nula la variacion diaria del cronómetro que va á trasportarse, y que en el punto de partida A,

X. A. B.

cuya longitud absoluta designaré por L, se ha hallado que su correccion es $\triangle t$ en un instrante cualquiera, siendo $\triangle t$ positiva cuando el instrumento esté atrasado respecto del tiempo local. Es evidente entónces que para otro punto X, cuya longitud respecto de A sea $\triangle t$ segundos, el guarda-tiempo no tendrá error alguno, ó estará perfectamente arreglado al meridiano de X cuya longitud absoluta es $l = L + \triangle t$. Admitamos ahora que el cronómetro se traslade á otra estacion B, cuya longitud absoluta sea L', y que comparado allí con el tiempo local se encuentre que su correccion es $\triangle t'$. Como por la hipótesis es nula su variacion diaria, el cronómetro habrá seguido marcando el tiempo exacto del meridiano X, y la longitud

de este mismo punto respecto de B será $\triangle t'$, y como ántes tendrémos: $l = L' + \triangle t'$. Igualando los dos valores de l, resulta:

$$L - L' = \triangle t' - \triangle t$$

ecuacion que manifiesta que la diferencia de longitud de dos estaciones A y B es igual á la diferencia de las correcciones del cronómetro determinadas en cada una de ellas.

Aunque en general no puede admitirse la hipótesis de una variacion nula, por perfecta que sea la construccion de los guarda-tiempos, se comprende desde luego que subsiste la ecuacion anterior con tal que se lleve en cuenta la variacion v en la unidad de tiempo, ya sea esta el dia ó la hora. En efecto, si en el punto de partida A es t la indicacion del cronómetro cuando se halló que su correccion era $\triangle t$, y en el punto B señalaba t' cuando su correccion respecto de este nuevo meridiano era $\triangle t'$, es claro que el tiempo trascurrido entre las dos comparaciones es $t' - t$, y que en el instante t' de la segunda comparacion, la correccion del cronómetro en la estacion A seria $\triangle t + v(t' - t)$. Sustituyendo este valor por $\triangle t$ en la ecuacion precedente, se tendrá:

$$L - L' = \triangle t' - \triangle t - v(t' - t) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

He supuesto que el cronómetro partiendo de A se trasportó á B; pero admitiendo lo contrario, y conservando los acentos para indicar las cantidades referentes á B, se hallará:

$$L - L' = \triangle t' - \triangle t + v(t - t') \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

de manera que, en general, la diferencia de meridianos es igual á la de las correcciones del cronómetro reducidas al mismo instante físico con ayuda de su variacion en la unidad de tiempo.

306.—Este modo de operar supone, sin embargo, que la variacion diaria ú horaria del guarda-tiempo determinada, por ejemplo, en la primera estacion, permanezca constante durante el viaje; pero esto nunca ó casi nunca tiene lugar. Los cronómetros de mejor construccion, sean cuales fueren las precauciones que se tomen para trasportarlos, se resienten en su marcha, ya sea solamente á causa del movimiento, ya por los cambios de temperatura que sufren á ve-

ces sin poderse evitar. El resultado es que su variacion durante el trasporte, casi siempre es distinta de la que tienen cuando permanecen en reposo, y siendo necesario hacer uso de aquella para aplicar las fórmulas precedentes, veamos cómo puede determinarse.

Basta para esto hacer el doble viaje de ida y vuelta, y comparar el estado del cronómetro ántes de partir con el que guarda despues de terminada la expedicion, tomando en cuenta solamente el tiempo que dure el trasporte. Conviniendo siempre en acentuar los elementos que se refieren á la estacion oriental, designemos por c, c', C' y C las cuatro correcciones determinadas en este órden; al partir de la estacion A y cuando el cronómetro señale la hora t, sea c su correccion. Al llegar á la estacion B se determina la correccion c' respecto de este meridiano cuando el instrumento indique la hora t'. En seguida, ántes de partir de B, sea C' la correccion á la hora T' del guarda-tiempo; y por último, al llegar de nuevo á A sea C la correccion y T la hora. Este órden se comprenderá mejor bajo la forma siguiente, en que las flechas indican la direccion de los viajes:

En A			En B	
CRONÓMS.	CORRECS.		CRONÓMS.	CORRECS.
t	c	⟶	t'	c'
T	C	⟵	T'	C'

Es evidente que la duracion del primer viaje es $t' - t$, y la del segundo $T - T'$. Respecto de las correcciones, su cambio total es $C - c$; pero excluyendo de él la parte $C' - c'$ que corresponde al tiempo $T' - t'$ que estuvo en reposo el cronómetro en la estacion B, quedará $(C - c) - (C' - c')$ por marcha total en la duracion $(T - T') + (t' - t)$ de los dos viajes. Entónces la variacion durante el trasporte, será:

$$v = \frac{(C - c) - (C' - c')}{(T - t) - (T' - t')} \quad \ldots\ldots (3)$$

El valor de v indica la variacion diaria ú horaria segun que los intervalos de tiempo expresen dias ú horas. La diferencia de longitud $\lambda = L - L'$ tendrá, pues, por expresion:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{En el primer viaje} \ldots\ldots & \lambda = c' - c - v\,(t' - t) \\ \text{,, ,, segundo ,,} \ldots\ldots & \lambda = C' - C + v\,(T - T') \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Ejemplo.—El siguiente está tomado de la expedicion cronométrica hecha por Mr. Struve entre los Observatorios de Altona y Pulkowa en 1843. Mr. Struve partió de Pulkowa, que es la estacion oriental, el 19 de Mayo y volvió el 31 del mismo mes. Las fechas están expresadas en dias y fracciones.

ALTONA.		PULKOWA.	
$t = 24^d.94$.....	$c = -1^h\,14^m\,39^s.92$	$t' = 19^d.89$.....	$c' = +6^m\,38^s.10$
$T = 26.45$.....	$C = -1\;14\;36.77$	$T' = 31.00$.....	$C' = +7\;\;9.58$

Para calcular la variacion del cronómetro durante el viaje, se tiene:

$C - c = +\;3^s.15$	$T - t = +\;1^d.51$
$-(C' - c') = -31.48$	$-(T' - t') = -11.11$
Numerador $= -28^s.33$	Denominador $= -\;9^d.60$

$$v = \frac{28.33}{9.60} = +2^s.951$$

Con esta variacion diaria calculemos la diferencia de meridianos por los datos que corresponden á cada viaje.

$c' = +0^h\;6^m\;38^s.10$	$C' = +0^h\;7^m\;9^s.58$
$c = -1\;14\;39.92$	$C = -1\;14\;36.77$
$c' - c = 1\;21\;18.02$	$C' - C = 1\;21\;46.35$
$-v\,(t' - t) = +\;14.90$	$v\,(T - T') = -13.43$
$\lambda = 1^h\,21^m\,32^s.92$	$\lambda = 1^h\,21^m\,32^s.92$

De este modo se hicieron 17 viajes entre Altona y Pulkowa, y el resultado final obtenido por 68 cronómetros que se emplearon en la expedicion, fué $\lambda = 1^h\,21^m\,32^s.50$.

La expedicion cronométrica mas extensa de que tengo noticia es la emprendida desde 1844 entre Boston y Liverpool, con el fin de determinar la longitud del Observatorio americano de Cambridge respecto del de Greenwich. En esta expedicion, continuada por muchos años, excede de 400 el número de cronómetros que se han trasportado de un puerto al otro en los viajes periódicos de los vapores de la línea de Cunard. Luego que llega el buque á Liverpool ó á Boston, se desembarcan los cronómetros y se comparan con el péndulo del Observatorio de Liverpool ó con el de Cambridge, cerca de

Boston. Los principales resultados son los que siguen. En 1848 por el trasporte de 116 cronómetros en 34 viajes se obtuvo $4^h\ 44^m\ 30^s.50$ por longitud de Cambridge al Oeste de Greenwich. En 1849 se hicieron otras 87 comparaciones, y el resultado obtenido por 373 cronómetros fué $4^h\ 44^m\ 30^s.92$. El promedio calculado por Mr. Bond, valiéndose de 175 cronómetros de su confianza, es $4^h\ 44^m\ 30^s.10$. El resultado de los viajes de 1855 da $4^h\ 44^m\ 31^s.89$. Por último, el valor final adoptado es $4^h\ 44^m\ 30^s.66$, que segun me escribió Mr. Bond, es el mas digno de confianza. Recientemente y bajo la direccion del Dr. Gould acaba de hacerse otra determinacion de la longitud de Cambridge, por medio del cable telegráfico trasatlántico, siendo $4^h\ 44^m\ 30^s.85$ el resultado.

Los valores de las correcciones c, c', C' y C que entran en las fórmulas (3) y (4) se determinan, segun dije al principio, ó por observaciones directas ejecutadas poco ántes de partir de cada estacion, é inmediatamente despues de llegar, ó bien comparando el cronómetro que puede llamarse móvil, con los cronómetros ó pendulos establecidos en ambas estaciones y préviamente arreglados á sus respectivos meridianos. El primer procedimiento es indudablemente el mas practicable, atendidas las circunstancias en que por lo general se encuentra un viajero, al ménos cuando no cuenta mas que con sus propios recursos; pero es evidente que nunca proporciona tan buenos resultados como el segundo. Sin embargo, uno ó dos buenos cronómetros trasportados con las precauciones necesarias para asegurar la regularidad de su marcha, y haciendo por lo ménos un doble viaje, me parece que pueden proporcionar resultados muy útiles para nuestra naciente Geografía. Seria de desearse ciertamente que siquiera las principales poblaciones de los Estados se fijaran de esa manera ó por el método de señales luminosas, respecto de sus capitales; pues enlazadas la mayor parte de estas con la de la República por medio de las extensas líneas telegráficas que hoy tenemos, se reunirian en breve muy buenos datos para la formacion de una carta general.

A falta de telégrafo, la determinacion de la diferencia de longitud de dos puntos importantes debe hacerse como se ha visto en el ejemplo ántes citado, referente á la expedicion cronométrica entre Pulkowa y Altona. La operacion ejecutada así, demanda el concurso de tres observadores por lo ménos, á saber: los estacionados en los puntos

que se trate de comparar y el que trasporta los cronómetros. Los primeros, provistos de instrumentos meridianos, deben determinar las correcciones de sus respectivos péndulos, de acuerdo con las prescripciones que varias veces he tenido ocasion de indicar, como son: invertir con frecuencia el telescopio, valerse solo de estrellas fundamentales, y de las mismas si es posible, medir su ecuacion personal, &c., &c. En cuanto al observador viajero, deberá tener cuidado de comparar diariamente todos los cronómetros entre sí, así como con los péndulos al llegar á cada estacion y al partir de ella, á fin de deducir la correccion que corresponda á cada uno. Las comparaciones deberán hacerse por el método de coincidencia de sonidos, tal como se explicó en el núm. 303, con el objeto de evitar el error originado por la apreciacion de las fracciones de segundo; y para conseguirlo sin gran trabajo, aun siendo muchos los cronómetros, conviene que el observador se sirva de un relox cuya variacion diaria sea muy diferente de las de aquellos.

Las precauciones generales para el manejo de los cronómetros, aun cuando estén estacionarios, son las siguientes: 1ª Debe dárseles cuerda á intervalos regulares, de modo que cuando, por ejemplo, se les dé diariamente, se procurará que sea siempre á la misma hora con poca diferencia. Algunos cronómetros marinos tienen cuerda para 8 ó mas dias; pero en todos casos creo mas conveniente darles solo la necesaria para 24^h, á fin de que sea siempre la misma la parte del resorte que obra como motor. 2ª Al darles cuerda debe procurarse que el cronómetro permanezca inmóvil y que solo la llave sea la que gire. 3ª Todo movimiento brusco, sobre todo si es circular, se evitará con el mayor esmero; y se procurará que el cronómetro conserve siempre la misma posicion, ya sea vertical ú horizontal, aunque esta última es la mas conveniente. 4ª Tambien se evitará que sufra cambios bruscos de temperatura; y por consiguiente nunca debe tenerse un cronómetro expuesto á corrientes de aire, ni mucho ménos á los rayos directos del sol. 5ª Cerca de un cronómetro nunca debe haber sustancias magnéticas, que influirian muchísimo en su marcha. 6ª Es tambien conveniente que un guarda-tiempo no esté parado, á fin de que los aceites conserven su fluidez y no estén expuestas sus piezas á oxidarse.

En cuanto á la mejor manera de trasportar los cronómetros, solo diré que aunque durante el viaje no se pueden cumplir por lo general

todas las prescripciones anteriores, debe escogerse cuidadosamente el medio de trasporte mas adecuado á las circunstancias especiales de cada caso y que mejor se avenga con las reglas ántes establecidas. En buenos caminos, un carruaje de muelles me parece bastante á propósito para la conduccion; pero en terrenos muy desiguales acaso sea preferible hacerlos conducir por hombres que viajen á pié.

La circunstancia que principalmente caracteriza á un buen guarda-tiempo, no es tanto la pequeñez de su variacion diaria, como la igualdad de esta variacion. Es sin duda conveniente que sea pequeña la marcha en la unidad de tiempo; pero se comprende que tal ventaja es muy secundaria respecto de la fundamental, que consiste en la uniformidad de la variacion; y por consiguiente esta es la que debe fijar de preferencia la atencion del astrónomo al hacer la eleccion de sus cronómetros.

Altazimut 12". J. & S. (EME. n°2)

Nivel circulo vertical .... 1 div. .. v = 1"

$$\frac{1}{2} nd = n \times \frac{1}{2} (o - e) v$$

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5
1	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.9	1.0	1.0
2	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.3	1.4	1.4	1.5	1.5
3	1.6	1.7	1.7	1.8	1.8	1.9	1.9	2.0	2.0	2.1
4	2.1	2.2	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6
5	2.7	2.7	2.8	2.8	2.9	2.9	3.0	3.0	3.1	3.2
6	3.2	3.3	3.3	3.4	3.4	3.5	3.5	3.6	3.6	3.7
7	3.7	3.8	3.9	3.9	4.0	4.0	4.1	4.1	4.2	4.2
8	4.3	4.3	4.4	4.4	4.5	4.5	4.6	4.7	4.7	4.8
9	4.8	4.9	4.9	5.0	5.0	5.1	5.1	5.2	5.2	5.3
10	5.4	5.4	5.5	5.5	5.6	5.6	5.7	5.7	5.8	5.8

$$\frac{1}{4} \left((o + o') - (e + e') \right) v$$

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2
1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5
2	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.8
3	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0
4	1.1	1.1	1.1	1.2	1.2	1.2	1.2	1.3	1.3	1.3
5	1.3	1.4	1.4	1.4	1.4	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6
6	1.6	1.6	1.7	1.7	1.7	1.7	1.8	1.8	1.8	1.8
7	1.9	1.9	1.9	2.0	2.0	2.0	2.0	2.1	2.1	2.1
8	2.1	2.2	2.2	2.2	2.2	2.3	2.3	2.3	2.4	2.4
9	2.4	2.4	2.5	2.5	2.5	2.5	2.6	2.6	2.6	2.6
10	2.7	2.7	2.7	2.8	2.8	2.8	2.8	2.9	2.9	2.9

Altazimut 12p F & S (EME n.° 2)

nivel montante... 1 div... $v =$ "

$\frac{1}{4}\left((o+o') - (e+e')\right) v$

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

$\frac{1}{60}\left((o+o') - (e+e')\right) v$

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Altazimut 12^{p} J & S. (EME n.° 2)

Altazimut F. & S. N°. 1.

Nivel circulo vertical .... 1 div... $v = 9''.6$

$$\frac{1}{2} nd = n \frac{1}{2} (o - e) v$$

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0	0.00	0.48	0.96	1.44	1.92	2.40	2.88	3.36	3.84	4.32
1	4.80	5.28	5.76	6.24	6.72	7.20	7.68	8.16	8.64	9.12
2	9.60	10.08	10.56	11.04	11.52	12.00	12.48	12.96	13.44	13.92
3	14.40	14.88	15.36							
4	19.20	19.68								
5	24.00									
6	28.80									
7	33.60									
8	38.40									
9	43.20									

$$\frac{1}{4} \left((o + o') - (e + e') \right) v$$

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0	0.00	0.24	0.48	0.72	0.96	1.20	1.44	1.68	1.92	2.16
1	2.40	2.64	2.88	3.12	3.36	3.60	3.84	4.08	4.32	4.56
2	4.80	5.04	5.28	5.52	5.76	6.00	6.24	6.48	6.72	6.96
3	7.20	7.44	7.68	7.92	8.16	8.40	8.64	8.88	9.12	9.36
4	9.60	9.84	10.08	10.32	10.56	10.80	11.04	11.28	11.52	11.76
5										
5	12.00	12.24	12.48	12.72	12.96	13.20	13.44	13.68	13.92	14.16
6	14.40	14.64	14.88	15.12	15.36	15.60	15.84	16.08	16.32	16.56
7	16.80	17.04	17.28	17.52	17.76	18.00	18.24	18.48	18.72	18.96
8	19.20	19.44	19.68	19.92	20.16	20.40	20.64	20.88	21.12	21.36
9	21.60	21.84	22.08	22.32	22.56	22.80	23.04	23.28	23.52	23.76

Altazimut F. & J. N°. 1.

nivel montante . . . 1 div. . . . v =

$$\frac{1}{4}\left((o+o')-(e+e')\right)v$$

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

$$\frac{1}{60}\left((o+o')-(e+e')\right)v$$

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

TABLAS.

TABLA I.—*Refracciones astronómicas.*

Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
00° 00′	— ∞		8° 00′	0.9144		16° 00′	1.2241	
„ 10	9.2303	301.1	„ 10	.9234	9.0	„ 10	.2287	4.6
„ 20	9.5315	176.1	„ 20	.9323	8.9	„ 20	.2334	4.7
„ 30	9.7076	124.9	„ 30	.9410	8.7	„ 30	.2380	4.6
„ 40	9.8325	96.9	„ 40	.9495	8.5	„ 40	.2426	4.6
„ 50	9.9294	79.1	„ 50	.9579	8.4	„ 50	.2472	4.6
1 00	0.0085	67.0	9 00	0.9663	8.4	17 00	1.2519	4.7
„ 10	.0755	58.0	„ 10	.9743	8.0	„ 10	.2564	4.5
„ 20	.1335	51.2	„ 20	.9823	8.0	„ 20	.2609	4.5
„ 30	.1847	45.7	„ 30	.9901	7.8	„ 30	.2653	4.4
„ 40	.2304	41.4	„ 40	0.9978	7.7	„ 40	.2697	4.4
„ 50	.2718	37.9	„ 50	1.0054	7.6	„ 50	.2740	4.3
2 00	0.3097	34.7	10 00	.0129	7.5	18 00	1.2784	4.4
„ 10	.3444	32.2	„ 10	.0201	7.2	„ 10	.2826	4.2
„ 20	.3766	30.1	„ 20	.0273	7.2	„ 20	.2868	4.2
„ 30	.4067	28.0	„ 30	.0344	7.1	„ 30	.2910	4.2
„ 40	.4347	26.3	„ 40	.0414	7.0	„ 40	.2952	4.2
„ 50	.4610	25.0	„ 50	.0483	6.9	„ 50	.2994	4.2
3 00	0.4860	23.5	11 00	1.0552	6.9	19 00	1.3036	3.9
„ 10	.5095	22.4	„ 10	.0618	6.6	„ 10	.3075	4.1
„ 20	.5319	21.1	„ 20	.0684	6.6	„ 20	.3116	4.1
„ 30	.5530	20.3	„ 30	.0750	6.6	„ 30	.3157	4.0
„ 40	.5733	19.3	„ 40	.0815	6.5	„ 40	.3197	4.0
„ 50	.5926	18.6	„ 50	.0879	6.4	„ 50	.3237	4.0
4 00	0.6112	17.8	12 00	1.0941	6.2	20 00	1.3277	3.8
„ 10	.6290	17.1	„ 10	.1003	6.2	„ 10	.3315	3.9
„ 20	.6461	16.5	„ 20	.1064	6.1	„ 20	.3354	3.9
„ 30	.6626	15.8	„ 30	.1124	6.0	„ 30	.3393	3.8
„ 40	.6784	15.3	„ 40	.1184	6.0	„ 40	.3431	3.8
„ 50	.6937	14.9	„ 50	.1242	5.8	„ 50	.3469	3.8
5 00	0.7086	14.2	13 00	1.1300	5.8	21 00	1.3507	3.7
„ 10	.7228	13.9	„ 10	.1357	5.7	„ 10	.3544	3.8
„ 20	.7367	13.5	„ 20	.1414	5.7	„ 20	.3582	3.7
„ 30	.7502	13.1	„ 30	.1469	5.5	„ 30	.3619	3.7
„ 40	.7633	12.7	„ 40	.1524	5.5	„ 40	.3656	3.7
„ 50	.7760	12.2	„ 50	.1578	5.4	„ 50	.3693	3.7
6 00	0.7882	12.0	14 00	1.1632	5.4	22 00	1.3729	3.6
„ 10	.8002	11.6	„ 10	.1686	5.4	„ 10	.3766	3.7
„ 20	.8118	11.4	„ 20	.1740	5.4	„ 20	.3802	3.6
„ 30	.8232	11.1	„ 30	.1793	5.3	„ 30	.3838	3.6
„ 40	.8343	10.8	„ 40	.1845	5.2	„ 40	.3874	3.6
„ 50	.8451	10.6	„ 50	.1897	5.2	„ 50	.3909	3.5
7 00	0.8557	10.2	15 00	1.1947	5.0	23 00	1.3945	3.6
„ 10	.8659	10.1	„ 10	.1998	5.1	„ 10	.3981	3.6
„ 20	.8760	9.9	„ 20	.2048	5.0	„ 20	.4015	3.4
„ 30	.8859	9.7	„ 30	.2098	5.0	„ 30	.4049	3.4
„ 40	.8956	9.5	„ 40	.2147	4.9	„ 40	.4084	3.5
„ 50	.9051	9.3	„ 50	.2195	4.8	„ 50	.4118	3.4
8 00	0.9144		16 00	1.2241	4.6	24 00	1.4151	3.3

TABLA I.—*Refracciones astronómicas.*

Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
24° 00′	1.4151	3.4	32° 00′	1.5622	2.8	40° 00′	1.6901	2.6
„ 10	.4185	3.4	„ 10	.5650	2.8	„ 10	.6927	2.5
„ 20	.4219	3.4	„ 20	.5678	2.9	„ 20	.6952	2.6
„ 30	.4253	3.3	„ 30	.5707	2.8	„ 30	.6978	2.6
„ 40	.4286	3.3	„ 40	.5735	2.7	„ 40	.7004	2.5
„ 50	.4319	3.3	„ 50	.5762	2.8	„ 50	.7029	2.6
25 00	1.4352	3.3	33 00	1.5790	2.8	41 00	1.7055	2.5
„ 10	.4385	3.3	„ 10	.5818	2.7	„ 10	.7080	2.6
„ 20	.4418	3.3	„ 20	.5845	2.8	„ 20	.7106	2.5
„ 30	.4451	3.2	„ 30	.5873	2.7	„ 30	.7131	2.5
„ 40	.4483	3.2	„ 40	.5900	2.7	„ 40	.7156	2.6
„ 50	.4515	3.2	„ 50	.5927	2.7	„ 50	.7182	2.5
26 00	1.4547	3.2	34 00	1.5954	2.7	42 00	1.7207	2.5
„ 10	.4579	3.2	„ 10	.5981	2.8	„ 10	.7232	2.5
„ 20	.4611	3.2	„ 20	.6009	2.7	„ 20	.7257	2.6
„ 30	.4643	3.1	„ 30	.6036	2.7	„ 30	.7283	2.5
„ 40	.4674	3.2	„ 40	.6063	2.7	„ 40	.7308	2.5
„ 50	.4706	3.0	„ 50	.6090	2.6	„ 50	.7333	2.5
27 00	1.4736	3.2	35 00	1.6116	2.7	43 00	1.7358	2.5
„ 10	.4768	3.1	„ 10	.6143	2.7	„ 10	.7383	2.6
„ 20	.4799	3.0	„ 20	.6170	2.7	„ 20	.7409	2.5
„ 30	.4829	3.1	„ 30	.6197	2.6	„ 30	.7434	2.5
„ 40	.4860	3.0	„ 40	.6223	2.7	„ 40	.7459	2.6
„ 50	.4890	3.1	„ 50	.6250	2.6	„ 50	.7485	2.5
28 00	1.4921	3.1	36 00	1.6276	2.7	44 00	1.7510	2.5
„ 10	.4952	3.0	„ 10	.6303	2.7	„ 10	.7535	2.5
„ 20	.4982	3.1	„ 20	.6330	2.6	„ 20	.7560	2.6
„ 30	.5013	3.0	„ 30	.6356	2.6	„ 30	.7586	2.5
„ 40	.5043	3.0	„ 40	.6382	2.6	„ 40	.7611	2.5
„ 50	.5073	2.9	„ 50	.6408	2.7	„ 50	.7636	2.5
29 00	1.5102	3.1	37 00	1.6435	2.6	45 00	1.76611	25.2
„ 10	.5133	2.9	„ 10	.6461	2.6	„ 10	.76863	25.2
„ 20	.5162	3.0	„ 20	.6487	2.6	„ 20	.77115	25.2
„ 30	.5192	2.9	„ 30	.6513	2.6	„ 30	.77367	25.2
„ 40	.5221	2.9	„ 40	.6539	2.6	„ 40	.77619	25.2
„ 50	.5250	2.9	„ 50	.6565	2.6	„ 50	.77871	25.2
30 00	1.5279	2.9	38 00	1.6591	2.6	46 00	1.78123	25.2
„ 10	.5308	2.9	„ 10	.6617	2.6	„ 10	.78375	25.3
„ 20	.5337	2.9	„ 20	.6643	2.6	„ 20	.78628	25.2
„ 30	.5366	2.9	„ 30	.6669	2.6	„ 30	.78880	25.2
„ 40	.5395	2.8	„ 40	.6695	2.5	„ 40	.79132	25.3
„ 50	.5423	2.9	„ 50	.6720	2.6	„ 50	.79385	25.2
31 00	1.5452	2.9	39 00	1.6746	2.6	47 00	1.79637	25.3
„ 10	.5481	2.9	„ 10	.6772	2.6	„ 10	.79890	25.3
„ 20	.5510	2.8	„ 20	.6798	2.6	„ 20	.80143	25.3
„ 30	.5538	2.8	„ 30	.6824	2.6	„ 30	.80396	25.3
„ 40	.5566	2.8	„ 40	.6850	2.6	„ 40	.80649	25.3
„ 50	.5594	2.8	„ 50	.6876	2.5	„ 50	.80902	25.3
32 00	1.5622		40 00	1.6901		48 00	1.81155	

TABLA I.—*Refracciones astronómicas.*

Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
48° 00′	1.81155	25.4	56° 00′	1.93653	27.1	64° 00′	2.07635	31.8
,, 10	.81409	25.4	,, 10	.93924	27.2	,, 10	.07953	32.0
,, 20	.81663	25.3	,, 20	.94196	27.3	,, 20	.08273	32.1
,, 30	.81916	25.4	,, 30	.94469	27.3	,, 30	.08594	32.3
,, 40	.82170	25.4	,, 40	.94742	27.4	,, 40	.08917	32.4
,, 50	.82424	25.4	,, 50	.95016	27.5	,, 50	.09241	32.6
49 00	1.82678	25.5	57 00	1.95291	27.5	65 00	2.09567	32.7
,, 10	.82933	25.5	,, 10	.95566	27.7	,, 10	.09894	33.0
,, 20	.83188	25.5	,, 20	.95843	27.7	,, 20	.10224	33.0
,, 30	.83443	25.5	,, 30	.96120	27.7	,, 30	.10554	33.2
,, 40	.83698	25.5	,, 40	.96397	27.9	,, 40	.10886	33.4
,, 50	.83953	25.5	,, 50	.96676	27.9	,, 50	.11220	33.5
50 00	1.84208	25.6	58 00	1.96955	28.0	66 00	2.11555	33.7
,, 10	.84464	25.7	,, 10	.97235	28.1	,, 10	.11892	33.9
,, 20	.84721	25.6	,, 20	.97516	28.1	,, 20	.12231	34.0
,, 30	.84977	25.7	,, 30	.97797	28.3	,, 30	.12571	34.2
,, 40	.85234	25.6	,, 40	.98080	28.2	,, 40	.12913	34.5
,, 50	.85490	25.7	,, 50	.98362	28.4	,, 50	.13258	34.5
51 00	1.85747	25.8	59 00	1.98646	28.5	67 00	2.13603	34.8
,, 10	.86005	25.9	,, 10	.98931	28.5	,, 10	.13951	34.9
,, 20	.86264	25.8	,, 20	.99216	28.7	,, 20	.14300	35.2
,, 30	.86522	25.9	,, 30	.99503	28.7	,, 30	.14652	35.4
,, 40	.86781	25.8	,, 40	1.99790	28.9	,, 40	.15006	35.5
,, 50	.87039	25.9	,, 50	2.00079	28.9	,, 50	.15361	35.8
52 00	1.87298	26.0	60 00	2.00368	29.0	68 00	2.15719	35.9
,, 10	.87558	26.1	,, 10	.00658	29.1	,, 10	.16078	36.2
,, 20	.87819	26.1	,, 20	.00949	29.2	,, 20	.16440	36.4
,, 30	.88080	26.1	,, 30	.01241	29.4	,, 30	.16804	36.7
,, 40	.88341	26.0	,, 40	.01535	29.4	,, 40	.17171	36.8
,, 50	.88601	26.2	,, 50	.01829	29.5	,, 50	.17539	37.1
53 00	1.88863	26.2	61 00	2.02124	29.6	69 00	2.17910	37.3
,, 10	.89125	26.2	,, 10	.02420	29.8	,, 10	.18283	37.5
,, 20	.89387	26.3	,, 20	.02718	29.8	,, 20	.18658	37.8
,, 30	.89650	26.3	,, 30	.03016	30.0	,, 30	.19036	38.1
,, 40	.89913	26.3	,, 40	.03316	30.1	,, 40	.19417	38.3
,, 50	.90176	26.4	,, 50	.03617	30.1	,, 50	.19800	38.5
54 00	1.90440	26.5	62 00	2.03918	30.3	70 00	2.20185	38.8
,, 10	.90705	26.5	,, 10	.04221	30.4	,, 10	.20573	39.0
,, 20	.90970	26.6	,, 20	.04525	30.5	,, 20	.20963	39.3
,, 30	.91236	26.6	,, 30	.04830	30.7	,, 30	.21356	39.6
,, 40	.91502	26.7	,, 40	.05137	30.8	,, 40	.21752	39.8
,, 50	.91769	26.7	,, 50	.05445	30.9	,, 50	.22150	40.2
55 00	1.92036	26.8	63 00	2.05754	31.0	71 00	2.22552	40.4
,, 10	.92304	26.9	,, 10	.06064	31.2	,, 10	.22956	40.7
,, 20	.92573	26.8	,, 20	.06376	31.2	,, 20	.23363	41.0
,, 30	.92841	27.1	,, 30	.06688	31.5	,, 30	.23773	41.3
,, 40	.93112	27.0	,, 40	.07003	31.5	,, 40	.24186	41.7
,, 50	.93383	27.1	,, 50	.07318	31.7	,, 50	.24603	41.9
56 00	1.93653		64 00	2.07635		72 00	2.25022	

TABLA I.—*Refracciones astronómicas.*

Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Dist. zenit. aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
72° 00′	2.25022	42.3	78° 00′	2.42867	59.6	84° 00′	2.70740	104.7
„ 10	.25445	42.5	„ 10	.43463	60.3	„ 10	.71787	106.9
„ 20	.25870	42.9	„ 20	.44066	61.1	„ 20	.72856	109.2
„ 30	.26299	43.3	„ 30	.44677	61.8	„ 30	.73948	111.5
„ 40	.26732	43.6	„ 40	.45295	62.6	„ 40	.75063	113.9
„ 50	.27168	44.0	„ 50	.45921	63.5	„ 50	.76202	116.5
73 00	2.27608	44.3	79 00	2.46556	64.2	85 00	2.77367	119.1
„ 10	.28051	44.7	„ 10	.47198	65.0	„ 10	.78558	121.9
„ 20	.28498	45.0	„ 20	.47848	65.9	„ 20	.79777	124.8
„ 30	.28948	45.4	„ 30	.48507	66.9	„ 30	.81025	127.7
„ 40	.29402	45.8	„ 40	.49176	67.7	„ 40	.82302	130.9
„ 50	.29860	46.2	„ 50	.49853	68.8	„ 50	.83611	134.0
74 00	2.30322	46.7	80 00	2.50541	69.6	86 00	2.84951	137.4
„ 10	.30789	47.0	„ 10	.51237	70.7	„ 10	.86325	141.0
„ 20	.31259	47.5	„ 20	.51944	71.6	„ 20	.87735	144.7
„ 30	.31734	47.9	„ 30	.52660	72.7	„ 30	.89182	148.4
„ 40	.32213	48.3	„ 40	.53387	73.8	„ 40	.90666	152.3
„ 50	.32696	48.8	„ 50	.54125	74.9	„ 50	.92189	156.5
75 00	2.33184	49.3	81 00	2.54874	75.9	87 00	2.93754	160.8
„ 10	.33677	49.7	„ 10	.55635	77.2	„ 10	.95362	165.4
„ 20	.34174	50.2	„ 20	.56407	78.5	„ 20	.97016	170.1
„ 30	.34676	50.7	„ 30	.57192	79.7	„ 30	2.98717	174.9
„ 40	.35183	51.2	„ 40	.57989	81.1	„ 40	3.00466	180.1
„ 50	.35695	51.7	„ 50	.58800	82.4	„ 50	.02267	185.5
76 00	2.36212	52.3	82 00	2.59624	83.8	88 00	3.04122	190.9
„ 10	.36735	52.8	„ 10	.60462	85.1	„ 10	.06031	196.7
„ 20	.37263	53.3	„ 20	.61313	86.6	„ 20	.07998	202.6
„ 30	.37796	53.8	„ 30	.62179	88.3	„ 30	.10024	208.9
„ 40	.38334	54.5	„ 40	.63062	89.9	„ 40	.12113	215.5
„ 50	.38879	55.1	„ 50	.63961	91.4	„ 50	.14268	222.1
77 00	2.39430	55.7	83 00	2.64875	93.1	89 00	3.16489	229.0
„ 10	.39987	56.3	„ 10	.65806	94.9	„ 10	.18779	236.1
„ 20	.40550	56.9	„ 20	.66755	96.7	„ 20	.21140	243.4
„ 30	.41119	57.6	„ 30	.67722	98.6	„ 30	.23574	250.9
„ 40	.41695	58.3	„ 40	.68708	100.6	„ 40	.26083	258.4
„ 50	.42278	58.9	„ 50	.69714	102.6	„ 50	.28667	266.7
78 00	2.42867		84 00	2.70740		90 00	3.31334	

TABLA II.—*Factores barométricos para la refraccion.*

Barómetro.	Log. b	Dif. por 0.001 m.	Barómetro.	Log. b	Dif. por 0.001 m.	Barómetro.	Log. b	Dif. por 0.001 m.
0m500	9.81702	86.4	0m590	9.88890	73.1	0m680	9.95056	63.6
.505	.82134	85.6	.595	.89256	72.8	.685	.95374	63.2
.510	.82562	84.6	.600	.89620	72.0	.690	.95690	62.8
.515	.82985	84.0	.605	.89980	71.6	.695	.96004	62.2
.520	.83405	83.2	.610	.90338	70.8	.700	.96315	61.8
.525	.83821	82.4	.615	.90692	70.4	.705	.96624	61.4
.530	.84233	81.4	.620	.91044	69.8	.710	.96931	61.0
.535	.84640	80.8	.625	.91393	69.2	.715	.97236	60.4
.540	.85044	80.0	.630	.91739	68.6	.720	.97538	60.0
.545	.85444	79.4	.635	.92082	68.2	.725	.97838	59.8
.550	.85841	78.6	.640	.92423	67.6	.730	.98137	59.2
.555	.86234	78.0	.645	.92761	67.0	.735	.98433	59.0
.560	.86624	77.2	.650	.93096	66.4	.740	.98728	58.4
.565	.87010	76.4	.655	.93428	66.2	.745	.99020	58.2
.570	.87392	76.0	.660	.93759	65.6	.750	.99311	57.6
.575	.87772	75.2	.665	.94087	65.0	.755	.99599	57.4
.580	.88148	74.6	.670	.94412	64.6	.760	9.99886	57.0
.585	.88521	73.8	.675	.94735	64.2	.765	0.00171	56.6
0.590	9.88890		0.680	9.95056		0.770	0.00454	

TABLA III.—*Factores termométricos para la refraccion.*

Termóm.º	Log. f	Dif.	Log. l	Dif.	Termóm.º	Log. f	Dif.	Log. l	Dif.
—10°	0.00156	8	0.03386	175	14°	9.99969	8	9.99353	160
9	.00148	8	.03211	175	15	.99961	8	.99193	160
8	.00140	7	.03036	174	16	.99953	8	.99033	159
7	.00133	8	.02862	174	17	.99945	7	.98874	158
6	.00125	8	.02688	173	18	.99938	8	.98716	158
5	.00117	8	.02515	172	19	.99930	8	.98558	157
4	.00109	8	.02343	172	20	.99922	8	.98401	157
3	.00101	7	.02171	171	21	.99914	8	.98244	156
2	.00094	8	.02000	170	22	.99906	7	.98088	155
—1	.00086	8	.01830	170	23	.99899	8	.97933	155
0	.00078	8	.01660	169	24	.99891	8	.97778	155
+1	.00070	8	.01491	168	25	.99883	8	.97623	154
2	.00062	7	.01323	168	26	.99875	8	.97469	153
3	.00055	8	.01155	167	27	.99867	7	.97316	153
4	.00047	8	.00988	166	28	.99860	8	.97163	152
5	.00039	8	.00822	166	29	.99852	8	.97011	152
6	.00031	8	.00656	165	30	.99844	8	.96859	151
7	.00023	7	.00491	164	31	.99836	8	.96708	151
8	.00016	8	.00327	164	32	.99828	7	.96557	150
9	.00008	8	.00163	163	33	.99821	8	.96407	150
10	0.00000	8	0.00000	163	34	.99813	8	.96257	149
11	9.99992	8	9.99837	162	35	.99805	8	.96108	148
12	.99984	7	.99675	161	36	.99797	8	.95960	148
13	.99977	8	.99514	161	37	.99789	7	.95812	148
14	9.99969		9.99353		38	9.99782		9.95664	

Para correspond.tes del sol 549 la form.a ε = A v tan φ − B v tan δ
Argumento T−T' intervalo de tiempo medio trascurrido entre las observ. á uno y otro lado del meridiano esto es AM y PM

$A = \frac{\theta}{15 \sin \theta}$

$B = \frac{\theta}{15 \tan \theta}$

$\theta = \frac{1}{2}(T-T')$

TABLA IV.—*Logaritmos de A y B*

Tiempo trascurrido.	1h		2h		3h		4h		5h	
	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*
0m	9.4072	9.4034	9.4109	9.3959	9.4172	9.3828	9.4260	9.3635	9.4374	9.3369
1	.4072	.4034	.4110	.3957	.4173	.3825	.4261	.3631	.4376	.3364
2	.4073	.4033	.4111	.3955	.4174	.3822	.4263	.3627	.4378	.3358
3	.4073	.4032	.4112	.3953	.4175	.3820	.4265	.3624	.4380	.3353
4	.4074	.4031	.4113	.3952	.4177	.3817	.4266	.3620	.4383	.3348
5	9.4074	9.4030	9.4113	9.3950	9.4178	9.3814	9.4268	9.3616	9.4385	9.3343
6	.4074	.4029	.4114	.3948	.4179	.3811	.4270	.3612	.4387	.3337
7	.4075	.4028	.4115	.3946	.4181	.3809	.4272	.3608	.4389	.3332
8	.4075	.4027	.4116	.3944	.4182	.3806	.4273	.3604	.4391	.3327
9	.4076	9.4026	.4117	.3943	.4183	.3803	.4275	.3600	.4393	.3321
10	9.4076	.4025	9.4118	9.3941	9.4184	9.3800	9.4277	9.3596	9.4396	9.3316
11	.4077	.4024	.4119	.3939	.4186	.3797	.4279	.3592	.4398	.3311
12	.4077	.4023	.4120	.3937	.4187	.3794	.4280	.3588	.4400	.3305
13	.4078	.4022	.4121	.3935	.4188	.3792	.4282	.3584	.4402	.3300
14	.4078	.4021	.4121	.3933	.4190	.3789	.4284	.3580	.4405	.3294
15	9.4079	9.4020	9.4122	9.3931	9.4191	9.3786	9.4286	9.3576	9.4407	9.3289
16	.4079	.4019	.4123	.3929	.4193	.3783	.4288	.3572	.4409	.3283
17	.4080	.4018	.4124	.3927	.4194	.3780	.4289	.3568	.4411	.3278
18	.4080	.4017	.4125	.3925	.4195	.3777	.4291	.3564	.4414	.3272
19	.4081	.4016	.4126	.3923	.4197	.3774	.4293	.3559	.4416	.3266
20	9.4081	9.4015	9.4127	9.3921	9.4198	9.3771	9.4295	9.3555	9.4418	9.3261
21	.4082	.4014	.4128	.3919	.4199	.3768	.4297	.3551	.4420	.3255
22	.4083	.4013	.4129	.3917	.4201	.3765	.4299	.3547	.4423	.3249
23	.4083	.4012	.4130	.3915	.4202	.3762	.4300	.3542	.4425	.3244
24	.4084	.4010	.4131	.3913	.4204	.3759	.4302	.3538	.4427	.3238
25	9.4084	9.4009	9.4132	9.3911	9.4205	9.3756	9.4304	9.3234	9.4430	9.3232
26	.4085	.4008	.4133	.3909	.4207	.3752	.4306	.3530	.4432	.3226
27	.4086	.4007	.4134	.3907	.4208	.3749	.4308	.3525	.4434	.3220
28	.4086	.4006	.4135	.3905	.4209	.3746	.4310	.3521	.4437	.3214
29	.4087	.4004	.4136	.3903	.4211	.3743	.4312	.3516	.4439	.3208
30	9.4087	9.4003	9.4137	9.3900	9.4212	9.3740	9.4314	9.3512	9.4441	9.3203
31	.4088	.4002	.4138	.3898	.4214	.3737	.4315	.3508	.4444	.3197
32	.4089	.4001	.4139	.3896	.4215	.3733	.4317	.3503	.4446	.3191
33	.4089	.3999	.4140	.3894	.4217	.3730	.4319	.3499	.4448	.3185
34	.4090	.3998	.4141	.3892	.4218	.3727	.4321	.3494	.4451	.3178
35	9.4091	9.3997	9.4142	9.3889	9.4220	9.3723	9.4323	9.3490	9.4453	9.3172
36	.4091	.3995	.4144	.3887	.4221	.3720	.4325	.3485	.4456	.3166
37	.4092	.3994	.4145	,3885	.4223	.3717	.4327	.3480	.4458	.3160
38	.4093	.3993	.4146	.3882	.4224	.3713	.4329	.3476	.4460	.3154
39	.4093	.3991	.4147	.3880	.4226	.3710	.4331	.3471	.4463	.3148
40	9.4094	9.3990	9.4148	9.3878	9.4227	9.3707	9.4333	9.3467	9.4465	9.3142
41	.4095	.3988	.4149	.3875	.4229	.3703	.4335	.3462	.4468	.3135
42	.4095	.3987	.4150	.3873	.4231	.3700	.4337	.3457	.4470	.3129
43	.4096	.3985	.4151	.3871	.4232	.3696	.4339	.3453	.4473	.3123
44	.4097	.3984	.4152	.3868	.4234	.3693	.4341	.3448	.4475	.3116
45	9.4097	9.3982	9.4154	9.3866	9.4235	9.3690	9.4343	9.3443	9.4477	9.3110
46	.4098	.3981	.4155	.3863	.4237	.3686	.4345	.3438	.4480	.3103
47	.4099	.3979	.4156	.3861	.4238	.3683	.4347	.3433	.4482	.3097
48	.4100	.3978	.4157	.3859	.4240	.3679	.4349	.3429	.4485	.3091
49	.4100	.3976	.4158	.3856	.4242	.3675	.4351	.3424	.4487	.3084
50	9.4101	9.3975	9.4159	9.3854	9.4243	9.3672	9.4353	9.3419	9.4490	9.3078
51	.4102	.3973	.4161	.3851	.4245	.3668	.4355	.3414	.4492	.3071
52	.4103	.3972	.4162	.3849	.4246	.3665	.4357	.3409	.4494	.3064
53	.4103	.3970	.4163	.3846	.4248	.3661	.4359	.3404	.4497	.3058
54	.4104	.3969	.4164	.3843	.4250	.3657	.4361	.3399	.4500	.3051
55	9.4105	9.8967	9.4165	9.3841	9.4251	9.3654	9.4363	9.3394	9.4503	9.3044
56	.4106	.8965	.4167	.3838	.4253	.3650	.4366	.3389	.4505	.3038
57	.4107	.8964	.4168	.3836	.4255	.3646	.4368	.3384	.4508	.3031
58	.4107	.8962	.4169	.3833	.4256	.3643	.4370	.3379	.4510	.3024
59	.4108	.8960	.4170	.3830	.4258	.3639	.4372	.3374	.4513	.3017
60	9.4109	9.8959	9.4172	9.3828	9.4260	9.3635	9.4374	9.3369	9.4515	9.3010

Cuando se hacen corresponder las observ.s de la tarde ó PM con los de la mañana sig.te ó AM tan θ es negativo y de consig.te tambien lo es B

TABLA IV.—*Logaritmos de A y B*

Tiempo trascurrido.	6h		7h		8h		9h		10h	
	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. A	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*
0m	9.4515	9.3010	9.4685	9.2530	9.4884	9.1874	9.5115	9.0943	9.5379	8.9509
1	.4518	.3003	.4688	.2520	.4888	.1861	.5119	.0925	.5384	.9478
2	.4521	.2996	.4691	.2511	.4892	.1848	.5123	.0906	.5389	.9447
3	.4523	.2989	.4694	.2502	.4895	.1835	.5127	.0887	.5393	.9416
4	.4526	.2982	.4697	.2492	.4899	.1822	.5132	.0867	.5398	.9384
5	9.4528	9.2975	9.4701	9.2483	9.4902	9.1809	9.5136	9.0848	9.5403	8.9352
6	.4531	.2968	.4704	.2473	.4906	.1796	.5140	.0828	.5408	.9320
7	.4534	.2961	.4707	.2463	.4910	.1782	.5144	.0809	.5412	.9287
8	.4536	.2954	.4710	.2454	.4913	.1769	.5148	.0789	.5417	.9254
9	.4539	.2947	.4713	.2444	.4917	.1756	.5153	.0769	.5422	.9221
10	9.4542	9.2940	9.4716	9.2434	9.4921	9.1742	9.5157	9.0749	9.5427	8.9187
11	.4544	.2932	.4719	.2425	.4924	.1728	.5161	.0729	.5432	.9153
12	.4547	.2925	.4723	.2415	.4928	.1715	.5165	.0708	.5436	.9118
13	.4550	.2918	.4726	.2405	.4932	.1701	.5169	.0688	.5441	.9083
14	.4552	.2911	.4729	.2395	.4935	.1687	.5174	.0667	.5446	.9048
15	9.4555	9 2903	9.4732	9.2385	9.4939	9.1673	9.5178	9.0646	9.5451	8.9013
16	.4558	.2896	.4735	.2375	.4943	.1659	.5182	.0625	.5456	.8977
17	.4561	.2888	.4738	.2365	.4946	.1645	.5186	.0604	.5461	.8940
18	.4563	.2881	.4742	.2355	.4950	.1630	.5191	.0583	.5466	.8903
19	.4566	.2873	.4745	.2344	.4954	.1616	.5195	.0561	.5470	.8866
20	9.4569	9.2866	9.4748	9.2334	9.4958	9.1602	9.5199	9.0540	9.5475	8.8829
21	.4572	.2858	.4751	.2324	.4961	.1587	.5204	.0517	.5480	.8791
22	.4574	.2850	.4755	.2313	.4965	.1573	.5208	.0496	.5485	.8752
23	.4577	.2843	.4758	.2303	.4969	.1558	.5212	.0474	.5490	.8713
24	.4580	.2835	.4761	.2292	.4973	.1543	.5217	.0452	.5495	.8674
25	9.4583	9.2827	9.4764	9.2282	9.4977	9.1528	9.5221	9.0429	9.5500	8.8634
26	.4585	.2819	.4768	.2271	.4980	.1513	.5225	.0406	.5505	.8594
27	.4588	.2812	.4771	.2261	.4984	.1498	.5230	.0383	.5510	.8553
28	.4591	.2804	.4774	.2250	.4988	.1483	.5234	.0360	.5515	.8512
29	.4594	.2796	.4778	.2239	.4992	.1468	.5238	.0337	.5520	.8470
30	9.4597	9.2788	9.4781	9.2228	9.4996	9.1453	9.5243	9.0314	9.5525	8.8427
31	.4600	.2780	.4784	.2217	.5000	.1437	.5247	.0290	.5530	.8384
32	.4602	.2772	.4788	.2206	.5003	.1422	.5252	.0266	.5535	.8341
33	.4605	.2764	.4791	.2195	.5007	.1406	.5256	.0242	.5540	.8297
34	.4608	.2756	.4794	.2184	.5011	.1390	.5261	.0218	.5545	.8253
35	9.4611	9.2747	9.4798	9.2173	9.5015	9.1375	9.5265	9.0194	9.5550	8.8208
36	.4614	.2739	.4801	.2162	.5019	.1359	.5269	.0169	.5555	.8162
37	.4617	.2731	.4804	.2151	.5023	.1343	.5274	.0144	.5560	.8115
38	.4620	.2723	.4808	.2140	.5027	.1327	.5278	.0119	.5565	.8068
39	.4622	.2714	.4811	.2128	.5031	.1310	.5283	.0094	.5570	.8020
40	9.4625	9.2706	9.4815	9.2117	9.5035	9.1294	9.5287	9.0069	9.5576	8.7972
41	.4628	.2698	.4818	.2105	.5038	.1278	.5292	.0043	.5581	.7923
42	.4631	.2689	.4821	.2094	.5042	.1261	.5296	.0017	.5586	.7873
43	.4634	.2681	.4825	.2082	.5046	.1244	.5301	8.9991	.5591	.7823
44	.4637	.2672	.4828	.2070	.5050	.1228	.5305	.9965	.5596	.7772
45	9.4640	9.2664	9.4832	9.2059	9.5054	9.1211	9.5310	8.9938	9.5601	8.7720
46	.4643	.2655	.4835	.2047	.5058	.1194	.5315	.9911	.5606	.7668
47	.4646	.2646	.4839	.2035	.5062	.1177	.5319	.9884	.5612	.7614
48	.4649	.2638	.4842	.2023	.5066	.1159	.5324	.9857	.5617	.7560
49	.4652	.2629	.4846	.2011	.5070	.1142	.5328	.9830	.5622	.7505
50	9.4655	9.2620	9.4849	9.1999	9.5074	9.1125	9.5333	8.9802	9.5627	8.7449
51	.4658	.2611	.4853	.1987	.5078	.1107	.5337	.9774	.5632	.7392
52	.4661	.2602	.4856	.1974	.5082	.1089	.5342	.9745	.5638	.7335
53	.4664	.2593	.4860	.1962	.5086	.1072	.5347	.9717	.5643	.7276
54	.4667	.2584	.4863	.1950	.5091	.1054	.5351	.9688	.5648	.7217
55	9.4670	9.2575	9.4867	9.1937	9.5095	9.1036	9.5356	8.9659	9.5654	8.7156
56	.4673	.2566	.4870	.1925	.5099	.1017	.5361	.9630	.5659	.7094
57	.4676	.2557	.4874	.1912	.5103	.0999	.5365	.9900	.5964	.7032
58	.4679	.2548	.4877	.1900	.5107	.0981	.5370	.9570	.5669	.6968
59	.4682	.2539	.4881	.1887	.5111	.0962	.5375	.9540	.5675	.6903
60	9.4685	9.2530	9.4884	9.1874	9.5115	9.0943	9.5379	8.9509	9.5680	8.6837

TABLA IV.—*Logaritmos de A y B*

Tiempo transcurrido	13h		14h		15h		16h		17h	
	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*
0m	9.6406	8.7563	9.6841	9.0971	9.7333	9.3162	9.7895	9.4884	9.8539	9.6383
1	.6412	.7641	.6848	.1014	.7342	.3194	.7905	.4911	.8550	.6407
2	.6419	.7718	.6856	.1057	.7351	.3225	.7915	.4637	.8562	.6431
3	.6426	.7794	.6864	.1099	.7360	.3256	.7925	.4963	.8573	.6455
4	.6433	.7868	.6872	.1141	.7369	.3287	.7935	.4990	.8585	.6478
5	9.6440	8.7942	9.6879	9.1183	9.7378	9.3319	9.7945	9.5016	9.8597	9.6502
6	.6447	.8015	.6887	.1224	.7386	.3350	.7955	.5042	.8608	.6526
7	.6454	.8087	.6895	.1265	.7395	.3380	.7965	.5068	.8620	.6550
8	.6461	.8158	.6903	.1306	.7404	.3411	.7975	.5094	.8632	.6573
9	.6467	.8227	.6911	.1347	.7415	.2442	.7986	.5120	.8644	.6597
10	9.6474	8.8296	9.6919	9.1387	9.7422	9.3472	9.7996	9.5146	9.8655	9.6621
11	.6481	.8364	.6926	.1428	.7431	.3503	.8006	.5171	.8667	.6644
12	.6488	.8432	.6934	.1468	.7440	.3533	.8016	.5197	.8679	.6668
13	.6495	.8498	.6942	.1507	.7449	.3563	.8027	.5223	.8691	.6691
14	.6502	.8564	.6950	.1547	.7458	.3593	.8037	.5248	.8703	.6715
15	9.6509	8.8628	9.6958	9.1586	9.7467	9.3623	9.8047	9.5274	9.8715	9.6738
16	.6516	.8692	.6966	.1625	.7476	.3653	.8058	.5300	.8727	.6762
17	.6523	.8756	.6974	.1664	.7485	.3683	.8068	.5325	.8739	.6785
18	.6530	.8818	.6982	.1703	.7494	.3713	.8078	.5351	.8751	.6809
19	.6538	.8880	.6990	.1741	.7503	.3742	.8089	.5376	.8763	.6832
20	9.6545	8.8941	9.6998	9.1779	9.7512	9.3772	9.8099	9.5401	9.8775	9.6856
21	.6552	.9002	.7006	.1817	.7522	.3801	.8110	.5427	.8787	.6879
22	.6559	.9062	.7014	.1855	.7530	.3831	.8120	.5452	.8799	.6903
23	.6566	.9121	.7022	.1893	.7541	.3860	.8131	.5477	.8812	.6926
24	.6573	.9180	.7030	.1930	.7549	.3889	.8141	.5502	.8824	.6949
25	9.6580	8.9238	9.7038	9.1967	9.7558	9.3918	9.8152	9.5528	9.8836	9.6973
26	.6588	.9295	.7047	.2004	.7568	.3947	.8162	.5553	.8848	.6996
27	.6595	.9352	.7055	.2041	.7577	.3676	.8173	.5578	.8861	.7019
28	.6602	.9408	.7063	.2078	.7586	.4005	.8184	.5603	.8873	.7043
29	.6609	.9464	.7071	.2114	.7595	.4033	.8194	.5628	.8885	.7066
30	9.6616	8.9519	9.7079	9.2150	9.7605	9.4062	9.8205	9.5653	9.8898	9.7089
31	.6624	,9573	.7088	.2186	.7614	.4090	.8216	.5677	.8910	.7112
32	.6631	.9627	.7096	.2222	.7624	.4119	.8227	.5702	.8923	.7136
33	.6638	.9681	.7104	.2258	.7633	.4147	.8237	.5727	.8935	.7159
34	.6645	.9734	.7112	.2293	.7642	.4175	.8248	.5752	.8948	.7182
35	9.6653	8.9787	9.7121	9.2329	9.7652	9.4204	9.8258	9.5777	9.8961	9.7205
36	.6660	.9839	.7129	.2364	.7661	.4232	.8270	.5801	.8973	.7228
37	.6667	.9891	.7137	.2399	.7671	.4260	.8281	.5826	.8986	.7251
38	·6675	.9942	.7146	.2434	.7680	.4288	.8292	.5850	.8999	.7275
39	.6682	.9993	.7154	.2468	.7690	.4316	.8303	.5875	.9011	.7298
40	9.6690	9.0043	9.7162	9.2503	9.7699	9.4343	9.8314	9.5900	9.9024	9.7321
41	.6697	.0093	.7171	.2537	.7709	.4371	.8325	.5924	.9037	.7344
42	.6704	.0142	.7179	.2571	.7718	.4399	.8336	.5948	.9050	.7367
43	.6712	.0191	.7187	.2605	.7728	.4426	.8347	.5973	.9063	.7390
44	.6719	.0240	.7196	.2639	.7738	.4454	.8358	.5997	.9075	.7413
45	9.6727	9.0288	9.7204	9.2673	9.7747	9.4481	9.8369	9.6022	9.9088	9.7436
46	.6734	.0336	.7213	.2706	.7757	.4509	.8380	.6046	.9101	.7459
47	.5742	.0384	.7221	.2740	.7767	.4536	.8391	.6070	.9114	.7482
48	.6749	.0431	.7230	.2773	.7776	.4563	.8402	.6094	.9127	.7505
49	.6757	.0478	.7238	.2806	.7786	.4590	.8414	.6119	.9140	.7529
50	9.6764	9.0524	9.7247	9.2839	9.7796	9.4617	9.8424	9.6143	9.9154	9.7552
51	.6772	.0570	.7256	.2872	.7806	.4644	.8436	.6167	.9167	.7575
52	.6779	.0616	.7264	.2905	.7815	.4671	.8447	.6191	.9180	.7598
53	.6787	.0662	.7273	.2937	.7825	.4698	.8459	.6215	.9193	.7621
54	.6795	.0707	.7281	.2970	.7835	.4725	.8470	.6239	.9206	.7644
55	9.6802	9.0752	6.7290	9.3002	9.7845	9.4752	9.8481	9.6263	9.9220	9.7667
56	.6810	.0796	,7299	.3034	.7855	.4778	.8493	.6287	.9233	.7690
57	.6818	.0840	.7307	.3066	.7865	.4805	.8504	.6311	.9246	.7713
58	.6825	.0884	.7316	.3098	.7875	.4831	.8516	.6335	.9260	.7736
59	.6833	.0928	.7324	.3130	.7885	.4858	.8527	.6359	.9273	.7759
60	9.6841	9.0971	9.7333	9.3162	9.7895	9.4884	9.8539	9.6383	9.9287	9.7782

TABLA IV.—*Logaritmos de A y B*

Tiempo trascurrido.	18h		19h		20h		21h		22h	
	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*	Log. *B*	Log. A	Log. *B*
0m	9.9287	9.7782	0.0172	9.9167	0.1249	0.0625	0.2623	0.2279	0.4523	0.4372
1	.9300	.7804	.0188	.9190	.1269	.0650	.2649	.2309	.4562	.4414
2	.9314	.7827	.0204	.9213	.1290	.0676	.2676	.2339	.4601	.4455
3	.9327	.7850	.0221	.9237	.1310	.0701	.2702	.2370	.4640	.4497
4	.9341	.7873	.0237	.9260	.1330	.0727	.2729	.2401	.4680	.4540
5	9.9355	9.7896	0.0253	9.9284	0.1351	0.0753	0.2756	0.2431	0.4720	0.4582
6	.9368	.7919	.0270	.9307	.1371	.0779	.2783	.2462	.4761	.4625
7	.9382	.7942	.0286	.9331	.1392	.0805	.2810	.2493	.4801	.4668
8	.9396	.7965	.0303	.9355	.1412	.0830	.2838	.2524	.4842	.4711
9	.9410	.7988	.0319	.9378	.1433	.0856	.2865	.2556	.4884	.4755
10	9.9424	9.8011	0.0336	9.9402	0.1454	0.0882	0.2893	0.2587	0.4926	0.4799
11	.9437	.8034	.0353	.9426	.1475	.0909	.2921	.2619	.4968	.4844
12	.9451	.8057	.0370	.9449	.1496	.0935	.2949	.2650	.5010	.4889
13	.9465	.8080	.0386	.9473	.1517	.0961	.2977	.2682	.5053	.4934
14	.9479	.8103	.0403	.9497	.1538	.0987	.3005	.2714	.5097	.4980
15	9.9493	9.8126	0.0420	9.9520	0.1559	0.1013	0.3034	0.2746	0.5140	0.5026
16	.9508	.8149	.0437	.9544	.1581	.1040	.3063	.2778	.5184	.5072
17	.9522	.8172	.0454	.9568	.1602	.1066	.3091	.2811	.5229	.5118
18	.9536	.8195	.0472	.9592	.1623	.1093	.3120	.2843	.5274	.5165
19	.9550	.8218	.0489	.9616	.1645	.1119	.3150	.2876	.5319	.5213
20	9.9564	9.8241	0.0506	9.9640	0.1667	0.1146	0.3179	0.2909	0.5365	0.5261
21	.9579	.8264	.0523	.9664	.1689	.1173	.3208	.2942	.5411	.5309
22	.9593	.8287	.0541	.9687	.1711	.1200	.3238	.2975	.5458	.5358
23	.9607	.8310	.0558	.9711	.1733	.1226	.3268	.3008	.5505	.5407
24	.9622	.8333	.0576	.9735	.1755	.1253	.3298	.3041	.5553	.5457
25	9.9636	9.8356	0.0593	9.9760	0.1777	0.1280	0.3328	0.3075	0.5601	0.5507
26	.9651	.8379	.0611	.9784	.1799	.1308	.3359	.3109	.5649	.5557
27	.9665	.8402	.0628	.9808	.1821	.1335	.3389	.3143	.5698	.5608
28	.9680	.8425	.0646	.9832	.1844	.1362	.3420	.3177	.5748	.5660
29	.9695	.8448	.0664	.9856	.1867	.1389	.3451	.3211	.5798	.5712
30	9.9709	9.8471	0.0682	9.9880	0.1889	0.1417	0.3482	0.3245	0.5848	0.5764
31	.9724	.8494	.0700	.9904	.1912	.1444	.3514	.3280	.5899	.5817
32	.9739	.8517	.0718	.9929	.1935	.1472	.3545	.3315	.5951	.5871
33	.9754	.8540	.0736	.9953	.1958	.1499	.3577	.3350	.6003	.5925
34	.9769	.8563	.0754	.9977	.1981	.1527	.3609	.3385	.6056	.5979
35	9.9784	9.8586	0.0772	0.0002	0.2004	0.1555	0.3641	0.3420	0.6110	0.6034
36	.9798	.8609	.0790	.0026	.2028	.1582	.3674	.3456	.6164	.6090
37	.9813	.8632	.0809	.0051	.2051	.1610	.3706	.3491	.6218	.6147
38	.9829	.8655	.0827	.0075	.2075	.1638	.3739	.3527	.6273	.6204
39	.9844	.8678	.0845	.0100	.2098	.1667	.3772	.3563	.6329	.6261
40	9.9859	9.8701	0.0864	0.0124	0.2122	0.1695	0.3805	0.3599	0.6386	0.6319
41	.9874	.8724	.0883	.0149	.2146	.1723	.3839	.3636	.6443	.6378
42	.9889	.8748	.0901	.0173	.2170	.1751	.3873	.3673	.6501	.6438
43	.9904	.8771	.0920	.0198	.2194	.1780	.3907	.3710	.6560	.6498
44	.9920	.8794	.0939	.0223	.2218	.1808	.3941	.3747	.6619	.6559
45	9.9935	9.8817	0.0958	0.0248	0.2243	0.1837	0.3975	0.3784	0.6679	0.6621
46	.9951	.8840	.0976	.0272	.2267	.1866	.4010	.3822	.6740	.6684
47	.9966	.8863	.0995	.0297	.2292	.1895	.4045	.3859	.6802	.6747
48	.9982	.8887	.1015	.0322	.2316	.1924	.4080	.3897	.6865	.6811
49	.9998	.8910	.1034	.0347	.2341	.1953	.4115	.3936	.6928	.6876
50	0.0013	9.8933	0.1053	0.0372	0.2366	0.1982	0.4151	0.3974	0.6993	0.6942
51	.0029	.8956	.1072	.0397	.2391	.2011	.4187	.4013	.7058	.7008
52	.0044	.8980	.1092	.0422	.2416	.2040	.4223	.4052	.7124	.7076
53	.0060	.9003	.1111	.0447	.2442	.2070	.4260	.4091	.7191	.7144
54	.0076	.9026	.1131	.0473	.2467	.2099	.4297	.4130	.7259	.7214
55	0.0092	9.9050	0.1150	0.0498	0.2493	0.2129	0.4334	0.4170	0.7328	0.7284
56	.0108	.9073	.1170	.0523	.2518	.2159	.4371	.4210	.7398	.7355
57	.0124	.9096	.1190	.0548	.2544	.2189	.4408	.4250	.7469	.7428
58	.0140	.9120	.1209	.0574	.2570	.2219	.4446	.4291	.7541	.7501
59	.0156	.9143	.1229	.0599	.2596	.2249	.4485	.4331	.7615	.7576
60	0.0172	9.9167	0.1249	0.0625	0.2623	0.2279	0.4523	0.4372	0.7689	0.7652

TABLA V.—*Reduccion al meridiano.*

$$m = \frac{2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} h}{\text{sen. } 1''}$$

h	0^m	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m	8^m	9^m	10^m
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0^s	0.00	1.96	7.85	17.67	31.42	49.09	70.68	96.20	125.65	159.02	196.32
1	0.00	2.03	7.98	17.87	31.68	49.41	71.07	96.66	126.17	159.61	196.97
2	0.00	2.10	8.12	18.07	31.94	49.74	71.47	97.12	126.70	160.20	197.63
3	0.00	2.16	8.25	18.27	32.20	50.07	71.86	97.58	127.22	160.80	198.28
4	0.01	2.23	8.39	18.47	32.47	50.40	72.26	98.04	127.75	161.39	198.94
5	0.01	2.31	8.52	18.67	32.74	50.73	72.66	98.50	128.28	161.98	199.60
6	0.02	2.38	8.66	18.87	33.01	51.07	73.06	98.97	128.81	162.58	200.26
7	0.02	2.45	8.80	19.07	33.27	51.40	73.46	99.43	129.34	163.17	200.92
8	0.03	2.52	8.94	19.28	33.54	51.74	73.86	99.90	129.87	163.77	201.59
9	0.04	2.60	9.08	19.48	33.81	52 07	74.26	100.37	130.40	164.37	202.25
10	0.05	2.67	9.22	19.69	34.09	52.41	74.66	100.84	130.94	164.97	202.92
11	0.06	2.75	9.36	19.90	34.36	52.75	75.06	101.31	131.47	165.57	203 58
12	0.08	2.83	9.50	20.11	34.64	53.09	75.47	101.78	132.01	166.17	204.25
13	0.09	2.91	9.64	20 32	34.91	53.43	75.88	102.25	132.55	166.77	204.92
14	0.11	2.99	9.79	20.53	35.19	53.77	76.29	102.72	133.09	167.37	205.59
15	0.12	3.07	9.94	20.74	35.46	54.11	76.69	103.20	133.63	167.97	206.26
16	0.14	3.15	10.09	20.95	35.74	54.46	77.10	103.67	134.17	168.58	206.93
17	0.16	3.23	10.24	21.16	36.02	54.80	77.51	104.15	134.71	169.19	207.60
18	0.18	3.32	10.39	21.38	36.30	55.15	77.93	104.63	135.25	169.80	208.27
19	0.20	3.40	10.54	21.60	36.58	55.50	78.34	105.10	135.80	170.41	208.94
20	0.22	3.49	10.69	21.82	36.87	55.84	78.75	105.58	136.34	171.02	209.62
21	0.24	3.58	10.84	22.03	37.15	56.19	79.16	106.06	136.88	171.63	210.30
22	0.26	3.67	11.00	22.25	37.44	56.55	79.58	106.55	137.43	172.24	210.98
23	0.28	3.76	11.15	22.47	37.72	56.90	80.00	107.03	137.98	172 85	211.66
24	0.31	3.85	11.31	22.70	38.01	57.25	80.42	107.51	138.53	173.47	212.34
25	0.34	3.94	11.47	22.92	38.30	57.60	80.84	107.99	139.08	174.08	213.02
26	0.37	4.03	11.63	23.14	38.59	57.96	81.26	108.48	139.63	174.70	213.70
27	0.40	4.12	11.79	23.37	38.88	58.32	81.68	108.97	140.18	175.32	214.38
28	0.43	4.22	11.95	23 60	39.17	58.68	82.10	109.46	140.74	175.94	215.07
29	0.46	4.32	12.11	23.82	39.46	59.03	82.52	109.95	141.29	176.56	215.75
30	0.49	4.42	12.27	24.05	39.76	59.40	82.95	110.44	141.85	177.18	216.44
31	0.52	4.52	12.43	24.28	40.05	59.75	83.38	110.93	142.40	177.80	217.12
32	0.56	4.62	12.60	24.51	40.35	60.11	83.81	111.43	142.96	178.43	217.81
33	0.59	4.72	12.76	24.74	40.65	60.47	84.23	111.92	143.52	179.05	218.50
34	0.63	4.82	12.93	24.98	40.95	60.84	84.66	112.41	144.08	179.68	219.19
35	0.67	4.92	13.10	25.21	41.25	61.20	85.09	112.90	144.64	180.30	219.88
36	0.71	5.03	13.27	25.45	41.55	61.57	85.52	113.40	145.20	180.93	220.58
37	0.75	5.13	13.44	25.68	41.85	61.94	85.95	113.90	145.76	181.56	221.27
38	0.79	5.24	13.62	25.92	42.15	62.31	86.39	114.40	146.33	182.19	221.97
39	0.83	5.34	13.79	26.16	42.45	62.68	86.82	114.90	146.89	182.82	222.66
40	0.87	5.45	13.96	26.40	42.76	63.05	87.26	115.40	147.46	183.46	223.36
41	0 91	5.56	14.13	26.64	43.06	63.42	87.70	115.90	148.03	184.09	224.06
42	0.96	5.67	14.31	26.88	43.37	63.79	88.14	116.40	148.60	184.72	224.76
43	1.01	5.78	14.49	27.12	43.68	64.16	88.57	116.90	149.17	185.35	225.46
44	1.06	5.90	14.67	27.37	43.99	64.54	89.01	117.41	149.74	185.99	226.16
45	1.10	6.01	14.85	27.61	44.30	64.91	89.45	117.92	150.31	186.63	226.86
46	1.15	6.13	15.03	27.86	44.61	65.29	89.89	118.43	150.88	187.27	227.57
47	1 20	6.24	15 21	28.10	44.92	65.67	90.33	118.94	151.45	187.91	228.27
48	1.26	6.36	15.39	28.35	45.24	66.05	90.78	119.45	152.03	188.55	228.98
49	1.31	6.48	15.57	28.60	45.55	66.43	91.23	119.96	152.61	189.19	229.68
50	1.36	6.60	15.76	28.85	45.87	66.81	91.68	120.47	153.19	189.83	230.39
51	1.42	6.72	15.95	29.10	46.18	67.19	92.12	120.98	153.77	190.47	231.10
52	1.48	6 84	16.14	29.36	46.50	67.58	92.57	121.49	154.35	191.12	231.81
53	1.53	6.96	16.32	29.61	46.82	67.96	93.02	122 01	154.93	191.76	232.52
54	1.59	7.09	16.51	29.86	47.14	68.35	93.47	122.53	155.51	192.41	233.24
55	1.65	7.21	16.70	30.12	47.46	68.73	93.92	123.05	156.09	193.06	233.95
56	1.71	7.34	16.89	30.38	47.79	69.12	94.38	123.57	156.67	193.71	234.67
57	1.77	7.46	17.08	30.64	48.11	69 51	94.83	124.09	157.25	194 36	235.38
58	1.83	7.60	17.28	30.90	48.43	69.90	95.29	124.61	157.84	195.01	236.10
59	1.89	7.72	17.47	31.16	48.76	70.29	95.74	125.13	158.43	195.66	236.82

TABLA V.—*Reduccion al meridiano.*

$$m = \frac{2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} h}{\text{sen. } 1''}$$

h	11^m	12^m	13^m	14^m	15^m	16^m	17^m	18^m	19^m	20^m	21^m
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0^s	237.54	282.68	331.74	384.74	441.63	502.46	567.2	635.9	708.4	784.9	865.3
1	238.26	283.47	332.59	385.65	442.62	503.50	568.3	637.0	709.7	786.2	866.6
2	238.98	284.26	333.44	386.56	443.60	504.55	569.4	638.2	710.9	787.5	868.0
3	239.70	285.04	334.29	387.48	444.58	505.60	570.5	639.4	712.1	788.8	869.4
4	240.42	285.83	335.15	388.40	445.56	506.65	571.6	640.6	713.4	790.1	870.8
5	241.14	286.62	336.00	389.32	446.55	507.70	572.8	641.7	714.6	791.4	872.1
6	241.87	287.41	336.86	390.24	447.54	508.76	573 9	642.9	715.9	792.7	873.5
7	242.60	288.20	337.72	391.16	448.53	509.81	575.0	644.1	717.1	794.0	874.9
8	243.33	289.00	338.58	392.09	449.51	510.86	576.1	645.3	718.4	795.4	876.3
9	244.06	289.79	339.44	393.01	450.50	511.92	577.2	646,5	719,6	796.7	877.6
10	244.79	290.58	340.30	393.94	451.50	512.98	578.4	647.7	720,9	798.0	879.0
11	245.52	291.38	341.16	394.86	452.49	514.03	579.5	648.9	722,1	799.3	880.4
12	246.25	292.18	342.02	395.79	453.48	515.09	580.6	650.0	723.4	800.7	881.8
13	246.98	292.98	342.88	396.72	454.48	516.15	581.7	651.2	724,6	802.0	883.2
14	247.72	293.78	343.75	397.65	455.47	517.21	582.9	652.4	725,9	803.3	884.6
15	248.45	294.58	344.62	398·58	456.47	518.27	584.0	653.6	727,2	804.6	886.0
16	249.19	295.38	345.49	399.52	457.47	519.34	585.1	654.8	728.4	806.0	887.4
17	249.93	296.18	346·36	400.45	458.47	520.40	586.2	656.0	729,7	807.3	888.8
18	250.67	296.99	347.23	401.38	459.47	521.47	587.4	657.2	730,9	808.6	890.2
19	251.41	297.79	348.10	402.32	460.47	522.53	588.5	658.4	732,2	809.9	891.6
20	252.15	298.60	348.97	403.26	461.47	523.60	589.6	659.6	733,5	811.3	893.0
21	252.89	299.40	349.84	404.20	462.48	524.67	590.8	660.8	734,7	812.6	894.4
22	253.63	300.21	350.71	405.14	463.48	525.74	591.9	662.0	736,0	813.9	895.8
23	254.37	301.02	351.58	406 08	464.48	526.81	593.0	663.2	737,3	815.2	897.2
24	255.12	301.83	352.46	407.02	465.49	527.89	594.2	664,4	738,5	816.6	898.6
25	255.87	302.64	353.34	407.96	466.50	528.96	595.3	665.6	739.8	817,9	900.0
26	256.62	303.46	354 22	408·90	467.51	530·03	596 5	666.8	741,1	819,2	901.4
27	257.37	304.27	355.10	409.84	468.52	531.11	597.6	668,0	742,3	820,5	902.8
28	258.12	305.09	355.98	410.79	469.53	532.18	598.7	669,2	743,6	821,9	904.2
29	258.87	305.90	356.86	411.73	470.54	533.26	599.9	670,4	744,9	823,2	905.6
30	259.62	306.72	357.74	412.68	471.55	534.33	601,0	671.6	746,2	824.6	907.0
31	260.37	307.54	358·62	413.63	472.57	535·41	602.2	672.8	747,4	825.9	908.4
32	261.12	308.36	359·51	414.59	473.58	536 50	603.3	674.1	748,7	827.3	909.8
33	261.88	309.18	360·39	415.54	474.60	537.58	604.5	675.3	750,0	828.6	911.2
34	262.64	310.00	361.28	416.49	475.62	538.67	605.6	676.5	751,3	829,9	912.6
35	263.39	310.82	362.17	417.44	476.64	539.75	606.8	677.7	752,6	831.2	914.0
36	264 15	311.65	363·07	418.40	477.65	540.83	607.9	678.9	753,8	832.6	915.5
37	264.91	312.47	363.96	419,35	478.67	541.91	609.1	680.1	755,1	833.9	916.9
38	265.68	313.30	364.85	420.31	479.70	543.00	610.2	681.3	756,4	835.3	918.3
39	266.44	314.12	365.75	421.27	480.72	544.09	611.4	682,6	757,7	836.6	919.7
40	267.20	314.95	366.64	422.23	481.74	545.18	612,5	683.8	759.0	838.0	921.1
41	267.96	315.78	367·53	423·19	482.77	546.27	613.7	685.0	760.2	839.3	922.5
42	268.73	316.61	368·42	424.15	483.79	547.36	614.8	686.2	761.5	840.7	923.9
43	269.49	317.44	369·31	425.11	484.82	548.45	616.0	687.4	762.8	842.0	925.3
44	270.26	318.27	370.21	426.07	485.85	549.55	617.2	688.7	764.1	843.4	926.8
45	271.02	319.10	371.11	427.04	486 88	550.64	618.3	689.9	765.4	844.7	928.2
46	271.79	319.94	372 01	428·01	487.91	551.73	619.5	691.1	766.7	846.1	929.6
47	272.56	320.78	372.91	428.97	488.94	552.83	620.6	692.4	768.0	847.5	931.0
48	273.34	321.62	373·82	429.93	489.97	553.93	621.8	693.6	769.3	848,9	932.4
49	274.11	322.45	374.72	430.90	491.01	555.03	623.0	694.8	770.6	850.2	933.8
50	274.88	323.29	375.62	431.87	492.05	556.13	624.1	696.0	771.9	851.6	935.2
51	275.68	324.13	376·52	432.84	493.08	557.24	625.3	697.3	773.1	852,9	936.6
52	276.43	324 97	377.43	433.82	494.12	558.34	626.5	698.5	774.5	854.3	938.1
53	277.20	325.81	378.34	434.79	495.15	559.44	627.6	699.7	775.7	855.7	939.5
54	277.98	326.66	379 26	435.76	496.19	560.55	628.8	701.0	777.1	857,1	940.9
55	278.76	327.50	380.17	436.73	497.23	561.65	630.0	702.2	778.4	858 4	942.3
56	279.55	328.35	381.08	437.71	498.28	562.76	631·2	703.5	779.7	859.8	943.8
57	280.33	329.19	381.99	438.69	499.32	563.87	632.3	704.7	781.0	861,1	945.2
58	281.12	330.04	382.90	439.67	500,37	564.98	633.5	705,9	782.3	862,5	946.6
59	281.90	330.89	383.82	440.65	501.41	566.08	634.7	707,1	783.6	863.9	948.1

Continuacion de la Tabla V – (Tomada de la "Astr. pract. Loomis - 1855"

Red. al merid. $m = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} h}{\operatorname{sen} 1''}$

h.	22m	23m	24m	25m	h.	22m	23m	24m	25m
	"	"	"	"	s	"	"	"	"
0	949.6	1037.8			30	993.2			
1	951.0	1039.3			31	994.7			
2	952.4	1040.8			32	996.2			
3	953.8	1042.3			33	997.6			
4	955.3	1043.8			34	999.1			
5	956.7	1045.3			35	1000.6			
6	958.2	1046.8			36	1002.1			
7	959.6	8.3			37	1003.5			
8	961.1	9.8			38	1005.0			
9	962.5	1051.3			39	1006.5			
10	963.9	1052.8			40	1008.0			
11	965.4	4.3			41	1009.4			
12	966.9	5.9			42	1010.9			
13	968.3	7.4			43	1012.4			
14	969.8	8.9			44	1013.9			
15	971.2	1060.4			45	1015.4			
16	972.7	2.0			46	1016.9			
17	974.1	3.5			47	1018.4			
18	975.5	5.0			48	1019.9			
19	977.0	6.5			49	1021.4			
20	978.5	1068.1			50	1022.8			
21	979.9	9.6			51	1024.3			
22	981.4	1071.1			52	1025.8			
23	982.9	2.6			53	1027.3			
24	984.4	4.2			54	1028.8			
25	985.8	1075.7			55	1030.3			
26	987.3	7.2			56	1031.8			
27	988.8	8.7			57	1033.3			
28	990.3	1080.3			58	1034.8			
29	991.8	1.8			59	1036.3			
30	993.2	1083.3			60	1037.8			

h	26m	27m	28m	29m	h.	26m	27m	28m	29m
s					s				
0					30				
1									
2									
3									
4									
5					35				
6									
7									
8									
9									
10					40				
11									
12									
13									
14									
15					45				
16									
17									
18									
19									
20					50				
21									
22									
23									
24									
25					55				
26									
27									
28									
29									
30					60				

Continuacion de la Tabla VI. (Tomada de la "Astr. práct. Loomis. 1855")

Red. al merid. r $\qquad n = \dfrac{2\,\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} h}{\mathrm{sen}\, 1''}$

TABLA VI.—*Reduccion al meridiano.*—(Segunda parte.)

$$n = \frac{2 \text{ sen.}^4 \frac{1}{2} h}{\text{sen. } 1''}$$

h	n	h	n	h	n
$0^m\ 00^s$	0.″00	$13^m\ 40^s$	0.″33	$17^m\ 20^s$	0.″84
1 00	0. 00	„ 50	0. 34	„ 30	0. 88
2 00	0. 00	14 00	0. 36	„ 40	0. 91
3 00	0. 00	„ 10	0. 38	„ 50	0. 95
4 00	0. 00	„ 20	0. 39	18 00	0. 98
5 00	0. 01	„ 30	0. 41	„ 10	1. 02
6 00	0. 01	„ 40	0. 43	„ 20	1. 06
7 00	0. 02	„ 50	0. 45	„ 30	1. 09
8 00	0. 04	15 00	0. 47	„ 40	1. 13
9 00	0. 06	„ 10	0. 49	„ 50	1. 18
10 00	0. 09	„ 20	0. 52	19 00	1. 22
11 00	0. 14	„ 30	0. 54	„ 10	1. 26
12 00	0. 19	„ 40	0. 56	„ 20	1. 30
„ 10	0. 20	„ 50	0. 59	„ 30	1. 35
„ 20	0. 22	16 00	0. 61	„ 40	1. 40
„ 30	0. 23	„ 10	0. 64	„ 50	1. 44
„ 40	0. 24	„ 20	0. 67	20 00	1. 49
„ 50	0. 25	„ 30	0. 69	„ 10	1. 54
13 00	0. 26	„ 40	0. 72	„ 20	1. 60
„ 10	0. 28	„ 50	0. 75	„ 30	1. 65
„ 20	0. 30	17 00	0. 78	„ 40	1. 70
13 30	0. 31	17 10	0. 81	20 50	1. 76

h = 1 horario del astro observado cerca del meridiano, espresado en tpo. [illegible] solar ó sid. segun que se obs. el ☉ ó una estrella

TABLA VII.—*Logaritmos del factor* k *para llevar en cuenta la variacion del cronómetro en las reducciones al meridiano.* k = 1 + 0.000023 v

v	Log. k	v	Log. h	v	Log. k
-30^s	9.99970	-10^s	9.99990	$+11^s$	0.00011
29	71	9	91	12	12
28	72	8	92	13	13
27	73	7	93	14	14
26	74	6	94	15	15
25	75	5	95	16	16
24	76	4	96	17	17
23	77	3	97	18	18
22	78	2	98	19	19
21	79	— 1	9.99999	20	20
20	80	+ 1	0.00001	21	21
19	81	2	02	22	22
18	82	3	03	23	23
17	83	4	04	24	24
16	84	5	05	25	25
15	85	6	06	26	26
14	86	7	07	27	27
13	87	8	08	28	28
12	88	9	09	29	29
—11	9.99989	+10	0.00010	+30	0.00030

v = var. cron. en 24 h; se toma negativo si adelanta
v positivo si atrasa

TABLA VIII.

Logaritmos del factor ν. $\nu = 0.000277\ n$

n	Log. ν		n	Log. ν		n	Log. ν		n	Log. ν	
00″	— ∞		250″	8.8404	170	500″	9.1414	86	750″	9.3175	57
10	7.4425	3010	260	.8574	164	510	.1500	85	760	.3233	56
20	7·7435	1761	270	.8738	158	520	1585	83	770	.3290	55
30	7.9196	1249	280	.8896	153	530	.1668	81	780	.3346	55
40	8.0445	969	290	.9049	147	540	.1749	79	790	.3401	54
50	.1414	792	300	.9196	142	550	.1828	79	800	.3456	53
60	.2206	670	310	.9338	138	560	.1907	76	810	.3510	53
70	.2876	580	320	.9476	134	570	.1983	76	820	.3563	52
80	.3456	511	330	.9610	130	580	.2059	74	830	.3616	51
90	.3967	458	340	.9740	125	590	.2133	73	840	.3668	51
100	.4425	414	350	.9865	123	600	.2206	72	850	.3719	50
110	.4839	378	360	.9988	119	610	.2278	71	860	.3770	50
120	.5217	347	370	9.0107	116	620	.2394	69	870	.3820	49
130	.5564	322	380	.0223	112	630	2418	69	880	.3870	48
140	.5886	300	390	.0335	110	640	.2487	67	890	.3919	48
150	·6186	280	400	.0445	108	650	.2554	66	900	.3967	48
160	.6466	263	410	.0553	104	660	.2620	65	910	.4015	47
170	.6729	248	420	.0657	102	670	.2685	65	920	.4063	46
180	.6977	235	430	.0759	100	680	.2750	63	930	.4110	46
190	.7212	223	440	.0859	98	690	.2813	63	940	.4156	46
200	.7435	212	450	.0957	95	700	.2876	61	950	.4202	45
210	.7647	202	460	.1052	94	710	.2937	61	960	.4247	45
220	.7849	193	470	.1146	91	720	.2998	60	970	.4292	45
230	.8042	185	480	.1237	90	730	.3058	59	980	.4337	44
240	8.8227	177	490	9.1327	87	740	9.3117	58	990	9.4381	44

TABLA IX.

Log. $(1-\mu)$ $\mu = 0.000277\ m$

m	Log. $(1-\mu)$	m	Log. $(1-\mu)$	m	Log. $(1-\mu)$	m	Log. $(1-\mu)$
100ˢ	9.98780	120ˢ	9.98532	140ˢ	9.98282	160ˢ	9.98031
101	768	121	519	141	269	161	018
102	755	122	507	142	257	162	9.98006
103	743	123	494	143	244	163	9.97993
104	730	124	482	144	232	164	981
105	718	125	469	145	219	165	968
106	706	126	457	146	207	166	955
107	693	127	444	147	194	167	943
108	681	128	432	148	182	168	930
109	668	129	419	149	169	169	918
110	656	130	407	150	157	170	905
111	644	131	394	151	144	171	892
112	631	132	382	152	132	172	880
113	619	133	369	153	119	173	867
114	606	134	357	154	107	174	855
115	594	135	344	155	094	175	842
116	582	136	332	156	081	176	829
117	569	137	319	157	069	177	817
118	557	138	307	158	056	178	804
119	9.98544	139	9.98294	159	9.98044	179	9.97772

I: Pares de estrellas para tiempo, por el Método de alturas iguales

Al Este	δ	magn	Al Oeste	δ	magn	τ h	m	Epoca		Log. $\frac{d\tau}{d\varphi}$
α Ceti	3°.6	+	ε Pegasi	9.3	+	0	23	Novbre	11	7.7951 +
α Aurigæ	45.9	+	α Cygni	44.8	+	0	52	... „ ...	19	6.9130 −
α Fauri	16.3	+	α Pegasi	14.5	+	1	42	D.bre	2	7.2671 −
α Canis majoris	16.6	−	β Ceti	18.7	−	3	34	... „ ...	30	7.3289 −
α² Geminorum	32.2	+	α Andromedæ	28.4	+	3	43	Enero	1	7.5093 −
β Geminorum	28.3	+	α Arietis	22.9	+	4	47	... „ ...	17	7.7581 −
α Canis minoris	5.6	+	α Ceti	3.6	+	5	11	... „ ...	23	7.3889 −
β Geminorum	28.3	+	β Fauri	28.5	+	6	28	Febrero	12	6.5461 +
α Canis minoris	5.6	+	α Orionis	7.4	+	6	46	... „ ...	16	7.7507 +
α Hydræ	8.1	−	β Orionis	8.4	−	7	14	... „ ...	23	6.5540 −
α Hydræ	8.1	−	δ Orionis	0.4	−	7	39	Marzo	2	8.0382 +
γ' Leonis	20.5	+	β Fauri	28.5	+	7	47	... „ ...	4	7.9688 +
α Leonis	12.6	+	α Orionis	7.4	+	7	49	... „ ...	4	7.8129 −
β Leonis	15.3	+	α Canis minoris	5.6	+	9	26	... „ ...	29	8.1188 −
α Virginis	10.5	−	α Canis mayoris	16.6	−	9	49	Abril	4	7.7439 −
α Bootis	19.8	+	γ Geminorum	16.5	+	10	18	... „ ...	11	7.4453 −
α² Libræ	15.5	−	α Canis majoris	16.6	−	10	40	... „ ...	17	6.9241 −
α Bootis	19.8	+	β Geminorum	28.3	+	10	57	... „ ...	21	7.8945 +
ε Bootis	27.6	+	β Geminorum	28.3	+	11	08	... „ ...	24	6.7949 +
α Virginis	10.5	−	α Hydræ	8.1	−	11	25	... „ ...	28	7.5275 +
α Coronæ	27.1	+	α² Geminorum			11	29	... „ ...	29	7.6057 +

I Pares de estrellas para tiempo, por el "Método de alturas iguales"

Al Este	δ magn	Al Oeste	δ magn	τ h m	Epoca	Log. $\frac{dx}{dq}$
α Coronæ	27°.1 +	β Seminorum	28°.3 +	11 33	Abril 30	6.9838 +
α Bootis	19.8 +	γ¹ Leonis	20.5 +	12 11	Mayo 10	6.9546 +
β Libræ	8.9 −	α Hydræ	8.1 −	12 17	... „ ... 11	6.9122 +
α Coronæ	27.1 +	δ Leonis	21.2 +	13 17	... „ ... 26	7.8833 −
α' Herculis	14.5 +	α Leonis	12.6 +	13 33	... „ ... 30	7.2258 −
β¹ Scorpii	19.5 −	β Corvi	22.7 −	14 01	Junio .. 7	7.7067 −
δ Scorpii	22.3 −	β Corvi	22.7 −	14 08	... „ ... 9	6.8351 −
α Scorpii	26.2 −	β Corvi	22.7 −	14 36	... „ ... 16	7.6959 +
α Ophiuchi ...	12.7 +	β Leonis	15.3 +	14 38	... „ ... 16	7.4316 +
α Ophiuchi ...	12.7 +	α Bootis	19.8 +	15 55	Julio 6	8.0986 +
α Lyræ	38.6 +	ε Bootis	27.6 +	16 41	... „ ... 17	8.1997 −
α Aquilæ	8.5 +	α Bootis	19.8 +	17 06	„ 23	8.0752 +
α Aquilæ	8.5 +	α Serpentis	6.8 +	17 39	Agosto 1	7.3599 −
α Cygni	44.8 +	α Coronæ	27.1 +	18 10	... „ ... 9	8.2975 −
ε Pegasi	9.3 +	α Serpentis	6.8 +	18 35	... „ ... 15	7.3805 −
α Andromedæ	28.4 +	α Lyræ	38.6 +	21 15	Setiemb. 25	8.0395 +
α Arietis	22.9 +	α Ophiuchi ...	12.7 +	21 37	Octubre 1	7.8993 −
α Arietis	22.9 +	α Aquilæ	8.5 +	22 42	... „ ... 17	8.1369 −
α Ceti	3.6 +	α Aquilæ	8.5 +	23 25	Noviembre 28	7.6321 +

II: Pares de estrellas para tiempo, por el "Método de alturas iguales" (~~Epoca: 9h de tiempo medio~~)

al Este	δ	magn	al Oeste	δ	magn	τ h m	z = z' ° '	a' ° '	a ° '	Epocas
*ζ Arietis		3	1 Pegasi		4.5	0 11	41 15	80 39 −	82 38 +	Noviembre 8
*ε Tauri		4.3	1 Pegasi		4.5	0 49	49 57	81 16	80 47	" 17
*γ Tauri		4	α Pegasi		2.0	1 35	37 42	89 55	91 15	" 29
*ζ Persei		3	α Andromedæ	28.4+	2	1 56	27 31	58 32	65 33	Dbre. 5
*γ Tauri		4	γ Pegasi		3.2	2 09	29 41	93 04	94 49	" 8
*π Orionis		5	γ Pegasi		3.2	2 32	34 57	91 03	92 25	" 14
*β Tauri	28.5+	2	α Andromedæ	28.4+	2	2 40	37 05	68 06	68 20	" 16
*γ Tauri		4	η Piscium		4.3	2 48	20 31	98 15	100 08	" 18
*π Orionis		5	η Piscium		4.3	3 10	25 45	95 12	96 28	" 23
*β Orionis		1	θ' Ceti		3	3 13	40 01	131 18	132 24	" 24
*γ Geminorum		2.3	γ Pegasi		3.2	3 18	45 47	85 35	88 29	" 25
*α Orionis		var.	ε Piscium	7.2+	4	3 22	37 25	103 42	104 02	" 26
*β Geminorum	28.3+	2	α Andromedæ	28.4+	2	3 50	52 22	68 41	68 37	Enero 2
*γ Geminorum		2.3	η Piscium		4.3	3 57	36 35	88 17	91 24	" 4
*μ Geminorum		3	β Arietis		3.2	4 01	31 23	78 16	82 52	" 5
*μ Geminorum		3	α Arietis		2	4 08	29 54	78 16	77 43	" 7
*α Canis minoris		1	ε Piscium	7.2+	4	4 16	49 50	99 26	97 07	" 9
*ε Hydræ		3.4	ω Piscium		4	4 16	72 13	88 50	89 39	" 9
*δ Geminorum		3.4	β Arietis		3.2	4 30	38 02	78 29 −	81 48 +	" 12
*κ Cancri		5	γ Pegasi		3.2	4 36	64 08	86 41 −	82 55 +	" 14

II: Pares de estrellas para tiempo

Al Este	δ	magn	Al Oeste	δ	magn	τ h m	z=z' ° '	a' ° '	a ° '	Epocas
* δ Seminorum		..3.4..	α Arietis		..2...	4 36	36 30	78 37 —	77 33 +	Enero ..14
* ε Hydrae		..3.4..	ε Piscium	7.2+	..4...	4 46	57 30	94 15	93 51	.... » ... 17
* ε Hydrae		..3.4.	o Piscium		..4...	5 10	52 19	96 25	94 15	.... » ... 23
* α Hydrae		...2...	θ' Ceti		..3...	5 19	65 45	108 50	109 45	.... » 25
* β Leonis		..4...	ε Piscium	7.2+	..4...	5 39	69 32	86 19	89 25	.... » 30
* ε Leonis		..3...	α Arietis		..2...	5 49	53 09	73 36	75 30	Febrero..1
* γ' Leonis		..2...	β Arietis		..3.2.	6 00	59 01	77 14	77 36	.... » 4
* γ' Leonis		..2...	α Arietis		..2...	6 07	57 22	77 35	74 45	.... » ... 6
* δ Leonis		..2.3..	β Arietis		..3.2.	6 27	65 10	74 57	76 07	.... » ... 11
* δ Leonis		..2.3..	α Arietis		..2...	6 34	63 29	75 21	73 29	.... » ... 13
* α Leonis	12.6 +	..1.2.	α Tauri	16.3+	...1...	7 17	40 09	93 28	87 37	.... » ... 24
* η Virginis		..3.4.	γ Ceti		..3.4..	7 27	72 40	96 16	93 19	.... » ... 26
* α' Herculis		var	α Leonis		..1.2..	8 34	51 21	86 38	89 12	Marzo 15
* β Leonis	15.3+	..2...	γ Seminorum	16.5+	..2.3..	9 07	37 17	90 07	88 03	.... » ... 22
* o Virginis		..4...	ε Hydrae		..3.4..	10 16	26 46	108 14	116 30	Abril..10
* α Serpentis	6.8+	..2.3..	α Canis minores	5.6+	..1...	11 34	60 19	94 13	94 46	.... » ... 30
* α Serpentis		..2.3..	ε Hydrae		..3.4.	12 09	52 11	96 33	96 29	Mayo..9
* α Ophiuchi	12.7+	..2...	α Leonis	12.6+	...1.2.	13 45	53 58	88 17	88 20	Junio..2
* ζ Aquilae		..2...	α Leonis		..1.2.	14 30	64 29	83 44	84 58	.... » ... 13
* γ Aquilae		..3...	o Virginis		..4...	15 49	56 23	90 24 —	91 28 +	.... » ... 4

II: Pares de estrellas para tiempo, por el "Método de alturas iguales" (Epoca: 9^h en tiempo medio)

Al Este	δ	magn	Al Oeste	δ	magn	τ	x = x'	a'	a	Epocas
						h m	° '	° '	° '	
* ε Delphini		..4...	o Virginis		..4...	16 12	61 50	87 52 —	89 31 +	Julio ..9
* ε Pegasi	7.7+	..2.3..	o Virginis		..4..	16 48	70 24	86 48	86 37	... „ ... 19
* α Aquarii		..3...	η Virginis		..3.4.	17 07	74 22	96 43	95 37	.... „ ... 23
* β Aquarii		..3...	θ Virginis		..4.5..	17 15	66 30	106 05	104 33	.... „ ... 25
* η Aquarii		..4.3..	η Virginis		..3.4..	17 22	77 48	95 13	94 19	.... „ ... 27
* 1 Pegasi		4.5	η Bootis		..3...	17 32	52 33	80 11	80 28	.... „ ... 30
* α Aquarii		..3...	ζ Virginis		..3.4..	17 44	65 38	100 18	99 07	Agosto 2
* π Aquarii		..5.4..	ζ Virginis		..3.4..	17 53	67 36	97 31	98 17	.... „ ... 4
* η Aquarii		..4.3..	ζ Virginis		..3.4..	17 59	69 03	98 40	97 42	.... „ 6
* ζ Cygni		..3...	α Coronæ bor...		..2..	18 19	39 29	66 32	70 34	... „ ... 11
* ζ Cygni		..3..	ε Coronæ bor..		..4...	18 30	36 58	66 07	70 13	.... „ 13
* θ Aquarii		..4.5..	β Libræ		..2..	18 40	58 50	113 15	113 54	... „ ... 16
* λ Aquarii		..4...	β Libræ		..2..	18 57	62 43	110 42	111 31	.... „ 20
* η Aquarii		..4.3..	δ Ophiuchi		..3..	19 16	51 29	107 24	113 07	.... „ ... 25
* λ Aquarii		..4..	ζ Ophiuchi ...		..3.2..	19 35	54 28	116 03	119 01	.... „ ... 30
* ε Piscium	7.2+	..4.5	ε Serpentis ...		..3.4..	19 39	58 49	96 11	96 13	.... „ ... 31
* α Andromeda	28.4+	..2..	α Coronæ bor..		..2..	19 45	58 40	67 57	69 25	Setbre.. 1
* ω Piscium		..4..	α Serpentis		..2.3..	19 46	61 20	93 39	92 49	... „ ... 2
* α Pegasi	14.5+	..2..	α' Herculis	14.5+	var.	20 04	41 58	89 42	89 40	.... „ ... 6
* α Pegasi	14.5+	..2..	α Ophiuchi	12.7	..2..	20 13	39 49	90 28	93 28	.... „ ... 8

Pares de estrellas para tiempo, por el 2do Metodo de alturas iguales (Epoca: 9^h de tiempo medio)

Al Este	δ	magn	Al Oeste	δ	magn	x	z=z'	a'	a	Epoca
						h m	° '	° '	° '	
* η Aquarii		4.3	η Serpentis		3	20 19	37 47	118 36	− 122 56 +	Setiembre 10
* λ Aquarii		4	1 Aquilæ		4.5					
* γ Pegasi	14.5 +	3.2	α' Herculis		var.	20 38	52 01	87 08	87 02	" 15
* γ Pegasi		3.2	α Ophiuchi		2	20 47	47 52	87 49	89 40	" 17
* α Andromeda	28.4 +	2	μ Herculis		3.5	20 52	44 05	68 53	69 44	" 18
* θ' Ceti		3	ζ Ophiuchi		3.4	20 53	71 07	107 03	108 44	" 19
* ε Piscium	7.2 +	4	κ Ophiuchi		3.4	20 56	59 34	93 03	90 09	" 20
* γ Ceti		3.4	ε Serpentis		3.4	21 12	80 46	90 23	88 04	" 23
* η Piscium		4.3	α' Herculis		var.	21 17	59 10	84 07	84 16	" 25
* η Piscium		4.3	α Ophiuchi		2	21 26	57 02	84 45	87 15	" 27
* γ Pegasi	14.5 +	3.2	ζ Aquilæ		3	21 33	37 04	91 34	92 55	" 29
* ι Piscium		4.5	β Aquilæ		4	21 42				Octubre 1
* ω Piscium		4	β Aquilæ		4	21 51	32 28	110 02	110 11	" 3
* θ' Ceti		3	1 Aquilæ		4.5	21 53	57 40	114 37	113 54	" 4
* η Piscium		4.3	ζ Aquilæ		3	22 12	46 15	88 2	89 29	" 9
* ε Piscium		4	α Aquilæ		1.2	22 21	39 29	102 40	100 25	" 11
* ε Piscium	7.2 +	4	β Aquilæ		4	22 22	39 26	102 42	104 37	" 11
* θ' Ceti		3	κ Aquilæ		5	22 26	50 53	119 49	117 26	" 12
* ε Piscium		4	ε Aquilæ		6.5	22 27	38 15	103 28	103 58	" 12
* α Andromeda		2	ζ Cygni		3	22 33	22 02	61 50	58 04	" 14

II. Pares de estrellas para tiempo, por el "Método de alturas iguales" (~~Epoca: 0h de tiempo medio~~)

Al Este	δ	magn	Al Oeste	δ	magn	τ h m	x = x' ° '	a' ° '	a ° '	Epocas
* γ Ceti		..3.4..	δ Aquilæ		..3.4..	22 58	55 55	100 17	100 04	Octubre 20
* θ' Ceti		..3...	μ Aquarii		..5.4..	23 01	44 00	126 53	127 56	.... „ ... 21
* α Ceti		..2.3..	δ Aquilæ		..3.4..	23 07	57 58	98 12	99 07	.... „ ... 23
* ε Piscium		..4...	ε Pegasi		..2.3..	23 19	26 31	114 10	108 52	.... „ ... 26
* θ' Ceti		..3..	ξ Aquarii		..5.4..	23 25	39 35	133 04	132 06	.... „ ... 27
* β Arietis		..3.2..	1 Pegasi		..4.5..	23 32	31 55	82 48	84 34	.... „ ... 29
* γ Tauri		..4...	ζ Aquilæ		..3...	23 35	65 53	81 26	83 18	.... „ ... 30
* θ' Ceti		..3..	θ Aquarii ...		..4.5..	23 45	36 21	139 00	137 51	Noviembre 1

En estas tablas: τ = hora sideral á que las estrellas adquieren la misma altura á la latitud φ para las cuales ha sido calculada la tabla. La época, se refiere á las 0^h de tiempo medio

Para la tabla I: $\varphi = 24°$; para otra latitud φ' la hora sideral $\tau' = \tau + \frac{d\tau}{d\varphi}\Delta\varphi$; $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi$

„ —— „ II: están expresados los azimutes a' y a, lo mismo que τ y las distancias zenitales, para la latitud $\varphi = 19°26'$. Las estrellas en esta tabla llevan un asterisco (*) para distinguirse á primera vista de las de la I

Prep. observ. **Orientacion**

Máximas digresiones de estrellas situadas entre 60° y 90° de declinacion Norte (Epoca: 9h tpo. med)

Estrellas			Magn	τ h m	z ° '	z ° '	a ° '	a	Epoca
δ	Ursæ minoris..al	O	4.5	0 09	70 32	3 36	+	Nbre	7
50	Draconis .... „	O	6	0 29	69 53	15 38	+	„	12
22	Camelopardi ... „	E	5.4	0 35	69 10	21 57	−	„	14
δ	Draconis ..... „	O	3	0 39	68 53	24 01	+	„	15
51	Cephei (H) .... „	E	5	0 44	70 32	02 56	−	„	16
τ	Draconis ..... „	O	5	0 53	69 39	17 56	+	„	19
ε	Draconis ..... „	O	4	1 19	69 15	21 20	+	„	25
	Piazzi VII 67 ... „	E	6	1 49	69 05	22 38	−	Dicbre	3
λ	Ursæ minoris ... „	O	6.7	1 50	70 34	01 08	+	„	3
k	Cephei „	O	4.5	1 55	70 03	13 27	+	„	4
	Groombridge 3241 „	O	6.7	2 04	69 32	19 01	+	„	7
3	Ursæ majoris .. „	E	6	2 31	69 06	22 30	−	„	13
α	Cephei ..... „	O	3.2	2 32	67 52	29 49	+	„	14
	F.Y.C. 1879 .... „	O	6	2 39	70 15	10 32	+	„	15
β	Cephei ..... „	O	3	2 57	69 16	21 16	+	„	20
11	Cephei ..... „	O	5	3 12	69 22	20 29	+	„	24
79	Draconis ..... „	O	6.7	3 27	69 37	17 57	+	„	27
1	Draconis ..... „	E	4.5	3 30	70 22	08 36	−	„	28
σ^2	Ursæ majoris.. „	E	5	3 32	68 55	23 47	−	„	29
d	Ursæ majoris .. „	E	5.4	3 32	69 19	20 51	−	Enero	3
ι	Cephei ..... „	O	4.3	4 08	68 33	26 03	+	„	7
226	Cephei ..... „	O	5.6	4 09	69 54	15 20	+	„	7
o	Cephei ..... „	O	6.5	4 40	68 53	24 02	+	„	15
g	Draconis .... „	E	5.4	4 44	69 59	14 28	−	„	16
32	Ursæ majoris „	E	6	4 45	68 36	25 50	−	„	16
γ	Cephei ..... „	O	3.4	5 15	70 01	13 53	+	„	24
	Groombridge 4163 „	O	7	5 25	69 43	17 19	+	„	26
α	Ursæ majoris „	E	2	5 38	67 57	29 23	−	„	30
λ	Draconis ..... „	E	3.4	5 53	69 16	21 14	−	Febrero	2
21	Cassiopea .... „	O	6	6 14	69 47	16 41	+	„	8
4	Draconis (H).. „	E	5.4	6 23	70 08	12 23	−	„	10
38	Cassiopea .... „	O	6	6 52	69 12	21 41	+	„	17
32	Camelopardi (H)..	E	5.4	6 56	70 27	6 15	−	„	18
k	Draconis ..... „	E	3.4	6 57	69 20	20 44	−	„	19
α	Ursæ minoris ... „	O	2	7 10	70 33	1 27	+	„	22
50	Cassiopea .... „	O	4	7 26	69 30	19 20	+	„	26

Prep. obs. Orientacion

Maximas digresiones de estrellas situadas entre 60° y 90° de declin. Norte

Estrellas			mag.	τ h m	x	a		Epoca
ι Cassiopea	..... al	O	4	9 44	68 47	24 40	+	Marzo 2
α Draconis	..... „	E	3.4	8 39	68 27	26 38	—	... „ .. 16
48 Cephei (H)	... „	O	6	8 46	70 03	13 31	+	... „ .. 18
5 Ursæ majoris	.. „	E	5.4	8 48	69 58	14 35	—	... „ .. 19
β Ursæ minoris	... „	E	2	9 13	69 49	16 16	—	... „ .. 25
γ^2 Ursæ minoris	... „	E	3	9 49	69 33	18 49	—	Abril 3
9 Camelopardi	... „	O	4	10 05	68 40	25 25	+	... „ .. 7
ζ Ursæ minoris	... „	E	4.5	10 06	70 08	12 32	—	... „ .. 7
Groombridge 2320	... „	E	6.5	10 39	68 59	23 15	—	... „ .. 16
A Draconis	..... „	E	5	10 59	69 08	22 17	—	... „ .. 21
Groombridge 966	„	O	6.7	11 01	69 51	15 59	+	... „ .. 21
η Draconis	..... „	E	3.2	11 06	67 49	30 04	—	... „ .. 23
ε Ursæ minoris	.. „	E	4.5	11 10	70 23	8 14	—	... „ .. 24
22 Camelopardi	... „	O	5.4	11 34	69 10	21 57	+	... „ .. 30
ω Draconis	..... „	E	5	12 09	69 06	22 32	—	Mayo 9
χ^1 Draconis	..... „	E	4.5	12 10	69 33	18 54	—	... „ .. 9
δ Ursæ minoris	... „	E	4.5	12 18	70 32	3 36	—	... „ .. 11
51 Cephei (H)	.... „	O	5	12 36	70 32	2 56	+	... „ .. 16
Piazzi VII 67	.... „	O	6	12 46	69 05	22 38	+	... „ .. 18
50 Draconis	..... „	E	6	13 12	69 53	15 38	—	... „ .. 25
3 Ursæ majoris	.. „	O	6	13 29	69 56	22 30	+	... „ .. 29
ι Draconis	..... „	E	5	13 43	69 39	17 56	—	Junio 1
δ Draconis	..... „	E	3	13 46	68 53	24 01	—	... „ .. 2
λ Ursæ minoris	.. „	E	6.7	13 54	70 54	1 08	—	... „ .. 4
ε Draconis	.... „	E	4	14 18	69 05	21 20	—	... „ .. 11
σ^2 Ursæ majoris	.. „	O	5	14 26	68 55	23 47	+	... „ .. 12
k Cephei	..... „	E	4.5	14 31	70 03	13 27	—	... „ .. 14
d Ursæ majoris	... „	O	5.4	14 54	69 19	20 51	+	... „ .. 20
Groombridge 3241	.. „	E	6.7	14 57	69 32	19 01	—	... „ .. 20
1 Draconis	..... „	O	4.5	15 07	70 22	8 36	+	... „ .. 23
J.Y.C. 1879	.... „	E	6	15 07	70 15	10 32	—	... „ .. 23
32 Ursæ majoris	... „	O	6	15 32	68 36	25 50	+	... „ .. 29
β Cephei	..... „	E	3	15 57	69 16	21 16	—	Julio 5
α Cephei	..... „	E	3.2	15 59	67 52	29 49	—	... „ .. 6
9 Draconis (H)	... „	O	5.4	16 05	69 59	14 28	+	... „ .. 7
11 Cephei	..... „	E	5	16 08	69 22	20 29	—	... „ .. 8

Estrellas		magn.	τ h m	z ° '	a ° '		Epoca
α Ursæ majoris …	al O	2	16 13	67 57	29 23	+	Julio 10
79 Draconis ……	„ E	6.7	16 16	69 39	17 57	—	… „ .. 10
226 Cephei ……	„ E	5.6	16 51	69 54	15 20	—	… „ .. 19
λ Draconis ….	„ O	3.4	16 54	69 16	21 14	+	… „ .. 20
ι Cephei ……	„ E	4.3	17 22	68 33	26 03	—	… „ .. 27
o Cephei ……	„ E	6.5	17 47	68 53	24 02	—	Agosto. 3
4 Draconis (H) …	„ O	5.4	17 49	70 08	12 23	+	… „ .. 3
γ Cephei ……	„ E	3.4	17 53	70 01	13 53	—	… „ .. 4
k Draconis ……	„ O	3.4	17 59	69 20	20 44	+	… „ .. 6
Groombridge 4163	„ E	7	18 12	69 43	17 19	—	… „ .. 9
32 Camelopardi (H)	„ O	5.4	18 40	70 27	6 15	+	… „ .. 16
21 Cassiopeæ ….	„ E	6	19 00	69 47	16 41	—	… „ .. 21
α Ursæ minoris ..	„ E	2	19 14	70 33	1 27	—	… „ .. 25
α Draconis ……	„ O	3.4	19 23	68 27	26 38	+	… „ .. 27
38 Cassiopeæ ….	„ E	6	19 52	69 12	21 41	—	Setbre 3
5 Ursæ majoris …	„ O	5.4	20 08	69 58	14 35	+	… „ … 7
50 Cassiopeæ ……	„ E	4	20 19	69 30	19 20	—	… „ … 10
β Ursæ minoris ….	„ O	2	20 29	69 49	16 16	+	… „ … 13
ι Cassiopeæ ……	„ E	4	20 53	68 47	24 40	—	… „ .. 19
γ² Ursæ minoris ….	„ O	3	20 55	69 33	18 49	+	… „ .. 19
48 Cephei (H) ……	„ E	6	21 22	70 03	13 31	—	… „ .. 26
ζ Ursæ minoris ..	„ O	4.5	21 32	70 08	12 32	+	… „ .. 28
Groombridge 2320	„ O	6.5	21 33	68 59	23 15	+	… „ .. 29
η Draconis ……	„ O	3.2	21 39	67 49	30 04	+	… „ .. 30
A Draconis ….	„ O	5	21 57	69 08	22 17	+	Octubre 6
ε Ursæ minoris …	„ O	4.5	22 48	70 23	8 14	+	… „ .. 18
ω Draconis ….	„ O	5	23 06	69 06	22 32	+	… „ .. 22
9 Camelopardi …	„ E	4	23 17	68 40	25 25	—	… „ .. 25
ψ¹ Draconis ……	„ O	4.5	23 18	69 33	18 54	+	… „ .. 25
Groombridge 966 …	„ E	6.7	23 44	69 51	15 59	—	Novbre 1

Esta tabla está calculada por las formulas:

$\cos z = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \delta}$ $\operatorname{sen} a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$ $\cos h = \frac{\tan \varphi}{\tan \delta}$

$\tau = \alpha \pm h$ Epoca = el dia en que $R_{m}^{*} = \tau - 9^h 2^m 34^s$

La época espresa el dia en que el fenómeno tiene lugar á las 9^h de tiempo medio.

Preparacion de observaciones.

Aceleracion de las fijas, en tiempo medio

(Por 1 dia = $3^m.9318$)

In 1 dia	h	m	30	h	m	60	h	m
1	0	3.9	31	2	01.9	61	3	59.8
2	0	07.9	32	2	05.8	62	4	03.8
3	0	11.8	33	2	09.7	63	4	07.7
4	0	15.7	34	2	13.7	64	4	11.6
5	0	19.7	35	2	17.6	65	4	15.6
6	0	23.6	36	2	21.5	66	4	19.5
7	0	27.5	37	2	25.5	67	4	23.4
8	0	31.4	38	2	29.4	68	4	27.4
9	0	35.4	39	2	33.3	69	4	31.3
10	0	39.3	40	2	37.3	70	4	35.2
11	0	43.3	41	2	41.2	71	4	39.2
12	0	47.2	42	2	45.1	72	4	43.1
13	0	51.1	43	2	49.1	73	4	47.0
14	0	55.0	44	2	53.0	74	4	51.0
15	0	59.0	45	2	56.9	75	4	54.9
16	1	02.9	46	3	00.9	76	4	58.8
17	1	06.8	47	3	04.8	77	5	02.7
18	1	10.8	48	3	08.7	78	5	06.7
19	1	14.7	49	3	12.7	79	5	10.6
20	1	18.6	50	3	16.6	80	5	14.5
21	1	22.6	51	3	20.5	81	5	18.5
22	1	26.5	52	3	24.5	82	5	22.4
23	1	30.4	53	3	28.4	83	5	26.3
24	1	34.4	54	3	32.3	84	5	30.3
25	1	38.3	55	3	36.2	85	5	34.2
26	1	42.2	56	3	40.2	86	5	38.1
27	1	46.2	57	3	44.1	87	5	42.1
28	1	50.1	58	3	48.0	88	5	46.0
29	1	54.0	59	3	52.0	89	5	49.9
30	1	58.0	60	3	55.9	90	5	53.9

90	5	53.9	95	6	13.5	100	6	33.2
91	5	57.8	96	6	17.5	101	6	37.1
92	6	01.7	97	6	21.4	102	6	41.0
93	6	05.7	98	6	25.3	103	6	45.0
94	6	09.6	99	6	29.2	104	6	48.9
95	6	13.5	100	6	33.2	105	6	52.8

Preparacion de observaciones
entre las fechas astronomicas y los dias del año

En. nero		F.		M zo.	a bril	Ma yo	Ju nio
1	1	1	32	1			
2	2		33				
3	3		34				
4	4		35				
5	5		36				
6	6		37				
7	7		38				
8	8		39				
9	9		40				
10	10		41				
11	11		42				
12	12		43				
13	13		44				
14	14		45				
15	15		46				
16	16		47				
17	17		48				
18	18		49				
19	19		50				
20	20		51				
21	21		52				
22	22		53				
23	23		54				
24	24		55				
25	25		56				
26	26	27	57				
27	27	27	58				
28	28	28	59				
29	29						
30	30						
31	31						

Preparacion de observaciones -
Paso meridiano de las estrellas fundamentales, visibles en la Republica.

Estrellas	magn	α	δ	Dist. ecuat.	Epoca
		h m	° '		
α Andromedæ	2	0 02	28 25.7	+	Agosto

Tabla *que dá la variacion* $\Delta\rho$ *de la refr: por 1' de cambio de altura. (Método Talcott.)*

Argumento: $\frac{1}{2}(z+z') = \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$

$\frac{z}{2}$	$\Delta\rho$	$\frac{z}{2}$	$\Delta\rho$	$\frac{z}{2}$	$\Delta\rho$
0°	0".01700	10°	0".01740	20°	0".01910
1	.01702	11	.01756	21	.01942
2	.01704	12	.01772	22	.01974
3	.01706	13	.01788	23	.02006
4	.01708	14	.01804	24	.02038
5	.01710	15	.01820	25	.02070
6	.01716	16	.01838	26	.02106
7	.01722	17	.01856	27	.02142
8	.01728	18	.01874	28	.02178
9	.01734	19	.01892	29	.02214
10	.01740	20	.01910	30	.02250

INDICE.

Pág.

Introduccion 3

PARTE PRIMERA.—GEODESIA PRACTICA.

CAP. I.—Elipsoide terrestre y expresiones analiticas de sus partes elementales 5
Ejes, aplanamiento y excentricidad del elipsoide 6
Normal mayor 9
Normal menor 10
Angulo de la vertical ..... id.
Radio central 11
Radio de curvatura del meridiano 13
Tangente, subtangente, subnormal, &c. 14
Arcos de meridiano 15
Arcos de paralelo 19
Intersecciones del elipsoide con planos verticales 20
Radio de curvatura de una seccion cualquiera 22
Reduccion de las líneas geodésicas á segundos 25
Reduccion de segundos á metros 26
Diferentes modos de escribir las fórmulas 27
Superficie del elipsoide terrestre 29
Volúmen del elipsoide 32
Tablas geodésicas 33
Tabla I.— Logaritmos de r, R y N 34
Tabla II.—Logaritmo de ρ y ángulo de la vertical 35
Tabla III.—Valores de un grado de meridiano y de paralelo 36
CAP. II.—Triangulaciones geodésicas y modo de considerar los triángulos trazados en la superficie del elipsoide 37
Coordenadas geográficas 38
Generacion de las líneas geodésicas 41
Radio de la esfera osculatriz 44
Resúmen de las operaciones necesarias para la triangulacion 49
CAP. III.—Medida de las bases 50

71

Pág.

Efecto producido por la temperatura (dilatabilidad) 51
Tabla de los coeficientes de dilatacion para diversas sustancias 53
Aplicaciones 54
Coeficiente de dilatacion de la madera 56
Aparatos con que se miden las bases 60
Aparato con que se midió la base del Valle 62
Reduccion al horizonte 66
Extension final de la base atendiendo á la temperatura 67
Reduccion al nivel del mar 69
CAP. IV.—Eleccion de los vértices 73
Modo de conocer cómo se proyectarán las señales 74
Forma mas conveniente de los triángulos 75
Señales diversas que se usan en las triangulaciones 77
CAP. V.—Medida de los ángulos 79
Descripcion del altazimut 80
Micrómetros para apreciar las fracciones de la graduacion 81
Error de curso de los micrómetros 85
Punto muerto del tornillo micrométrico 86
Rectificaciones del altazimut 88
Efecto de la inclinacion de la columna en los ángulos verticales 94
Efecto de la inclinacion del eje en los ángulos horizontales 97
Influencia del error de colimacion 98
Combinacion de los resultados de medidas angulares 104
Apreciacion de los errores medios 106
Fórmulas derivadas de la teoría de las probabilidades 111
Significacion del error llamado probable ..... id.
Error de fase 113
Suma de los tres ángulos de un triángulo geodésico 115
CAP. VI.—Cálculo de los triángulos 116
Resolucion de los triángulos considerados como esféricos 117
Reduccion del triángulo al formado por las cuerdas de los lados (Método de Delambre) 120
Resolucion de los triángulos considerados como planos (Método de Legendre) 125
Cálculo del exceso esférico 128
CAP. VII.—Cálculo de las coordenadas geográficas de los vértices. 132
Diferencias de latitud 133
Diferencias de longitud 137
Logaritmos de *A*, *B* y *C* para el cálculo de las coordenadas 139
Azimutes inversos 140
CAP. VIII.—Construccion de las cartas geográficas 142
Proyecciones cónicas 143
Diversas modificaciones de las mismas 153
Proyecciones cilíndricas y sus modificaciones 157
CAP. IX.—Trazo de lineas extensas 162
Determinacion de los extremos de una línea 163

Pág.

Determinacion de la direccion y la magnitud de una línea 164
Trazo de un arco de paralelo (Método de la *cuerda*) 167
Trazo de un arco de paralelo (Método de la *tangente*) 176
CAP. X.—Levantamiento de cartas geográficas por métodos astronomicos 181
Determinacion de una línea por las coordenadas de sus extremos 183
Influencia de los errores de observacion 184
Determinacion de una línea conociendo su azimut y las latitudes de sus extremos 187
Influencia de los errores de observacion 189

PARTE SEGUNDA.

Determinacion de la forma y magnitud de la tierra.

CAP. I.—Nociones históricas 191
Apreciaciones de los antiguos ..... id.
Primera medida de la tierra hecha por Eratóstenes 193
Medida de los árabes 194
Medidas de Fernel, Snell, Riccioli, &c. 195
Newton y Galileo 196
Medida del meridiano de Francia por Cassini 197
Expediciones de América y de Laponia 198
Trabajos de Maclaurin, Clairaut y Laplace 200
Experiencias del péndulo 201
Forma y magnitud de la tierra segun Walbek, Schmidt, Bessel y Schubert 202
CAP. II.—Investigacion de la forma de la tierra por medio del principio de la gravitacion 205
Forma de la tierra en la hipótesis de su fluidez primitiva ..... id.
Aplicacion del péndulo á la determinacion de la figura de la tierra 209
Combinacion de los resultados y elipticidad que de ellos se deduce 216
CAP. III.—Aplicacion de las operaciones geodésicas á la medida de arcos terrestres 218
Determinacion trigonométrica de un arco del meridiano 219
Extension calculada por la proyeccion de los lados trigonométricos 220
Proyeccion de los lados por medio de arcos de paralelos 223
Determinacion de un arco de paralelo 224
CAP. IV.—Determinacion de la figura y dimensiones de la tierra por las medidas geodésicas 225
Combinacion de arcos de meridiano 226
Ecuaciones de condicion 228
Combinacion de arcos de paralelo 230
Correccion de los elementos aproximativos del elipsoide 231

PARTE TERCERA.

Elementos de astronomía práctica.

Pág.

CAP. I.—Definiciones y principios fundamentales..... 233
Coordenadas de los astros..... 234
Triángulo astronómico y sus diversos elementos..... 237
Idea general de la determinacion de la hora..... 238
Idea general de la determinacion del azimut..... 240
Idea general de la determinacion de la latitud geográfica..... id.
Idea general de la determinacion de la longitud geográfica..... 241
CAP. II.—De la medida del tiempo..... 242
Tiempo verdadero y tiempo medio..... id.
Relacion entre los tiempos solar y sideral..... 248
Tabla para convertir tiempo medio en tiempo sideral..... 248
Tabla para convertir tiempo sideral en tiempo medio..... 249
Aplicaciones de las Tablas..... 250
Tabla para convertir tiempo en arco y vice versa..... 253
CAP. III.—De la refraccion astronómica..... 254
Cálculo aproximativo de la refraccion..... 255
Determinacion experimental de la refraccion..... 257
Uso de las Tablas de refraccion..... 258
CAP. IV.—De la paralaje y sus efectos..... 260
Paralaje de altura en funcion de la distancia zenital aparente..... 261
Reduccion de la paralaje horizontal ecuatorial..... 262
Tablas para corregir la paralaje ecuatorial por latitud y altura sobre el nivel del mar..... 264
Paralaje de altura en funcion de la distancia zenital geocéntrica..... 265
Efecto de la paralaje en el semidiámetro de la luna..... 266
Tabla para calcular el aumento del semidiámetro de la luna..... 270
Paralaje de la ascension recta..... 271
Paralaje de la declinacion..... 273
Aumento del semidiámetro en funcion de las coordenadas aparentes y verdaderas..... 276
Paralaje horizontal respecto de la normal del observador..... 277
Reduccion de la declinacion de la luna al extremo de la normal..... 279
Tabla para calcular la reduccion anterior..... 280
CAP. V.—Disposicion y uso de las efemérides..... 282
Orden de las Tablas de los Almanaques Náuticos..... id.
Interpolacion por medio de las variaciones en la unitad de tiempo..... 285
Interpolacion por medio de las diferencias sucesivas..... 287
Determinacion de la hora que corresponde á la posicion dada de un astro. 291

Pág.

Cálculo de las variaciones ó movimientos horarios 292
CAP. VI.—Teoria y uso del sextante 294
Principio en que se funda la construccion del sextante 295
Rectificaciones del sextante 296
Determinacion del error inicial 298
Paralelismo del limbo y del telescopio 301
Determinacion de los errores de excentricidad 302
Horizontes artificiales y uso del sextante 304
Utilidad de colocar un nivel pequeño en la alidada 306
Uso simultáneo del sextante y del cronómetro 308
Método de Simms para determinar los errores del sextante 311
Círculos de reflexion comunes, repetidores y prismáticos 319
CAP. VII.—Determinacion de la hora.—Método de distancias zenitales 320
Condiciones mas favorables para la observacion 321
Tabla de distancias zenitales en el primer vertical 325
Ejemplos de la determinacion del tiempo por este método 326
Correccion que á veces demandan las observaciones del sol 330
Uso de los altazimutes y demas clisímetros 331
Determinacion de la marcha ó variacion de los guarda-tiempos 333
Método de Quetelet para observar el sol 336
CAP. VIII.—Determinacion de la hora.—Método de alturas iguales de dos estrellas 337
Desarrollo de las fórmulas aplicables á este procedimiento 338
Tabla de diversos pares de estrellas convenientes y su uso 343
Utilidad de observar á las mismas alturas 346
Determinacion del error del clisímetro por las mismas observaciones 348
Simplificacion del cálculo del tiempo en algunos casos 351
Modo de llevar en cuenta las indicaciones del nivel ..... id.
Ejemplos de la determinacion de la hora ..... 341 y 353
Método de alturas iguales de una sola estrella 354
CAP. IX.—Determinacion de la hora.—Método de alturas iguales del sol 355
Fórmulas que se aplican 358
Ejemplos de observaciones hechas con sextante y con altazimut 359
Determinacion de la hora aproximativa de la observacion correspondiente 363
Correccion de las observaciones que no son exactamente correspondientes. id.
Fórmulas propias para los tránsitos inferiores del sol 365
CAP. X.—Determinacion de la hora.—Método de pasos meridianos 368
Telescopio de tránsitos y sus rectificaciones aproximativas ..... id.
Modo de llevar en cuenta los pequeños errores restantes 373
Constantes instrumentales *a*, *b* y *c* 377
Intervalos ecuatoriales de los hilos 379
Reduccion de los tránsitos incompletos al hilo medio 381
Colimacion del hilo medio 382

Pág.

Determinacion del error azimutal y de la correccion del cronómetro..... 384
Ejemplo de la determinacion de la hora por este método..... 387
Otra forma de las ecuaciones..... 390
Tránsitos meridianos del sol..... 393
Método sencillo para calcular los pasos por el hilo medio..... id.
Preparacion de las estrellas que hayan de observarse..... 395
CAP. XI.—Determinacion del azimut de una señal.—Método de distancias angulares entre la señal y una estrella, conociendo la hora de la observacion..... 396
Circunstancias mas favorables para la observacion..... 397
Ejemplo de una observacion de la estrella polar..... 399
Método breve aplicable cerca de los tránsitos de las estrellas..... 401
Serie que da el azimut de los circumpolares en funcion de la distancia polar..... 402
Observaciones de los circumpolares cerca de sus mayores elongaciones... 404
Observaciones solares..... 405
CAP. XII.—Determinacion del azimut.—Método de distancias angulares entre la señal y la estrella, conociendo la distancia zenital de esta..... 406
Condiciones mas convenientes..... 407
Ejemplo numérico de este procedimiento..... 408
CAP. XIII.—Determinacion del azimut.—Método de alturas iguales de dos estrellas..... 409
Aplicacion numérica de este método..... 412
CAP. XIV.—Determinacion del azimut.—Método de alturas iguales del sol..... 414
Ejemplo numérico..... 416
CAP. XV.—Determinacion de la latitud.—Método general conociendo la distancia zenital de un astro y la hora de la observacion..... 417
Condiciones mas ventajosas para la aplicacion de este procedimiento..... id.
Ejemplos..... 420
Método de distancias zenitales meridianas..... 422
Observacion de los dobles pasos de las circumpolares..... 424
CAP. XVI.—Determinacion de la latitud.—Método de distancias zenitales circunmeridianas..... 425
Reduccion al meridiano..... 427
Modo de tomar en cuenta la variacion del cronómetro..... 429
Ejemplo de observaciones de la estrella polar..... 430
Determinacion simultánea de la distancia zenital meridiana y de la colimacion vertical del clisímetro..... 433
Ejemplo de observaciones del sol..... 434
Método breve aplicable con cualquiera relox de segundos..... 437
Otro método sencillo que no demanda el uso de un guarda-tiempo..... 439
CAP. XVII.—Determinacion de la latitud.—Método americano..... 441
Telescopio zenital..... 442
Valor angular del micrómetro..... 444

Pág.

Modo de hacer las observaciones por este método 447
Tabla para calcular la diferencia de refraccion 450
Ejemplo detallado del método americano ó de Talcott ..... id.
Aplicacion del mismo con cualquiera clisímetro 452
CAP. XVIII.—Determinacion de la lalitud.—Método de Littrow 455
Ejemplo numérico de este método 458
CAP. XIX.—Determinacion de la latitud.—Método de alturas iguales de dos estrellas 459
Aplicacion numérica de este procedimiento 460
Correccion que debe hacerse por las pequeñas diferencias de altura 462
Modo de calcular la correccion de la latitud cuando se conoce su valor aproximativo 463
Determinacion del error del clisímetro 464
CAP. XX.—Determinacion simultánea de la hora y de la latitud 464
Método general por observaciones de una estrella cerca del meridiano y de otra cerca del primer vertical 466
Ecuaciones de condicion para corregir los valores aproximativos de la latitud y de la hora 467
Procedimiento que consiste en observar tres estrellas á la misma altura .. 470
CAP. XXI.—Determinacion de la longitud.—Método de distancias lunares 473
Influencia de los errores de observacion y de las Tablas 474
Necesidad de la *estima*, ó longitud presunta 475
Modo de practicar las observaciones 478
Contraccion de los semidiámetros por efecto de la refraccion 480
Reduccion de la distancia lunar al centro de la tierra 481
Ejemplo de la determinacion de la longitud por este método 483
Modo de tomar en cuenta el efecto de los errores 485
CAP. XXII.—Determinacion de la longitud.—Método de distancias zenitales de la luna 488
Modo de apreciar la influencia de todos los errores 490
Tabla que da el semidiámetro geocéntrico conociendo la paralaje ecuatorial 492
Ejemplo del cálculo de la longitud por este método 494
Tabla destinada á facilitar la interpolacion de la declinacion 498
CAP. XXIII.—Determinacion de la longitud.—Método de alturas iguales de la luna y de una estrella 500
Ejemplo de este procedimiento 501
Correccion por las pequeñas diferencias de altura 503
CAP. XXIV.—Determinacion de la longitud.—Método de culminaciones lunares 505
Utilidad de observar várias estrellas inmediatas á la luna 506
Reduccion de los tránsitos incompletos de la luna al hilo medio 507
Modo de preparar la observacion 509
Primer método de cálculo 510
Aplicacion numérica 511

Pág.

Eliminacion del error tabular por medio de observaciones correspondientes 514
Segundo método de cálculo 517
Método sencillo de calcular las diferencias de longitud cuando son pequeñas 520
Otro procedimiento aplicable al mismo caso 521
CAP. XXV.—Determinacion de la longitud.—Método de señales instantáneas 524
Fenómenos celestes ..... id.
Señales luminosas 525
Ecuacion personal ó error relativo de los observadores 526
Ejemplo del cálculo de la longitud por la observacion de señales luminosas 528
Caso en que distan mucho entre sí las estaciones extremas 529
Señales telegráficas 530
Ejemplo de este método 532
Otro modo mas exacto de hacer las observaciones 533
Idea general de los electro-cronógrafos 535
CAP. XXVI.—Determinacion de la longitud.—Método de trasporte de cronómetros 536
Modo de determinar la variacion de los cronómetros durante el viaje 537
Ejemplo de este procedimiento 539
Reglas generales para el manejo de los cronómetros 541

TABLAS.

Tabla I.—Refracciones astronómicas... Log. ρ 544
Tabla II.— ,, ,, Log. b 548
Tabla III.— ,, ,, Log. f y log. l ..... id.
Tabla IV.—Log. de A y B para reducir las alturas iguales del sol 549
Tabla V.—Reduccion al meridiano. Valores de m 553
Tabla VI.— ,, ,, Valores de n 555
Tabla VII.— ,, ,, Log. k ..... id.
Tabla VIII.—Log. ν 556
Tabla IX.—Log. $(1-\mu)$ ..... id.

Log. de r, N y R para las lats. de 15° á 33° 34
Log. de φ (angulo de la vertical) para las mismas lats. .. 35
Log. de los factores A, B, C para el calculo de las coordenadas geograficas ..... 139.

ERRATAS DE IMPORTANCIA.

corregidas

Pág.	LUGAR.	DICE.	DEBE DECIR.
48	Línea 23	$\frac{180^\circ}{\pi}\,\lambda\,g$	$\frac{\pi}{180^\circ}\,\lambda\,g$
70	,, 13	de serie	de la serie
86	,, 9	$\frac{n'}{60} = 1.''0033$ próximamente	$\frac{v'}{60} = 1.''02$
id	,, 31	haciendo a	hácia a
104	,, 11	20	40
id	,, 12	10	20
145	,, 31	$\frac{MN}{\cos.\phi} - \frac{NC-MC}{\cos.\phi}$	$\frac{MN}{\cos.\phi} = \frac{NC-MC}{\cos.\phi}$
149	,, 6	(fig. 33ª)	(fig. 23ª)
150	,, 31	ϕ y ϕ'	ϕ' y ϕ''
151	,, 2	paralelos	meridianos
155	,, última	$S - \frac{\pi}{90^\circ}\,V(\gamma - m)$	$S = \frac{\pi}{90^\circ}\,V(\gamma - m)$
197	,, 7	precision	precesion
227	,, 32	la ecuacion (2)	la ecuacion (3)
237	,, 26	por p.	por q.
313	,, 1	procuré	procuraré
314	,, 25	$180^\circ - \beta$	$180^\circ - 2\,\beta$
344	,, 9	á saber $t - t'$,	á saber $t = t'$,
437	,, 12	pocision	precision
548	,, 21	Entre 1ª columna en diferencia ... 73.0	... 73.8
553	,, 26 subiendo	En la columna correspondiente á 1ª ... 4.92	... 2.82

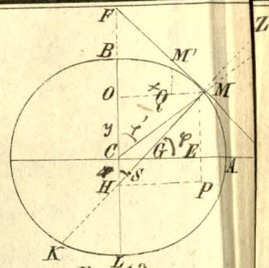


Fig. 1ª

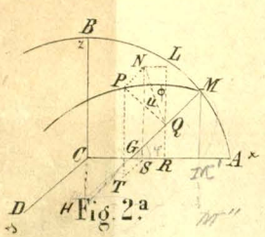


Fig. 2ª

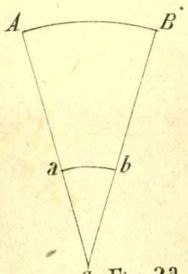


Fig. 3ª

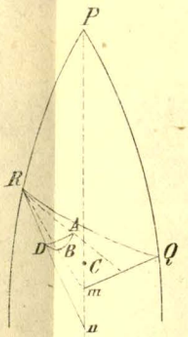


Fig. 4ª

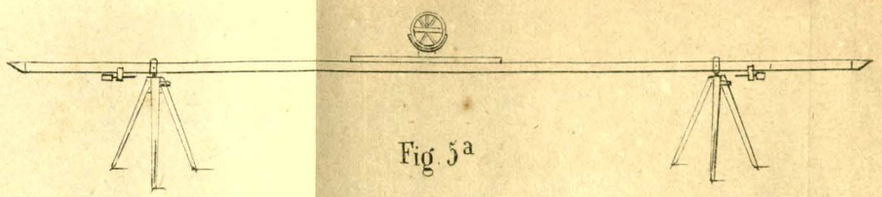


Fig. 5ª

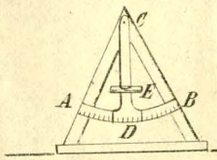


Fig. 6ª

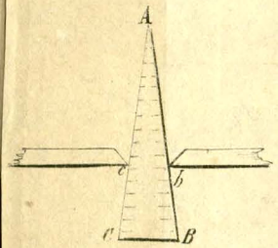


Fig. 7ª

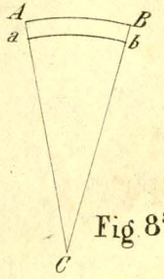


Fig 8ª

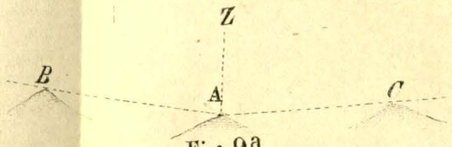


Fig. 9ª

Fig. 10ª

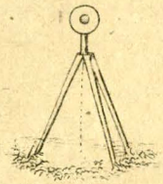


Fig. 11ª

Fig. 12ª

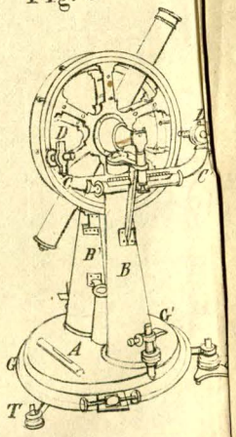


Fig. 13ª

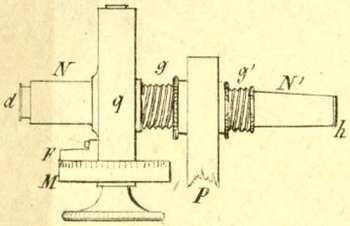
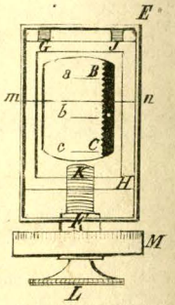


Fig. 14ª



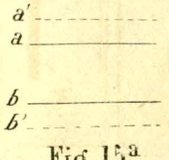


Fig. 15ª

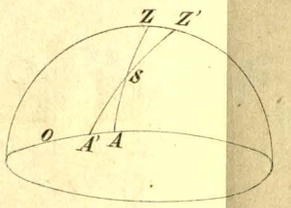


Fig. 16ª

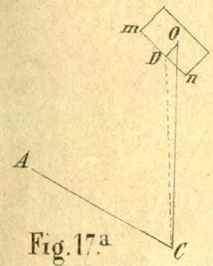


Fig. 17ª

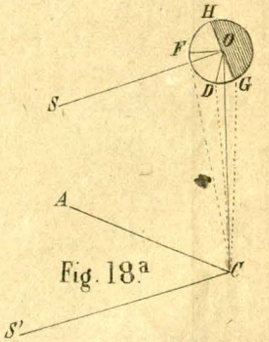


Fig. 18ª

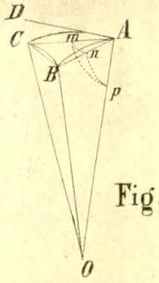


Fig. 19ª

Fig. 20ª

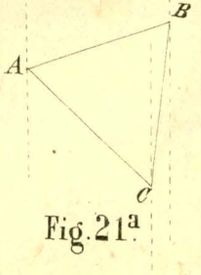
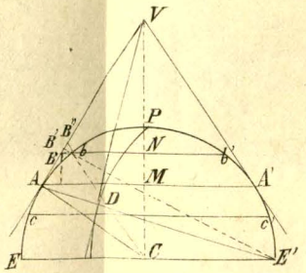


Fig. 21ª



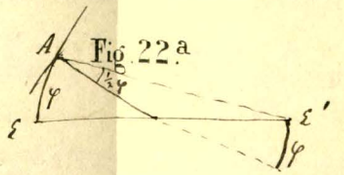


Fig. 22ª

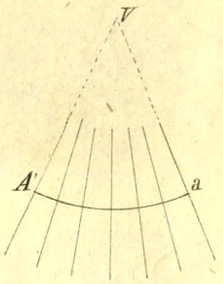


Fig. 23ª

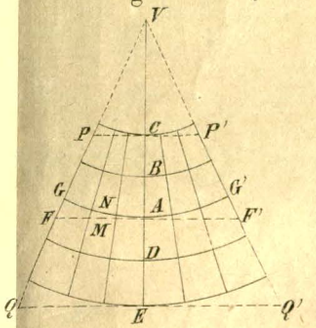


Fig. 24ª

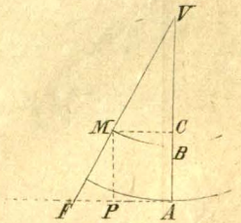


Fig. 25ª

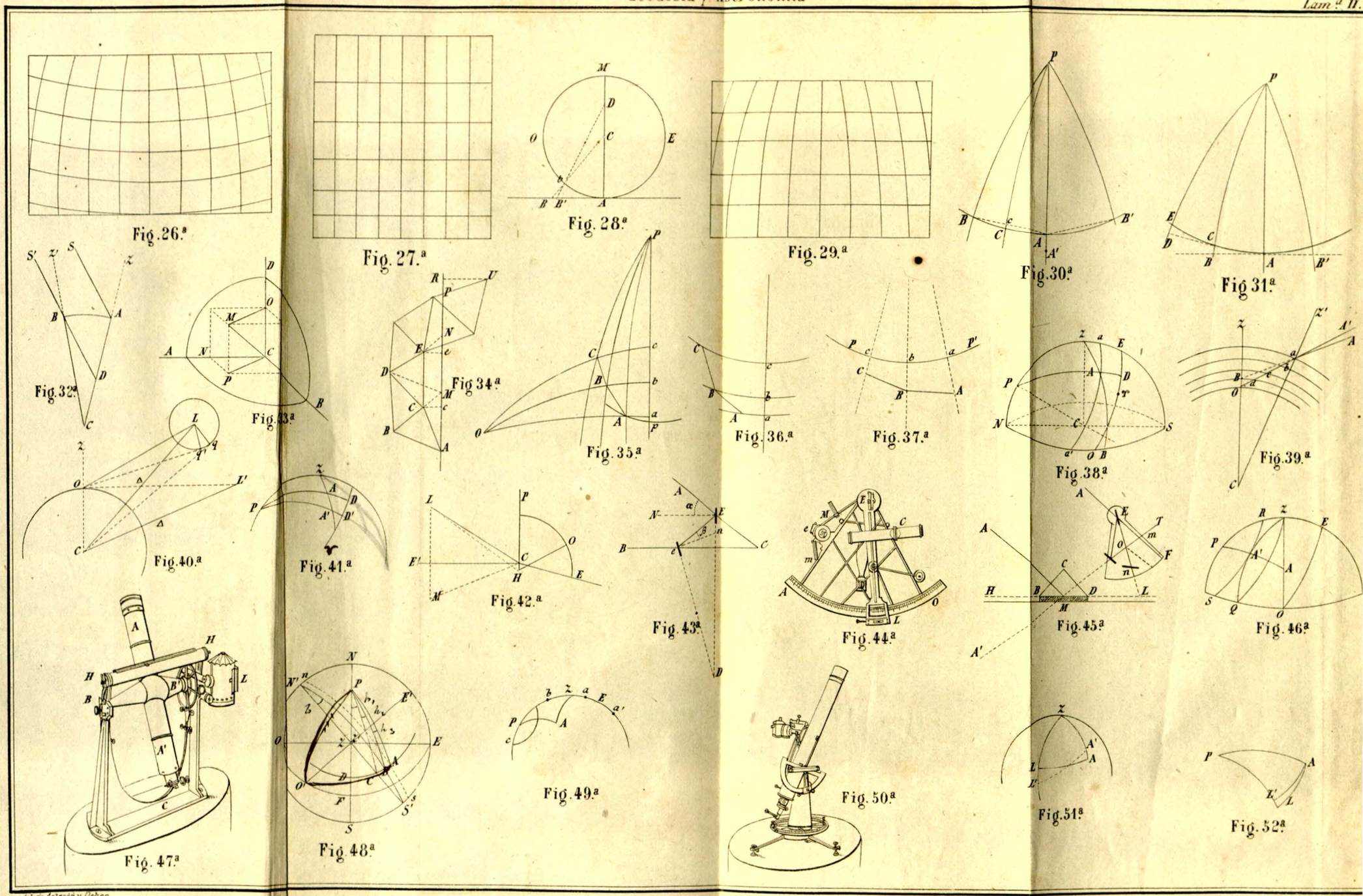


Fig. 26.ª
Fig. 27.ª
Fig. 28.ª
Fig. 29.ª
Fig. 30.ª
Fig. 31.ª
Fig. 32.ª
Fig. 33.ª
Fig. 34.ª
Fig. 35.ª
Fig. 36.ª
Fig. 37.ª
Fig. 38.ª
Fig. 39.ª
Fig. 40.ª
Fig. 41.ª
Fig. 42.ª
Fig. 43.ª
Fig. 44.ª
Fig. 45.ª
Fig. 46.ª
Fig. 47.ª
Fig. 48.ª
Fig. 49.ª
Fig. 50.ª
Fig. 51.ª
Fig. 52.ª

Lit. de Arteaga y Ochoa.

Nota 1ª

Tenemos la ec. $z'^2+(1-e^2)(x'^2+y'^2)=a^2(1-e^2)$

ó $z'^2+x'^2+y'^2-e^2x'^2-e^2y'^2=a^2(1-e^2)$ en la cual vamos á sustituir, los valores de z', x' é y', que son

$$z'=y\,\mathrm{sen}\varphi+x\cos u\cos\varphi$$

$$x'=\frac{ae^2\cos\varphi}{r}+y\cos\varphi-x\cos u\,\mathrm{sen}\varphi$$

$$y'=x\,\mathrm{sen}\,u$$

Los cuadrados de estas coordenadas son pues:

$$z'^2=\mathrm{sen}^2\varphi\,y^2+\cos^2u\cos^2\varphi\,x^2+2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\,xy$$

$$x'^2=\frac{a^2e^4\cos^2\varphi}{r^2}+\cos^2\varphi\,y^2+\cos^2u\,\mathrm{sen}^2\varphi\,x^2+2\frac{ae^2\cos^2\varphi}{r}y\;\cancel{2\frac{ae^2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi}{r}}$$

$$-2\frac{ae^2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi}{r}x-2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\,xy$$

$$y'^2=\mathrm{sen}^2u\,x^2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
\cos^2u\cos^2\varphi & x^2 & +\mathrm{sen}^2\varphi & y^2+2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\;xy\\
+\cos^2u\,\mathrm{sen}^2\varphi & & +\cos^2\varphi & -2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\\
-e^2\cos^2u\,\mathrm{sen}^2\varphi & & -e^2\cos^2\varphi & +2e^2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\\
-e^2\mathrm{sen}^2u & & & \\
-2\frac{ae^2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi}{r} & x & +2\frac{ae^2\cos^2\varphi}{r} & y=\\
+2\frac{ae^4\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi}{r} & & -2\frac{ae^4\cos^2\varphi}{r} & \\
+\frac{a^2e^4\cos^2\varphi}{r^2} & & & \\
-\frac{a^2e^6\cos^2\varphi}{r^2} & & &
\end{array}\right|=a^2(1-e^2)$$

Reduciendo

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
\cancel{=} & 1 & x^2+ & 1\;\;y^2+\cancel{2}e^2\cos u\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\;xy\\
-e^2(\mathrm{sen}^2u+\cos^2u\,\mathrm{sen}^2\varphi) & & -e^2\cos^2\varphi & \\
-\frac{ae^2(1-e^2)\cos u\,2\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi}{r}x+\frac{2ae^2(1-e^2)\cos^2\varphi}{r}y & & & \\
-\frac{a^2e^4\cos^2\varphi}{r^2} & & & \\
+\frac{a^2e^6\cos^2\varphi}{r^2} & & &
\end{array}\right|=a^2(1-e^2)$$

Para dar á esta expresion la forma buscada, tenemos: que el coeficiente de x^2

$$\mathrm{sen}^2u+\cos^2u\,\mathrm{sen}^2\varphi=1-\cos^2u+\cos^2u\,\mathrm{sen}^2\varphi=1-\cos^2u(1-\mathrm{sen}^2\varphi)=1-\cos^2u\cos^2\varphi$$

que como $2\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi=\mathrm{sen}\,2\varphi$, el coeficiente de xy se reduce á $e^2\cos u\,\mathrm{sen}\,2\varphi$; y el de x á, $-\frac{ae^2(1-e^2)\cos u\,\mathrm{sen}\,2\varphi}{r}$

De consiguiente representando los coeficientes que resultan por las letras A, B, C, D, E, nos queda

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey=\frac{a^2r^2}{r^2}(1-e^2)-(e^4\cos^2\varphi+e^6\cos^2\varphi)\frac{a^2}{r^2}$$

Vamos á desarrollar ahora el segundo miembro, poniendo en

en el numerador el valor de $r^2 = 1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi$ del num. 5.

Tenemos entonces

$$\frac{a^2}{r^2}\left(1+e^2-\frac{a^2}{r^2}e^4\cos^2\varphi+e^6\cos^2\varphi\right)=\frac{a^2}{r^2}(1-e^2)(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$\frac{a^2r^2}{r^2}(1-e^2)-\frac{a^2}{r^2}(e^4\cos^2\varphi-e^6\cos^2\varphi)=\frac{a^2}{r^2}\left((1-e^2)(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)-e^4\cos^2\varphi+e^6\cos^2\varphi\right)$$

$$=\frac{a^2}{r^2}\left(1-e^2-e^2\operatorname{sen}^2\varphi+e^4\operatorname{sen}^2\varphi-e^4\cos^2\varphi+e^6\cos^2\varphi\right)=\frac{a^2}{r^2}(1-e^2-e^2\operatorname{sen}^2\varphi-e^4+2e^4\operatorname{sen}^2\varphi+e^6\cos^2\varphi)$$

Para sacar como factor el cuadrado de $1-e^2$ que es igual á $1-2e^2+e^4$, dividamos el segundo factor por esta cantidad

$$\begin{array}{l|l}
1-e^2-e^2\operatorname{sen}^2\varphi-e^4+2e^4\operatorname{sen}^2\varphi+e^6\cos^2\varphi & 1-2e^2+e^4 \\
-1+2e^2\quad\quad -e^4 & \hline 1+e^2-e^2\operatorname{sen}^2\varphi \\
\hline
e^2-e^2\operatorname{sen}^2\varphi-2e^4+2e^4\operatorname{sen}^2\varphi+e^6\cos^2\varphi & \\
-e^2\quad\quad +2e^4\quad\quad -e^6 & \\
\hline
-e^2\operatorname{sen}^2\varphi+2e^4\operatorname{sen}^2\varphi-e^6+e^6\cos^2\varphi & \\
+e^2\operatorname{sen}^2\varphi-2e^4\operatorname{sen}^2\varphi\quad\quad +e^6\operatorname{sen}^2\varphi & \\
\hline
-e^6+e^6(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)=-e^6+e^6=0 &
\end{array}$$

y el segundo miembro de nuestra ecuación se reduce á $\frac{a^2}{r^2}(1-e^2)^2(1+e^2-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)=\frac{a^2}{r^2}(1-e^2)^2(1+e^2\cos^2\varphi)$

que haciendola igual á F, produce por último

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey=F$$

Nota 2ª

Formula para la determinación de la latitud de un lugar, por observaciones de la estrella polar (α Ursæ Minoris) (Prof. del Alm. Naut. inglés 1878)

$$\varphi = 90^\circ - z - d\cos h + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 1'' (d \operatorname{sen} h)^2 \cot z$$

en la que φ = latitud del lugar

z = distancia cenital verdadera de la estrella

d = distancia polar aparente de la misma

$h = S - \alpha$ = angulo horario de la estrella

S = hora sideral de la observación

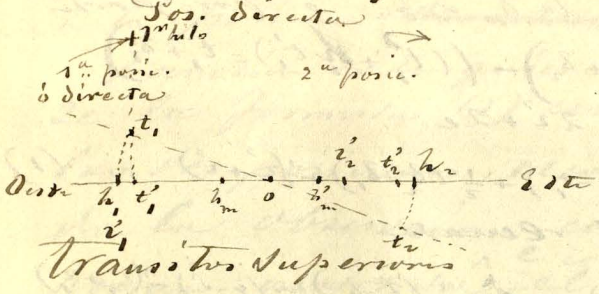
α = ascensión recta de la estrella

Cuya fórmula no es otra que la de Sitrow en la pag. 457 de este curso, con la despreciación del último término según manifiesta el Autor en la pag. 458, que puede hacerse para los casos en que no sea necesaria la mayor precisión ó cuando el instrumento no corresponda á tal grado de exactitud para la medida de z, como sucede con el sextante.

En la serie de Tablas (al fin del Almanaque) se encuentran: la Tabla I que dá el Término $d \cos h$ y está calculada para los valores promedios $d = 20' 0''$ y $\alpha = 18^\circ 45' = 1^h 15^m$; la Tabla III que depende de la diferencia entre los verdaderos valores y los mencionados para d y α, contiene

Correcciones instrumentales.

Colimacion horizontal de un telescopio astronómico ó que ~~dar~~ las imag. invertidas



Transitos superiores

1.a Posicion

~~Pos. directa~~

$i_1 .. h_1$ = punto de la observ. t_1 reducido al horizon.

t_1 = punto en que se hizo la observacion, que sobre la horizontal corresponde al t'_1

h_m = lugar del hilo medio en la 1.a posicion

o = centro optico, situado á la mitad de la distancia que el hilo medio ocupa en ambas posiciones del telescopio

$h_m o = c$ = correccion aditiva á la observacion del hilo medio para tenerla reducida al centro optico = colimacion del hilo medio

2.a posicion

t_2 = punto en que se hizo la observacion que corresponde al t'_2 en la horizontal

h_2 = lugar de la observacion reducido ya á lo que seria en la horizontal despues de corregirse por el error de nivel $t'_2 h_2$

Tenemos para la 1.a posicion intervalo de tiempo trascurrido desde la 1.a obs. reducida por la corr. de nivel al punto h_1 hasta el eje optico ó ~~$h_1 o$ igual~~

$h_1 o = h_1 h_m + c = i' + c$

Para la 2.a posicion $o h_2 = o h'_m + h'_m h_2 = c + i'$

y como el total del espacio $h_1 o + o h_2$ es igual al tpo. invertido por la estrella para pasar de h_1 á h_2 ó por partes

$$\left((t_2' + t_2' h_2) = t_2 + b_2\right) - \left((t_1^2 + h_1 t_1') = t_1 + b_1\right)$$

$$= h_1 o + o h_2 = 2z' + 2c$$

luego $c = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(b_2 - b_1) - \frac{1}{2}(z' + z') \ldots (1)$

y reducidos al ecuador

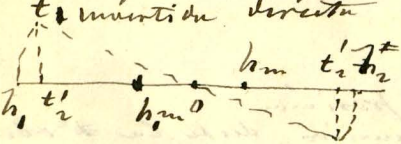
$$c = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\cos\delta + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)\cos(\gamma - \delta) - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)$$

(representando $\frac{1}{2}(z_2 + z_1)$ el intervalo ecuatorial del centro de los hilos observados) — que pudiera en general espresarse por z_2 y t_2, t_1 los promedios tambien de los tiempos en los hilos observados

Posicion-invertida.

para telescopio que invierte las imagenes

En este caso como el signo propio del intervalo ecuatorial de los hilos que se observan es negativo por ser los ultimos de la posicion directa ~~de tomo~~ ó que siempre se respeta la correccion, tenemos por el mismo razonamiento, y recordando que en tal caso el hilo medio está para la 1ª posicion ó invertida en h_m y para la 2ª ó directa en h_m



$$(t_2 + h_2) - (t_1 + b_1) = -(2z - 2c)$$

de donde $c = \frac{1}{2}(z_2 + z_1) + \frac{1}{2}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(h_2 - b_2) \ldots (2)$

correspondiendo siempre el signo que resulte para $\frac{c}{2}$ el correspondiente á la 1ª posicion en que se observa.

Tambien si se quiere puede tomarse de la formula (1) una general para las dos posiciones, recordando que cuando la observacion comienza en la posicion invertida $\frac{c}{2}$ con el signo que resulte será algebraicamente sustractivo á la observacion del hilo medio para dicha posicion invertida y aditivo en la directa como antes.

Una formula mas general sería, convirtiendo $\frac{c}{2}$ (aditiva algebraicamente en ambas posiciones)

$$\pm \frac{c}{2} = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\operatorname{cosec} \delta + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)\operatorname{cos}(\varphi - \delta)$$

En las que el signo superior corresponde á la determinacion de $\frac{c}{2}$ en la pos. directa y luego a la correccion de las observaciones hechas en la misma posicion directa de antemano; y el signo inferior á la determinacion con la posicion invertida 1ª y á la correccion de las observaciones de tránsito hechas para el hilo medio en la posicion invertida del anteojo

y como el total del espacio $h_1 o + o h_2$ es igual al tpo. invertido por la estrella para pasar

Para mayor claridad, ~~p~~

En esta ultima espresion y p.a los transitos superiores:

t_1 = promedio de las horas de observacion ~~de la 1.a observacion~~ de los hilos ~~en~~ en la 1.a posicion

t_2 = promedio de las horas de observacion de los mismos hilos en la segunda posicion

$b_1 = \frac{1}{60}((o_1+o_1') - (e_1+e_1'))v$ ~~$\frac{1}{2}(e_1 - o_1)v$~~ correccion por nivel en la 1.a posicion

$b_2 = \frac{1}{60}((o_2+o_2') + (e_2+e_2'))v$ ~~$\frac{1}{2}(o_2 - e_2)v$~~ la propia correccion en la 2.a

i = promedio de los intervalos ecuatoriales en la especie de tpo. que marca el cronometro que corresponden con su signo á los hilos observados.

φ = latitud geografica del lugar

δ = declinacion de la estrella tomado con su signo correspondiente

o_1 e_1 lecturas del nivel hacia el lado Oeste y Este en la 1.a posicion

o_2 e_2 las dichas lecturas en la 2.a posicion

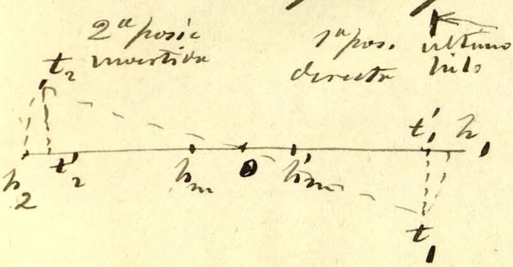
v = valor de una division del nivel montante espresada

en ~~el tiempo correspondiente~~ arco al crono-
metro con que se observa y que como
el denominador esta multiplicado por 15 = 60 esta ya
reducido á tpo. sideral que para el num.[illegible] se puede tomar por solar
y como tambien los otros términos re-
sultan en la misma especie de
tiempo del cronometro -

c = colimacion en tpo. del crono-
metro que habrá antes que ~~tr~~ tra-
ducirse á sideral ó puesta
solar para poderlo espre-
sar en arco -

Transitos inferiores

con [illegible] que invierte -



Como en este caso entra la estrella
por el ultimo hilo:
~~esp~~ espacio de tiempo de h_1 á h_2 ó

$$(t_2+z_2)-(t_1+z_1) = -(2i-2c)$$

que reducidos los t_1 é i al ecuador
y los z á la distancia zenital en que se obser-
va la estrella, da

$$c = \tfrac{1}{2}(t_2-t_1)\cos\delta$$

UNAM

FECHA DE DEVOLUCIÓN

El lector se obliga a devolver este libro antes del vencimiento de préstamo señalado por el último sello

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTÓNOMA DE
MEXICO