Vol. VI ANALES DEL INSTITUTO DE GEOFISICA 1960
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

SUBSTITUCIONES DE DISTRIBUCIONES

Una aplicación de las series de Taylor

Anselmo Chargoy*

RESUMEN

It is shown how a system of multipoles can be used to replace a distribution of mass points in space that has measurable properties in each point, i.e. gravitational, electric or magnetic mass distribution.

Algebraic properties are used to determine the center of the given distributions.

Is is shown how a substitution criterium may be applied to the treatment of divergent series.

Any distribution has its own symmetry axis. This leads to difinitions of canonical equations.

* Instituto de Geofísica, U.N.A.M. e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Applications to moments of inertia, Newton's potential and other cases are presented.

Finally, it is shown how a trigonometrical series can be considered as a substitution of distrbutions.

I.- INTRODUCCION

Se citan algunos ejemplos que justifican este trabajo:

a) Dada la ecuación de Gauss[1] del potencial magnético debido al campo observado sobre la superficie de la tierra y de origen interno.

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} T_n , \tag{1.1}$$

$$T_n = \sum_{m=0}^{n} (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda)\, P_n^m(\theta)$$

en que a es el radio de la tierra, $r \geqslant a$, (r, λ, θ) son las coordenadas del observador. En lo que sigue se escribirá P_n^m para los polinomios de Legendre $P_n^m(\theta)$.

Dada la ecuación (1.1) existe una gran variedad de modelos que se pueden hacer corresponder en el sentido que produzcan el potencial dado por el segundo miembro. Dos son los principales modelos adoptados, el primero: un sistema de multipolos definidos por Maxwell[2], los cuales serán repetidos en el presente trabajo en forma generalizada.

Estos multipolos son constituídos por puntos singulares que residen en el orîgen de coordenadas o adheridos a él.

Cada multipolo describe uno de los términos de la ecuación (1.1), es decir, que hay uno para cada n.

Otra interpretación de la ecuación (1.1) es considerar que el modelo que describe el primer término T_1 no resida en O, sino en otro punto C que Schmidt[3] define como centro de la fuente que puede producir el campo cuyo potencial es la ecuación (1.1).

En el presente trabajo se trata de explicar la infinidad de soluciones (modelos) para producir el efecto de la ecuación (1.1) así como también de generalizar el criterio de centro C de una fuente que produzca el potencial dado en (1.1).

b) En el caso del potencial Newtoniano aplicado a la masa contenida en un esferoide oblato[4], medido el potencial V para puntos $P(r, \lambda, \theta)$ exteriores; siendo los semi ejes: a, b, la densidad ρ, se tiene

$$V = 4\pi a^2 b \rho \left[\frac{1}{3r} - \frac{m^2}{3.5} \frac{P_2}{r^3} + \frac{m^4}{5.7} \frac{P_4}{r^5} - \dots \right] \qquad (1.2)$$

en el cual $m^2 = a^2 - b^2$, $r \geqslant m$.

La ecuación (1.2) es la solución de una ecuación diferencial y al sugerirse una interpretación del segundo miembro de acuerdo con la definición de potencial gravitacional (Newtoniano) que en una masa M residendo en un punto Q a la distancia r de P proporciona el potencial medido en P:

(1.2') $V = \frac{M}{r}$, con este criterio el primer término de (1.2), $V_1 = \frac{4\pi a^2 b \rho}{3r}$ representa el potencial de la masa encerrada en el oblato, como residiendo en origen de coordenadas; pues es $M = \frac{4}{3}\pi a^2 b \rho$. En cambio si se analiza el segundo término:

$-\frac{4\pi a^2 b \rho m^2 P_2}{3.5 r^3}$ se ve que esta expresión se aleja mucho de la aefinición dada en (1.2'). Puede establecerse que si en (1.2) el segundo miembro mide potencial del tipo (1.2'), cada término mide también potencial de ese tipo. Así para

$V_2 = -\frac{4\pi a^2 b m^2 \rho P_2}{3.5 r^3}$ existe un sistema de puntos similar a los modelos usados para la ecuación (1.1) de Gauss, que no se aparta de la definición (1.2') y produce el potencial V_2, así se tendrán modelos para

$$V_3 = \frac{4\pi a^2 b \rho m^4 P_4}{5.7 r^5}, \quad \text{etc.}$$

Una generalización de este problema se encuentra en la tesis de W.S. Frasser[5]. En la cual se trata del potencial gravitacional debido a una distribución de masa en el interior de un volúmen y medido desde puntos exteriores por medio de la ecuación

$$V_p = G \int_V \frac{\rho(r_0)\ dt_0}{|R - r_0|} \tag{1.3}$$

fórmula propuesta por su autor para trabajos de tipo gravimétrico.

c) En los trabajos sobre Sismología de R. Teisseyre[6] se define la medida de una intensidad por medio de

$$u_k = \sum_{l=1}^{\infty} u_k^{(l)} \tag{1.4}$$

en que

$$u_k^{(l)} = \frac{1}{(l-1)!} \left[\frac{\partial^{l-1}}{\partial x'_a\ \partial x'_b \ldots} A_{sabc\ldots} u_{ks}^{(1)} \right]_{x'=0}$$

con estas ecuaciones se sustituye el foco sísmico por una distribución focal adherida al centro O de coordenadas de referencia. Con este ejemplo se ve que el uso de multipolos sustituyendo a la distribución, no sólo se aplica al caso del potencial, como pudieran sugerirlo los ejemplos a) y b), sino a la "medida" de propiedades que se encuentran en el espacio. Estas propiedades se producen por objetos o fenómenos con residencia puntual.

d) Es obvio que en el caso del momento M estático de una viga, libre en un extremo y empotrada en otro, con respecto al punto de empotramiento y que viene dado en la ecuación.

$$M = \int_0^l P\, l\, dl = \frac{Pl^2}{2} = (Pl)\left(\frac{l}{2}\right) \tag{1.5}$$

presenta el caso de una sustitución de todo el peso de la viga $(P\,l)$ actuando a la distancia $\frac{l}{2}$ del punto del empotramiento, es decir actuando en un solo punto.

Aunque la sustitución resulta muy clara, se presenta aquí como un ejemplo más de tipo diverso a los anteriores y en que se presenta la operación sustitución, objeto de este trabajo.

Otro ejemplo aunque bien conocido también se menciona, es el del potencial

$$V = \frac{M}{r} \tag{1.6}$$

de un cascarón esférico homogéneo medido desde puntos exteriores, que puede obtenerse directamente por integración. La sustitución es clara.

e) En las ecuaciones (1.1) y (1.2) V es obtenida como solución de la ecuación diferencial $\nabla^2 V = 0$, como se ve en las referencias. En la ecuación (1.3) V es obtenida por un desarrollo en serie, de una función que define la medida de una propiedad que el espacio tiene en un punto, lo mismo puede decirse de (1.4). En las ecuaciones (1.5) y (1.6) se tienen por resultados de la integración de una función $\Sigma m_i f(r_i)$ que define la medida de propiedades que dá el espacio, un sistema de puntos $\{m_i\}$. A pesar de que en los ejemplos vistos se pueden obtener los resultados por diferentes métodos, en todos los casos se está efectuando una misma operación:

$$\text{(a)} \quad V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} m_i \frac{b_i^k}{k!} \frac{\partial^k f(r_i)}{\partial b_i^k}$$

y por este desarrollo pudieron tenerse los resultados de (1.1) a (1.6)

En (a) la primera $\sum_{i=0}^{n}$ se refiere a la operación con respecto al conjunto de puntos $\{m_i\}$ que produce anomalías medibles en el espacio.

De los ejemplos vistos se sugiere un análisis de (a), y tal es el objeto de este trabajo.

II ANALISIS EN UNA DIMENSION

Por comodidad se comenzará la exposición haciendo el análisis en una dimensión, ya que al pasar al caso de tres dimensiones se ve muy facilmente que se heredan las propiedades que se mencionan en una dimensión.

Definición 1: Punto singular Q de dimensión cero de coordenada $(-b)$, $b>o$, es un punto al cual se asigna un número m real.

Definición 2: (2.1) $V\ (m) = m\ f(r)$, es la medida de la propiedad que en el espacio se tiene por la presencia de m en Q, medida tomada en el punto $P(x)$, con $r = x + b$, f real, tiene todas sus derivadas, $r > 0$ es la distancia $\overline{PQ}$.

Q se tomó a la izquierda de O por comodidad pero se ve que puede considerarse a la derecha.

Definición 3: Distribución es una colección de puntos $\{Q_i(-b_i)\}$ singulares.

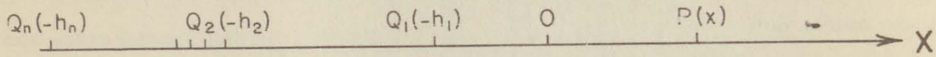

Fig. 1

Axioma I: V es lineal, en el sentido de que se verifican

$$V(m_i) = \Sigma\ m_i f(r_i),\ r_i = x + b_i. \tag{2.2}$$

si $\{m_i\}$ reside en Q entonces

$$V(m_i) = (\Sigma\ m_i)\ f(r)$$

$$V(cm) = c\,V(m).$$

Teorema Fundamental: Un desarrolo de Taylor de (2.1) es una medida V de una distribución S que sustituye a la distribución $S_0 = \{m_i\}$ dada. Sea

$$V(m_i) = \{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{p} \frac{m_i b_i^l}{l!} f^{(l)}(x) \} + \{ \sum_{i=1}^{n} R_i \} \tag{2.3}$$

el primer paréntesis del segundo miembro está midiendo una distribución que reside en una δ vecindad del orígen, con $\delta \to 0$. El segundo paréntesis mide una distribución extendida sobre OQ_n ver figura 1.

En particular este trabajo se refiere al caso cuando $R_i \to 0$, para toda i si $p \to \infty$ con lo cual

$$V(m_i) = \lim \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m_i b_i^l}{l!} f^{(l)}(x) \tag{2.4}$$

Así, la distribución S_0 ha sido sustituida por una S residiendo en una δ vecindad del orígen.

En efecto: sea la distribución que consta de un solo punto $Q(-b)$ en el cual se localiza m, entonces (2.4) puede escribirse

$$V(m) = \lim \sum_{l=0}^{p} \frac{m b^l}{l!} f^{(l)}(x) \tag{2.5}$$

$p \to \infty$, en adelante se omitirá la notación lim.

Al analizar cada término $V_l = \frac{m b^l}{l!} f^{(l)}(x)$ se encuentra:que si $l = o$ se tiene $V_o = m f(x)$, es decir desde $P(x)$ se está midiendo m residiendo en el orígen. Si $l = 1$ se tiene $V_1 = m b f'(x)$ que no tiene la forma de la definicion 1 pero si se recurre a la definición de derivada se encuentra que

$$V_1 = \lim_{\Delta x \to 0} m b \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \tag{2.6}$$

es obvio que en $\frac{mb}{\Delta x} f(x + \Delta x)$ se está midiendo una m multiplicada por un número $\frac{b}{\Delta x}$, es decir $(+cm)$, se está con el Axioma I, residiendo este $(+cm)$ en el punto A de coordenada $(-\Delta x)$, también, en el término $-\frac{mb}{\Delta x} f(x)$ se está midiendo $(-cm)$ localizado en el orígen, entonces en

$$m b \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se está midiendo el sistema de puntos $(+cm)$ y $(-cm)$ localizados en A y O, este sistema se denominará dipolo.

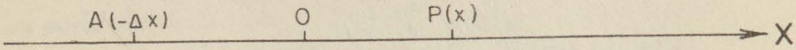

Fig. 2

Si $\Delta x \to 0$, $A \to O$ el sistema se denominará punto singular de orden uno con residencia en O.

El que pueda simplificarse el segundo miembro de (2.6) hasta desaparecer la expresión $f(x)$, no aparta a V_1 de que esté dentro de las definiciones 1 a 3.

Para el análisis de $V_2 = m \frac{b^2}{2!} f''(x)$ pueden seguirse los pasos como en V_1 y escribir $V_2 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{m b^2}{2!} \; \frac{[f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)]}{\Delta x^2}$

como se ve se tiene un sistema de puntos singulares residiendo en $-2\Delta x$, $-\Delta x$ y en el origen.

Es obvio que para $V_n = m \frac{b^n}{n!} f^{(n)}_{(x)}$ se tendrá un sistema de puntos singulares residiendo en $-n\Delta x$, $-(n-1)\Delta x, \ldots \Delta x$ y en el orígen, es decir en (2.5) en lugar de la propiedad $V(m)$, dado por m, está midiendo una sustitución S que reside en una δ vecindad del origen $\delta \to 0$.

Si se pasa ahora al caso de una colección $\{m_i\}$ se tendrá

$$V(m_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) f(x) + \ldots$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i b_i^p}{p!} \right) f^{(p)}(x) + \ldots$$

Se ve que en el primer término se está midiendo $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, localizado en el orígen. También en $V_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i b_i^p}{p!} \right) f^{(p)}_{(x)}$ se está midiendo un sistema de puntos singulares localizados en $(-p)\Delta x, [-(p-1)]\Delta x, [-(p-2)]\Delta x, \ldots \Delta x$ y el orígen, con la condición que $\Delta x \to 0$; es decir un sistema residiendo en una δ vecindad del orígen con $\delta \to 0$.

Se tiene entonces que la sustitución S de S_0 va a residir en una vecindad del orígen.

En lo que sigue, cuando se hable de δ la vecindad del orígen se entendera que $\delta \to 0$.

También se dirá que si $Q(m, \Delta x)$ es un punto singular tal que toda δ de O siempre contiene Q, entonces Q está adherido a O.

En general, $V_n = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b_i^p}{p!} \right) f^{(p)}(x)$ está midiendo un punto singular residiendo en el orígen O.

Se expone en el presente trabajo una propiedad algebraica de una sustitución S de S_0.

Sea una distribución S_0 que consta de un solo punto singular: el número m residiendo en $Q(-b)$. Sea S_1 la sustitución que expresa $V = m f(r)$ como $V = m f(x) + m b f'(x) + \ldots$ si se aplica una nueva sustitución S_2 en esta última ecuación considerando un nuevo centro $O_2(k)$ es decir $\overline{OO_2} = k$.

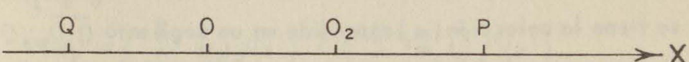

Fig. 3

se tiene

$$V = m f(x') + m k f'(x') + m b f'(x') + \cdots \tag{2.7}$$

Simplificando se ve facilmente que es

$$V = m f(x') + m(k+b) f'(x') + \frac{m(k+b)^2}{2!} f''(x') + \ldots$$

Puede expresarse la sustitución S_2 aplicada a S_1 y ésta a S_0 en la siguiente igualdad:

a) $S_2 S_1 S_0 = S S_0$, o bien $S_2 S_1 = S$

es decir, pudo haberse hecho la sustitución S que lleva a m a la vecindad δ de O_2 en lugar de las dos sustituciones sucesivas S_1 y S_2.

Se prueba facilmente en el caso de la sola m que se está tratando, que existe la sustitución S_1^{-1}, tal que

b) $S_1^{-1} S_1 S_0 = S_0$

es decir que toda S_i tiene su inversa S_i^{-1} tal que

c) $S_i^{-1} S_i\ S = S$ la sustitución que deja a S en su lugar.

También se ve facilmente que

d) $(S_3 S_2) S_1 = S_3 (S_2 S_1)$

Con las propiedades a), b), c), d), se dice que el conjunto $S_0, S_1, S_2, \ldots$ forma grupo.

Si se tiene la colección $\{m_i\}$ extendida en un segmento $\overline{Q_1 Q_n}$, Q_1 contiene a m_1, Q_n contiene a m_n; entonces se ve que se verifican solamente las ecuaciones a) $S_2 S_1 S_0 = S S_0$ y la d) $(S_3 S_2) S_1 = S_3 (S_2 S_1)$. Para S_1 no existe S_1^{-1} tal que $S_1 S_1^{-1} S = S$, pues para cualquier i, S_i lleva la sustitución $S_{i-1} S_{i-2} \cdots S_0$ a una δ vecindad de un origen O_i.

En cambio si se considera al conjunto $S_1, S_2, \ldots S_n$ éste si tiene las propiedades a), b), c), d), es decir forma grupo.

Definicion 4: Sustitución propia es una S tal, que lleva S_0 a una vecindad δ de un punto del intervalo $[Q_1, Q_n]$.

Definición 5: Centro de una distribución S_0 es un punto O_c tomado como origen, en el cual la sustitución S_c es propia y en el desarrollo de

$$V(m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m_i\, b_i^{l}}{l!} f_{(x)}^{(l)} .$$

se verifica que el segundo término del segundo miembro tiene un valor absoluto mínimo.

De esta manera si $m_i > 0$ para toda i, la definición 5 implica que

$$(\sum_i m_i b_i)\, f'(x) = 0 \tag{2.8}$$

es decir $\sum_{i=1}^{n} m_i b_i = 0$ cuando se ha tenido sustitución S_c.

Sea una sustitución cualquiera, S_1 de S_0 entonces

$$V(m_i) = (\sum_{i=1}^{n} m_i)\, f(x) + (\sum_{i=1}^{n} m_i b_i)\, f'(x) + \ldots$$

Sea una S_2 de S_1, tal que se verifique $S_2\, S_1\, S_0 = S_c\, S_0$ entonces

$$V(m_i) = (\sum_{i=1}^{n} m_i)\, f(x') + (\sum_{i=1}^{n} m_i b_i)\, f'(x')$$

$$+ (\sum_{i=1}^{n} m_i)\, k f'(x') + \ldots .$$

se usa la anotación x' referida a O_2 para tenerla diferente de x que está referida a O_1.

La condición $S_2 S_1 = S_c$ conduce a que $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) k + \sum_{i=1}^{n} m_i b_i = 0$ o bien

$$k = -\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (2.9)$$

k coordenada de O_2 con respecto al origen considerado en la sustitución S_1.

Así se encuentra que O_2 es el centro de masa como se define en Física. El signo menos resulta de suponer a O_2 residiendo a la derecha de O_1.

La ecuación (2.9) está diciendo que el centro O_c de una sustitución es independiente de lo que de ella se esté midiendo.

Si la distribución consta de dos puntos singulares $Q_1\,(m_1)$, $Q_2\,(-m_2)$; m_1, $m_2 > 0$; $m_1 \neq m_2$, se comprueba facilmente que el centro O es el punto Q que contenga la mayor m.

Si $m_1 = m_2 = m$ entonces en $V(m_i) = m\,(b_1 - b_2)\, f'(x)$

$$+ m\,\frac{b_1^2 - b_2^2}{2!}\, f''(x) + \ldots$$

según la definición 5, para que el segundo término del segundo miembro sea mínimo en valor absoluto se debe tener $b_1 = \pm b_2'$ es obvio que se tendrá que tomar el signo menos si Q_1 y Q_2 no coinciden. El centro O_c es entonces el punto medio de $\overline{Q_1 Q_2}$ la medida $V(m_i)$ puede escribirse entonces

$$V = 2\,mb\,f'(x) + \frac{2\,m\,b^3}{3!}\, f'''(x) + \ldots \qquad (2.10)$$

ya se dijo en la ecuación (2.6) que el término $V_1 = 2\,m\,b\,f'(x)$ está midiendo un dipolo, pero sin apartarse de la definición de

$$V(m) = m\,f(r)\,.$$

Sin embargo en $V_1 = 2mbf'(x)$ es como si estuviera midiendo el número $2mb = ml$ residiendo en el origen O, con la función $f'(x)$, de aquí que convenga definir el número ml en su residencia, como punto singular, de orden uno con momento ml.

Es obvio que con puntos singulares de orden uno pueden efectuarse la operaciones S aplicándose las definiciones y bajo los axiomas vistos para distribuciones de puntos singulares de orden cero.

Así si se tiene $M = ml$ residiendo en Q su medida es $V_1 = Mf'(r)$.

Una sustitución S de este punto singular está dada por la ecuación

$$V(M) = Mf'(x) + Mbf''(x) + \dots \tag{2.11}$$

Para una colección $\{M_i\}$

$$V(M_i) = (\Sigma M_i) f'(x) + (\Sigma M_i b_i) f''(x) + \dots$$

Si la colección M consta de los puntos singulares $Q_1(-b_1)$ que contiene al número $(+ml)$, y $Q_2(-b_2)$ que contiene a $(-ml)$, $\overline{Q_1 Q_2} = l_2 = b_1 - b_2$ entonces la medida de esta distribución es

$$V(M_i) = ml \; l_2 f''(x) + \dots$$

en esta ecuación es como si se estuviera midiendo el número $ml l_2$ con residencia en el origen O y con la función $f''(x)$.

El número $ml l_2$ con residencia O define un punto singular de orden dos. (cuadripolo en el cuál las distancias entre los polos tienden a cero).

Continuando en esta forma, se generaliza el criterio y un punto singular de orden n es el número $M_n = m l_1 l_2 \dots l_n$ con residencia en un punto Q.

El momento M_n del punto singular de orden n corresponde a un múltipolo del mismo orden. Si un momento M_n se multiplica por un número C constante, se sigue teniendo momento de punto singular del mismo orden que se mide con la función $f^{(n)}(r)$. En tal forma que la ecuación, (2.5) aplicada a una distribución que consta de un punto singular de orden cero es el producto escalar de los vectores.

$$V(m) = (m, \frac{mb}{1!}, \frac{mb^2}{2!}, \ldots).(f(x), f'(x), f''(x), \ldots). \tag{2.12}$$

una colección de puntos singulares de momentos que son componentes del primer vector y residiendo en el orígen O. Medidos respectivamente por las funciones, componentes del segundo vector.

III UNA CUESTION DE CONVERGENCIA

Si se usa la expresión (2.12) para una colección $\{m_i\}$ y esta colección reside en un intervalo acotado $[Q_1, Q_n]$ se tiene la medida

$$V(m_i) = (\sum_i m_i , \frac{\Sigma m_i b_i}{1!} , \frac{\Sigma m_i b_i^2}{2!} , \dots) \tag{3.1}$$

$$(f(x), f'(x), f''(x), \dots)$$

en que facilmente se ve que la convergencia de V depende de $f(r)$.

En especial es interesante el análisis de funciones $f(r)$ en que sus derivadas son potencias de r. Por ejemplo $f(r) = r^{-n}$, $\log r$, .. etc, en estos casos la sustitución $V = m f(x) + \frac{mb}{1!} f'(x) + \frac{mb^2}{2!} f''(x) + \dots$ describe la sustitución S formal para toda x. Sin embargo, existen ciertos intervalos de valores x, en los cuales la sustitución S propuesta no define un número V.

Para la familia de funciones que se está analizando, puede entonces aplicarse el principio de reciprocidad, que en el presente trabajo se usa en la siguiente forma: en el mismo sistema de referencia para la ecuación (3.1) considérese un cambio en que P, el observador, pasa a $P(b)$ y $Q(m)$ a la coordenada x de tal manera que $\overline{PQ} = r$, y en vez de la sustitución S (3.1) se tiene la S':

$$V(m) = m f(b) + m x f'(b) + \frac{m x^2}{2!} f''(b) + \dots \tag{3.2}$$

sustitución convergente para la familia que se está considerando en regiones en que S es divergente.

Aplicación: sea

$$V = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots \tag{3.3}$$

la cuál diverge para $|x| \leqslant 1$. Si se supone que a través de (3.3) se está midiendo una distribución. El criterio que el primer término sugiere es que $V = \frac{m}{r}$ entonces a la (3.1) se le puede hacer corresponder una (3.2) "asociada".

Se ve facilmente que se tiene: $m = 1$, $Q\,(+1)$, $f(r) = \frac{1}{r}$ de tal manera que

$$S: V = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

$$S': V = -1 - x - x^2 - \ldots$$

donde S es divergente, S' es convergente y viceversa.

El punto $x > 0$ en el que no está definida V, es en $x = 1$.

Una manera de resolver el valor de V en este caso, es con el criterio de valor promedio. Para $x = b$, puede usarse la ecuación (3.1) o (3.2) o bien el promedio entre las dos:

$$V\,(m) = \frac{m}{2}\,[\,f(x) + f(b)\,] + \frac{m}{2}\,[\,b f'(x) + x f'(b)\,] + \ldots$$

con lo cuál se tiene

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^3} - x^2\right) + \ldots$$

y si $x = 1$. $V = 0$, desde luego se toman valores promedios asociando los términos que miden puntos singulares del mismo orden.

En cuanto al caso en $x = -1$

$$\text{en } S : V = -1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$\text{en } S' : V = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

Sin embargo cuando $x \to -1$, con $x > -1$ se obtiene de (3.3) que $\lim V = -1/2$.

También cuando $x \to -1$, con $x < -1$, $\lim V = -1/2$ por lo cual es de aceptarse que cuando $x = -1$, $V = -1/2$. Es decir, se sugiere que la serie infinita $V = -1 + 1 - 1 + \ldots$, tome el valor promedio entre -1 y 0.

Ejemplo **II**: Sea la serie

$$V = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots$$

como en ejemplo **I**, se sugiere que $f(r) = \frac{1}{r}$; en la ecuación dada falta el término de dipolo lo cual significa que el centro O de la sustitución es el centro O_c. Se ve que la distribución $m_1 = 1/2$ con residencia en $Q_1 = 1$ y $m_2 = 1/2$ con residencia en $Q_2 = -1$. Satisfacen que

$$S : V(m_i) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots$$

desde luego que V no converge si $0 < x < 1$. Procediendo como en ejemplo **I** se tiene para m_1,

$$S'(m_1) : V(m_1) = -\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \ldots$$

también para m_2 es:

$$S'(m_2) : V(m_2) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \dots$$

por lo tanto

$$S'(m_i) : V(m_i) = -x - x^3 - x^5 - \dots$$

de manera que donde $V(S)$ es divergente, la medida V está dada por $V(S')$. Para el caso $x = +1$, conviene proceder como el ejemplo I.

Es obvio que el artificio para establecer S' pudo hacerse a partir de que $f(x+b) = f(b+x)$.

IV MULTIPOLOS Y PUNTOS SINGULARES

En la geometría del presente trabajo, se trata del espacio tridimensional, euclidiano.

Se usarán paralelepípedos que por sus dimensiones se definen como sigue: paralelepípedo de dimensión cero, un punto A; paralelepípedo de dimensión uno, un segmento de recta $\overline{AB}$, con arista $\overline{AB}$ y vértices A y B; paralelepípedo de dimensión dos (paralelogramo) un paralelepípedo de dimensión uno como en el caso que antecede $\overline{AB}$ y otro $\overline{A'B'}$ desplazando paralelamente con respecto al anterior en tal forma que uniendo A' con A, B' con B ahora se tienen cuatro vértices, cuatro aristas; paralelepípedo de dimensión tres, un paralelepípedo de dimensión dos como el que antecede $ABCD$ y otro $A'B'C'D'$ desplazado paralelamente al $ABCD$ uniendo también A' con A, B' con B etc., paralelepípedo de dimensión cuatro: como en los casos anteriores, uno de dimensión tres, $ABCD \ldots H$ y otro desplazado paralelamente $A'B' \ldots H'$, uniendo A con A', B con B', etc.

Se ve que en esta forma se pueden seguir obteniendo paralelepípedos de dimensiones cinco, seis, etc. En un paralelepípedo de dimensión n de cada uno de sus vértices salen n aristas. Todos los paralelepípedos están sumergidos en el espacio de dimensión tres.

Si $\overline{AB}$ es una arista se dirá que los vertices A y B son contiguos.

Se tiene un punto $P(x)$ de ordenada $x = a$ en el eje $\overline{X'X}$; se tiene un punto $Q(x + \Delta x)$, con $\Delta x \to 0$; en el limite, se dice que Q es punto adherido a P, cualquier vecindad $U(P)$ es también $U(Q)$, es decir siempre $Q \in U(P)$, puede decirse que P es adherente al punto Q.

Si en uno de los vértices A de un paralelepípedo de dimensión n se supone residiendo un número real $(+m)$ y en los vértices contiguos los elementos $(-m)$, y en esta forma se cubren todos los vertices del paralelepípedo por elementos $(+m)$ ó $(-m)$, se dirá que se tiene un multipolo de orden n.

Al multipolo así definido se le hace corresponder un momento que consiste en el producto

$$M_n = C_n\, m\, l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n .$$

$l_1, l_2, \ldots l_n$ son las longitudes de las aristas que nacen en A.

Si se consideran las direcciones de esas aristas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, ... se dice que el 2^n polo tiene n ejes.

C_n es un número constante que se ha escogido por algún criterio, vg. $C_n = n!$. [7].

Supóngase que en el 2^n polo se tenga $l_1 \to 0$, $l_2 \to 0, \ldots l_n \to 0$ pero en tal forma que $m \to \infty$ para que el número $C_n m l_1\, l_2 \ldots l_n$. sea número finito; se dice entonces que A es punto singular [2] de orden n. (Es frecuente que se use multipolo por punto singular).

En éste último caso, en el paralelepípedo de dimensión n, los $2^n - 1$ vértices diferentes del punto A son adheridos al A. A es adherente al conjunto de los otros $2^n - 1$ vértices del paralelepípedo, es decir que una $U(A)$ vecindad de A siempre contiene a los $2^n - 1$ vértices por pequeña que se la U. En esta forma un punto singular de orden n tiene n ejes.

V SUSTITUCIONES EN GENERAL

Las definiciones 1 a 3 del capítulo II se mantienen, la generalización es la siguiente:

Las coordenadas de Q son x_0, y_0, z_0; las del punto P son x, y, z. De manera que en la ecuación

$$V(m) = mf(\rho),$$

ρ es el número no negativo

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

desde luego el sistema de referencia es ortogonal.

También se mantienen los axiomas 1 y 2. Con lo cual $V(m_i)$ es función aditiva de conjunto con respecto a la distribución $\{m_i\}$ y es función de punto respecto a $P\ (x, y, z,)$.

La medida V de $\{m_i\}$ puede expresarse por la ec. (a) dada en el capítulo I.

En efecto, sea la distribución que consta de un solo punto Q, (ver fig. 4) que contiene a m, es claro que

$$V(m) = mf(r) + mh \frac{\partial f}{\partial h} + \ldots$$

y para una distribución $\{m_i\}$ se tiene

$$V(m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{t} m_i \frac{h_i^k}{k!} \frac{\partial^k f(r)}{\partial h_i^k} + \sum_{1}^{n} R_i \qquad \text{(a)}$$

como se dijo en el capítulo II, aquí se consideran funciones para las cuales $R_i \to 0$, toda i cuando $t \to \infty$, aunque en el capítulo III se vió una forma de generalizar.

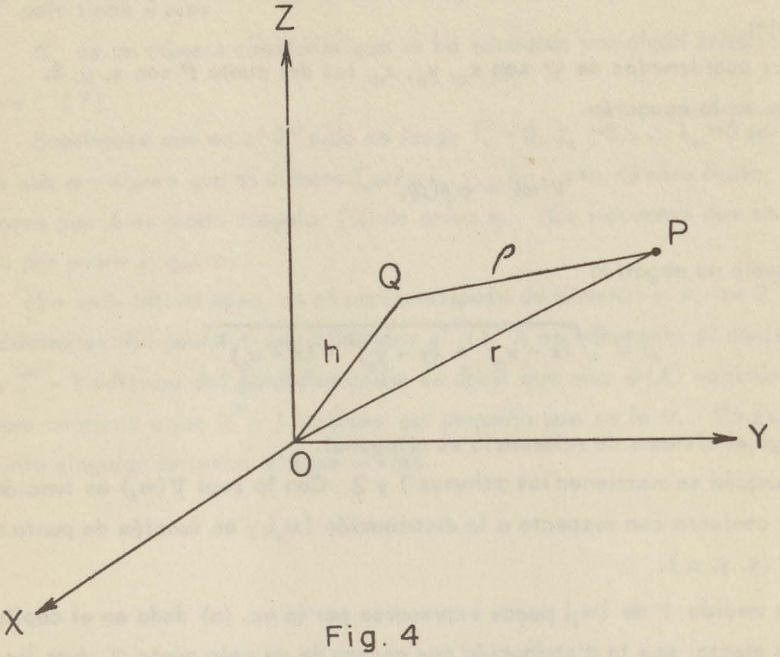

Fig. 4

Puede enunciarse el teorema que fundamenta las sustituciones: En la ecuación (a) se está midiendo una distribución S que sustituye a la distribución dada $S_0 = \{m_i\}$.

Esta S consiste en una colección de puntos singulares de todos los órdenes, con residencia en el orígen de coordenadas.

Desde un punto de vista geométrico, O es la adherencia de S. Toda $\overline{U}(O)$ contiene a S.

En efecto: Sea la distribución que consta de un solo punto m, entonces

$$V(m) = m f(r) + m \frac{b}{1!} \frac{\partial f(r)}{\partial b} + \dots$$

Se está midiendo como se dijo en el capítulo II una colección de puntos singulares de ordenes cero, uno, ... etc., residiendo en O.

También en $V(m_i)$ al travez de (a) se está midiendo la colección:

$$V_0 = (\Sigma m_i) f(r), \qquad V_1 = \Sigma m_i b_i \frac{\partial f(r)}{\partial b_i},$$

$$V_2 = \Sigma m_i \frac{b_i^2}{2!} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial b_i^2}, \qquad V_n = \Sigma m_i \frac{b_i^n}{n!} \frac{\partial^n f(r)}{\partial b_i^n}$$

de puntos singulares de todos los ordenes residiendo en O.

Una colección de puntos singulares de orden n, residiendo en O, se puede reducir a un solo punto singular del mismo orden. En efecto, para $n = 0$, es evidente; para $n = 1$ se tiene

$$m_j b_j \frac{\partial f}{\partial b_j} = m_j \overline{b}_j \cdot \nabla f$$

$$V_1 = \sum_i m_i \overline{b_i} \cdot \nabla f = (\Sigma m_i \overline{b_i}) \cdot \nabla f$$

haciendo $\sum_i m_i \overline{b}_i = \overline{u}$ entonces $V_1 = \overline{u} \,.\, \nabla f$ está midiendo un punto singular de orden uno, residiendo en O.

La ∇f puede escribirse como la matriz

$$A = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad \text{con lo cual} \quad V_1 = \overline{u} A.$$

En $V_2 = \Sigma\, m_i \dfrac{h_i^2}{2!} \dfrac{\partial^2 f}{\partial h_i^2}$ se puede proceder como sigue, aprovechando que puede escribirse en función de coordenadas cartesianas:

$$V_2 = \frac{1}{2}(u_x, u_y, u_z)\; B \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{en}$$

que $B = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$, x, y, z indices que indican derivación parcial como se usa frecuentemente.

Las componentes del vector

$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y las del vector

$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$ satisfaciendo las condiciones [8]:

$$u_x v_x = \Sigma\, m_i x_i^2 \;, \qquad u_y v_y = \Sigma\, m_i y_i^2 \;,$$

$$u_x v_y = \Sigma m_i x_i y_i \;, \qquad u_z v_y = \Sigma\, m_i z_i y_i \;,$$

$$u_x v_z = \Sigma m_i x_i z_i \;, \qquad u_z v_z = \Sigma\, m_i z_i^2 \;,$$

Como se ve se esta midiendo con la matriz B un momento de cuadripolo M_2, con los ejes en las direcciones $\bar{u}$ y $\bar{v}$, este cuadripolo reside en O.

En V_3 se está como en V_2, ante las operaciones:

$$V_3 = \frac{1}{3!}\, \bar{u}\; [\, (C\, \bar{w})\; \bar{v}\,]$$

en que C es matriz de $3 \times 3 \times 3$ elementos provenientes de las parciales terceras de $f(r)$ con respecto a los variables x, y, z. Las matrices $\overline{w}$, $\overline{v}$ son tomadas en forma de las trnspuestas de (w_x, w_y, w_z), (v_x, v_y, v_z), y van a la derecha de la matriz C; las componentes de $\overline{u}$, $\overline{w}$, y $\overline{v}$ se determinan como en V_2.

Se tiene en esta forma que V_3 mide un punto singular de orden tres, residiendo en O, con ejes en las direcciones dadas por $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$; la generalización para V_n es obvia. Desde luego que si la distribución consta de un solo punto, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, ... tienen la dirección en $\overline{OQ}$, que es el caso visto en capítulo II.

La ecuación (a) puede escribirse: (5.1) $V = T.\ F$ producto interior de los vectores

$$T = \left(\Sigma m_i, \frac{1}{1!}\overline{u}_1, \frac{1}{2!}\{\overline{u}_2, \overline{v}_2\}, \frac{1}{3!}\{\overline{u}_3, \overline{v}_3, \overline{w}_3\}, \dots \right)$$

$$F = (f(r), A, B, C, \dots M \dots)$$

con ciertas reglas en la multiplicación de los tensores $\frac{1}{m!}\{\overline{u}_m, \overline{v}_m, \overline{w}_m, \dots\}$ al multiplicarse por las correspondientes matrices M.

Se menciona que en las matrices A, B, etc., hay una familia de funciones $f(r)$ que permite que puedan escribirse como $A = a f'(r)\ A'$, $B = b f''(r)\ B'$, $C = c f'''(r)\ C'$, etc. en que A', B', C', ... contienen sólo cosenos directores del punto $P(x, y, z)$ e independientes de r; a, b, c, etc., constantes; f', f'', f''', ... etc. derivadas de f con respecto a r.

En efecto, para que en B pueda escribirse $B = bf''(r)\ B'$, se requiere $f''(r) = \frac{k}{r} f'(r)$. Resolviendo esta ecuación se tiene la familia que se busca: $f = c r^{k+1}$ para $k \neq -1$ y $f = c L r$ para $k = -1$.

Se comprueba que para $L = l\, f^{(l)}(r)\ L'$,

$$f^{(l)} = \lambda \frac{1}{r} f^{(l-1)}(r) = \mu \frac{1}{r^2} f^{(l-2)}(r) = \dots$$

un corolario inmediato es: sí $k = 0, 1, 2, \ldots$ entonces la suma

$$V(m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{l} m_i \frac{b_i^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial b_i^k} \tag{5.2}$$

tiene un número $(l+1)$ finito de términos.

Como se vió en cap. III, existen funciones: $\frac{1}{r^n}$, log. r, etc. para las cuales la sustitución S de S_0, da una V que diverge cuando $r < b_i$, toda i, $r = \overline{OP}$, $b_i = \overline{OQ_i}$.

Para la distribución que consta de un solo punto m se tendrá como en cap. III.

$$S': \; V(m) = m f(b) + m r \frac{\partial f(b)}{\partial r} + \ldots$$

desde luego que si

$$S: \; V(m) = m f(r) + m b \frac{\partial f(r)}{\partial b} + \ldots$$

diverge, es porque en su desarrollo van a figurar términos que tienen $\frac{b^p}{r^q}$, que cuando $b > r$ y p, q crecientes dan para S una serie V que diverge. El término siguiente al considerado $\frac{b^p}{r^q}$, contiene a $\frac{b^{p+1}}{r^{q+1}}$ de suerte que $\frac{b^p}{r^q} < \frac{b^{p+1}}{r^{q+1}}$.

En cambio en S' se tiene el término correspondiente al que tenía $\frac{b^p}{r^q}$, contiene ahora a $\frac{r^p}{b^q}$ que es decreciente con p, q crecientes.

Es claro que cuando se tenga $\{m_i\}$; la S' asociada de S será:

$$S': \; V(m_i) = \Sigma\, m_i f(b_i) + r \, \Sigma\, m_i \frac{\partial f(b_i)}{\partial r}$$

$$+ \frac{r^2}{2!} \Sigma\, m_i \frac{\partial^2 f(b_i)}{\partial r^2} + \ldots$$

que resulta convergente donde S es divergente.

VI ALGEBRA DE LAS SUSTITUCIONES Y CIERTAS PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LAS DISTRIBUCIONES

En el desarrollo de Taylor

$$V = (\Sigma m_i)\, f(r) + \frac{\Sigma m_i x_i}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Sigma m_i y_i}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\Sigma m_i z_i}{1!} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\Sigma m_i x_i^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots \tag{6.1}$$

se está midiendo una distribución S_1 que sustituyó a la S_0 como se vió en el cap. V.

Un nuevo desarrollo de Taylor aplicado al segundo miembro de (6.1) que lleva a S_1 a un nuevo centro O_2 será una sustitución S_2 de S_1 de manera que se tiene $S_2\, S_1\, S_0$. Pudo efectuarse una S de S_0 tal que $S S_0 = S_2 S_1 S_0$ como se comprueba facilmente. En este caso como se vió para una dimensión en cap. II, se prueba también que si la distribución S_0 consta de un solo punto singular m residiendo en Q, entonces existe para S_1 una S_1^{-1} tal que $S_1^{-1} S_1 S_0 = S_0$. Se tiene $(S_3 S_2)\, S_1 = S_3 (S_2 S_1)$, si $S_0 : \{m\}$; las sustituciones $\{S_i\}$ forman grupo.

En cambio, si se tiene una colección $\{m_i\}$, la propiedad $S_1^{-1}\, S_1\, S_0 = S_0$ no se verifica.

Sin embargo, si se considera el conjunto S_1, S_2, ... sí existe S_2^{-1} tal que $S_2^{-1}\, S_2 S_1 = S_1$.

En la ecuación (6.1) puede decirse que la sustitución S, es producto de $S = S_x S_y S_z$. En la expresión $S_x S_y S_z S_0$ las sustituciones son como sigue: $S_z S_0$ es una sustitución de S_0 en el espacio, por una distribución en el plano XOY. La operación $S_y\, S_z\, S_0$ es una sustitución de la distribución S_0 por una distribución en el eje OY. Y la operación $S_x\, S_y\, S_z\, S_0$ lleva finalmente a una distribución tal, que algunos puntos residen en el orígen O y otros adheridos a él.

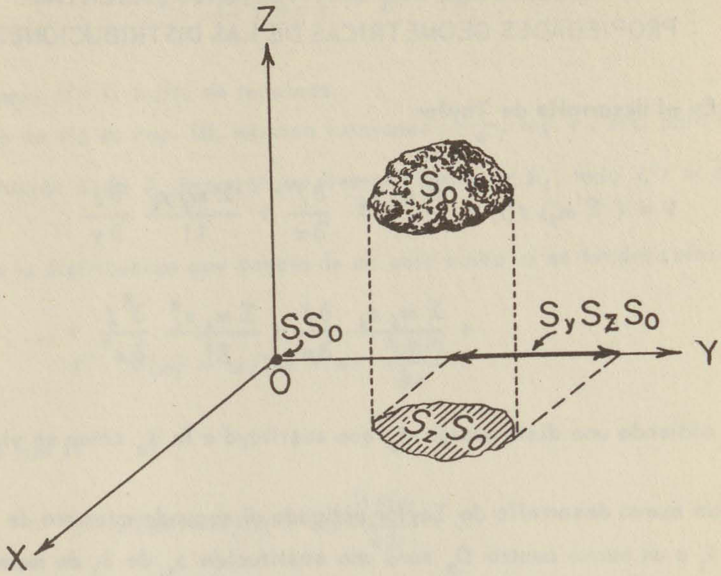

Fig. 5

Definición 4: Una sustitución es propia, cuando la distribución S_0 es sustituida por una S que reside en el mínimo convexo que contiene a S_0.

Definición 5: Centro O_c de la distribución $\{m_i\}$ es un punto que tomado como orígen para la distribución S_c, S_c es propia y en el desarrollo de

$$S_c : V(m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m_i b_i^l}{l!} \cdot \frac{\partial^{(l)} f}{\partial b_i^l} \quad , \quad \text{el}$$

término $\sum_i \dfrac{m_i b_i}{1!} \dfrac{\partial f}{\partial b_i}$ es de menor valor absoluto posible.

En el caso de distribuciones de puntos singulares de orden cero en que $\{m_i\}$ tiene el mismo signo para toda i, este segundo término del desarrollo es cero.

Sea una sustitución S cualquiera,

$$S : V = (\Sigma m_i) \, f(r) + \frac{\Sigma m_i b_i}{1!} \frac{\partial f}{\partial b_i} + \ldots$$

sea S_1 tal que $S_1 S = S_c$, entonces

$$S_1 S : V = (\Sigma m_i) \, f(r) + \frac{\Sigma m_i b_i}{1!} \frac{\partial f}{\partial b_i} + \frac{(\Sigma m_i) \, b}{1!} \frac{\partial f}{\partial b} + \ldots$$

se ve que puede hacerse

$$\Sigma m_i \overline{b_i} \cdot \nabla f + (\Sigma m_i) \, \overline{b} \cdot \nabla f = 0$$

y escribiendo las componentes de $\overline{b_i}$ y $\overline{b}$

$$b_x = - \frac{\Sigma m_i b_{ix}}{\Sigma m_i} , \qquad b_y = - \frac{\Sigma m_i b_{iy}}{\Sigma m_i}$$

$$b_z = - \frac{\Sigma m_i b_{iz}}{\Sigma m_i}$$

que son las conocidas fórmulas del centro de gravedad de un cuerpo. De acuerdo con lo visto, este centro es para cualquier f con que se mida la distribución y puede decirse que f solo ha servido de vehículo para las sustituciones que llevan a S_c. El signo (-) proviene, como se dijo en cap. II de la suposición del sistema de referencia en O con respecto al O_c.

Si se tiene una S_c de S_0 teniendo en cuenta la ecuación (5.1) puede escribirse (en este caso en que m_i tiene el mismo signo para toda i)

$$V(m_i) = (\Sigma m_i)\, f(r) + \frac{1}{2!}\, \overline{u}\, A\, \overline{v} + \dots$$

$\overline{v}$ Traspuesto de (v_x, v_y, v_z).

Pero puede tomarse un sistema de referencia en el cual el plano YOZ contenga los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ por lo cual $u_x = 0$, $v_x = 0$.

También puede tomarse el eje OZ colocado simétricamente con respecto al ángulo formado por $\overline{u}$ con $\overline{v}$.

Si se forma la media geométrica de los módulos de $\overline{u}$ y $\overline{v}$ como módulo para nuevos vectores $\overline{u}'$ y $\overline{v}'$ usando la anotación anterior puede escribirse:

$\overline{u}' = (0, u_y, u_z)$, $\overline{v}' = -\begin{pmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ con lo cual se tiene:

$$V(m_i) = (\Sigma m_i)\, f(r) + \frac{1}{2!}\left(u_z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - u_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \dots \qquad (6.2)$$

siguiendo el lenguaje usual en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales parciales, el segundo término de (6.2) es de forma hiperbólica referida a sus propios ejes de simetría.

En esta forma, que puede definirse canónica, la $V(m_i)$ está referida al centro O_c y a ejes propios de simetría de la distribución $\{m_i\}$.

Si $\{m_i\}$ es simétrica y homogénea, es inmediato que la forma canónica está referida a puntos, lineas y planos de simetría de la distribución.

Una distribución que puede descomponerse en dos colecciones $\{+m_i\}$, $\{-m_j\}$; $m_i, m_j > 0$ para toda i y j, puede analizarse, para su centro, como en cap. II.

Sea O_c centro de $\{+m_i\}$; O_c' centro de $\{-m_j\}$:

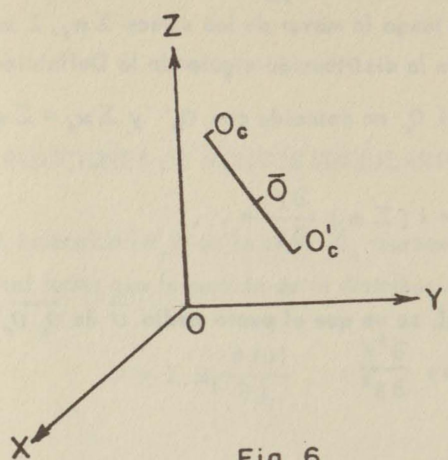

Fig. 6

Sea: $V(m_i) = f(r)\ (\Sigma\, m_i) + \dfrac{\Sigma\, m_i\, b_i^2}{2!}\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\, b_i^2} + \ldots.$

referida a O_c.

Sea también

$$V(-m_j) = (-\,\Sigma\, m_j)\ f(r') - \frac{\Sigma m_j\, b_j^2}{2!}\ \frac{\partial^2 f}{\partial\, b_j} + \ldots$$

referida a O_c'.

Sea un $\overline{O}$ punto interior de $\overline{O_c\ O_c'}$, una S que lleve toda la distribución a $\overline{O}$, se tendrá:

$$V[\,(m_i) + (-\,m_j)\,] = (\Sigma m_i - \Sigma m_j)\ f(a) + \ldots$$

Se checa facilmente que el término en $\frac{\partial f}{\partial b}$ es menor en valor absoluto cuando $\overline{O}$ coincide con el punto que tenga la mayor de las sumas $\Sigma m_i, \Sigma m_j$. En este caso, O, es el centro de toda la distribución siguiendo la Definición 2.

Desde luego que si O_c no coincide con O_c' y $\Sigma m_i = \Sigma m_j$, entonces

$$V = l \left(\Sigma m_i \right) \frac{\partial f}{\partial b} + \ldots$$

Aquí como en cap. **II**, se ve que el punto medio $\overline{O}$ de $\overline{O_c O_c'}$ da el menor valor absoluto para el término $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}$.

VII DISTRIBUCIONES DE PUNTOS SINGULARES DE ORDEN UNO

Sea una colección $\{M_i\}$ en la cual M_i representa el momento reducido $M_i = m_i h_i$, en tal forma que la medida de la distribución S_0: $\{M_i\}$

esta dada por
$$V = \sum M_i \frac{\partial f(r)}{\partial h_i} .$$

Si se efectua una S de S_0 se tendrá

$$V = \sum_i M_i \frac{\partial f}{\partial h_i} + \sum_{i,j} M_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial h_i \partial k_j} + \ldots \qquad (7.1)$$

por lo dicho en cap. V, en la ecuación (7.1) se está midiendo: un punto singular de orden uno residiendo en O y con la medida $V_1 = \sum_i M_i \frac{\partial f}{\partial h_i}$, más un punto singular de orden dos residiendo en O con la medida

$$V_2 = \sum_{i,j} M_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial h_i \partial k_j} \quad , \text{ etc.}$$

Se puede tomar un sistema de referencia tal, que el eje del punto singular que se está midiendo en $V_1 = \sum_i M_i \frac{\partial f}{\partial h_i}$ coincida con el eje OZ, expresando los desarrollos de (7.1) en función de coordenadas cartesianas, puede escribirse:

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2a_{13} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

$$+ a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2a_{23} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \dots \tag{7.2}$$

$a_1, a_{11}, \dots$ funciones de M_i y sus coordenadas x_i, y_i, z_i.
Puede efectuarse una S_1 de S tal que en el nuevo sistema con un desarrollo de Taylor se tenga:

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + a_1 x_0 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + a_1 y_0 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + a_1 z_0 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$+ a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dots$$

y tomar x_0, y_0, z_0 tales que V pueda reducirse a

$$S_1 : V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

se ve que hay una rotacion α en el plano XOY que lleva la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ a la forma $\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$, este ángulo α está dado en la ecuación;

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} \quad .$$

Con ésta rotación puede escribirse

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + b_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots \tag{7.3}$$

Sea $b_{22} < 0 < b_{11}$, entonces a la expresión diferencial

$$V_2 = b_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

se le puede hacer corresponder la operación

$$(u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir la expresión hiperbólica en V_2 tiene sus ejes simétricos con respecto al sistema de referencia y viceversa.

Para cualquier $f(r)$ en la que no se tienen condiciones de tipo diferencial, puede decirse que (7.3) está referida al centro O_c de $\{M_i\}$ y además por la simetría con respecto al sistema de referencia de los primeros ejes (de V_2), la ecuación (7.3) es la forma canónica de $V(M_i)$.

Se ve que cualquiera nueva S aplicada a S_1 proporciona componentes sobre el eje $\overline{Z'Z}$ para los módulos de $(u_1, u_2, 0)$ y $(u_1, -u_2, 0)$, lo que incrementa el valor absoluto de V_2. Así el centro O_c está definido por S_1 y en el sentido de la S_c que dá el menor valor posible de V_2, ver definición 5. Desde luego que puede aceptarse el criterio: que dadas

$$V_2 = b_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + b_{33} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \; ,$$

$$V_2' = b_{11}' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_{22}' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + b_{33}' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \; ,$$

la menor V_2, V'_2, es aquella que tenga el menor valor entre

$$\sum_i (b_{ii})^2 \quad \text{y} \quad \sum_{ii} (b'_{ii})^2$$

lo que se deduce facilmente de la ortogonalidad del sĩstema de referencia.

El centro O_c puede trasladarse con $f(r)$ desde luego, en efecto: si se dá la condición $\nabla^2 f = 0$, entonces a V_2 se le pu de dar este tratamiento,

$$b_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (b_{11} - k)\, \nabla^2 f$$

$$+ k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - (b_{11} - k) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{7.4}$$

$b_{11} - b_{22} = 2k$, con lo cuál, lo escrito en (7.4) es una identidad.

Si $\nabla^2 f = 0$ entonces la (7.3) puede escribirse:

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - (b_{11} - k) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \dots$$

Puede aplicarse una S_2 en (7.3), tal que anule el término $(b_{11} - k) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ y se tenga simplemente

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \dots \tag{7.5}$$

la expresión $V_2 = k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ es hiperbólica y equilátera, sus ejes son rectangulares. Se puede decir que medida la $\{M_i\}$ con una $f(r)$ tal que $\nabla^2 f = 0$, se ve su centro en O_p dado por la ecuación (7.5), que V_2 es mínimo, es evidente.

Además por la simetría de los ejes de V_2 con respecto al sistema de referencia, se concluye que puede definirse como forma canónica de $V(M_i)$ cuando $\nabla^2 f = 0$.

La ecuación (7.5) es la encontrada por Thompson [3] y que bajo una rotación de $\frac{\pi}{4}$, del plano de referencia $X\,O\,Y$, puede escribirse como

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + c_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + \ldots \tag{7.5}$$

como se viene usando en geomagnetismo [9], con la ventaja de que los ejes de c_{11} y a_1 forman un sistema ortogonal.

Si en (7.3) se tiene que V_2 es de forma elíptica, b_{11}, b_{22} tienen el mismo signo y significa que los ejes del punto singular de orden dos forman un ángulo cero o dos rectos, es obvio que con una rotación conveniente pueda escribirse también

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + c_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots$$

También si $\nabla^2 f = 0$ se puede usar la identidad (7.4) y escribir V en la forma (7.5); si $b_{11} = b_{22}$ se anula el término de forma de cuadripolo y simplemente es

$$V = a_1 \frac{\partial f}{\partial z} + a_{111} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

Es claro que si se tiene una distribución de puntos singulares de orden dos S_0 : $\{M_i\}$, con $M_i = c_i \, m_i \, b_j \, b_k$, c_i constante, la medida V será dada por

$$V = \sum_i M_i \frac{\partial^2 f}{\partial b_j \, \partial b_k}$$

o bien, para cualquier S de S_0 se tendrá

$$V = a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + \ldots$$

puede tomarse la S y la dirección de los ejes coordenados tales, que se tenga

$$V = a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a_{111} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

la sustitución S_c y la forma canónica de V, se ve que quedan sujetos a tener simplemente un punto singular de orden tres de momento mínimo, pues los ejes primeros de la distribución determinan el sistema de coordenadas simétrico con respecto a S_0 con la expresión

$$V_2 = a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \; .$$

VIII APLICACIONES

Desde luego que para la suma

$$\sum_i \frac{m_i b_i^k}{k!} \frac{\partial^k f(r_i)}{\partial b_i^k}$$

se usará el criterio de la integral de Stielgest. [16]

A) Si $\{m_i\}$, $m_i > 0$, para toda i, y $f(r) = 1$, se tiene

$$V_0 = \sum_i m_i \tag{8.1}$$

que es la distribución como la define Widder [10].

es claro que si $\frac{d V_0}{d S} = 1$, S es medida del espacio en que está contenida V_0, entonces lo que se está midiendo $V = \Sigma\, m_i f(r_i)$, es el espacio mismo, éste es una distribución.

B) Sea la función $f = r^2$; la distribución $\{m_i\}$; reside en el plano XOY, lo mismo que el punto $P(x, y)$.

Para una S arbitraria de S_0 se tiene

$$V = (\Sigma\, m_i)\, f(r) + \Sigma\, m_i x_i \frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma m_i y_i \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \Sigma\, m_i x_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots$$

como

$$f = x^2 + y^2$$

se tiene

$$V = r^2\, \Sigma\, m_i + 2x\, \Sigma\, m_i x_i + 2y\, \Sigma m_i y_i + \Sigma m_i x_i^2$$
$$+ \Sigma\, m_i y_i^2$$

efectuando la operación S_c puede escribirse:

$$V = r^2 \sum m_i + \sum m_i r_i^2$$

Se ve que se tiene el conocido teorema de Steiner, de tal manera que si $P\ (0,\ 0)$ en S_c, se tiene;

$$V = \sum m_i r_i^2 .$$

El mismo problema pero en el espacio tridimensional. Con lo visto en la parte final del cap. V se tiene

$$B = \frac{1}{r} f'(r) \begin{pmatrix} 1+(k-1)\cos^2\alpha & (k-1)\cos\alpha\cos\beta & (k-1)\cos\alpha\cos\gamma \\ (k-1)\cos\alpha\cos\beta & 1+(k-1)\cos^2\beta & (k-1)\cos\beta\cos\gamma \\ (k-1)\cos\alpha\cos\gamma & (k-1)\cos\beta\cos\gamma & 1+(k-1)\cos^2\gamma \end{pmatrix}$$

como $f = r^2$ entonces $k = 1$, $f'(r) = 2r$

Con lo cual $B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y por lo tanto en la ecuación (5.1)

$$S:\ V = r^2 \sum m_i + \overline{u}_1 A + \frac{1}{2} \overline{u}_2 B \overline{v}_2$$

$$= r^2 \sum m_i + \overline{u}_1 A + \overline{u}_2 . \overline{v}_2' ,\quad \text{si}$$

se efectúa la S_c de S

$$V = r^2 \sum m_i + \overline{u}_2 . \overline{v}_2'$$

en que $\overline{u}_2 . \overline{v}_2' = \sum m_i r_i^2$ y si $P\ (0,\ 0,0,)$ entonces $V = \sum m_i r_i^2$.

C) Sea $f(r) = \frac{1}{r}$, y una distribución de puntos singulares de orden cero: $\{m_i\}$, contenida en un espacio acotado E.

Si se efectúa la operación

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} m_i \frac{h_i^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial h_i^k} , \qquad \text{(a)}$$

haciendo uso de coordenadas esféricas, para un punto $P\ (r,\ \lambda,\ \theta)$ se tendrá:

$$V\ (m_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{T_{i,m}}{r^{m+1}} + r^m\ T_{e,m} \right]$$

$$T_{i,m} = \sum_{n=0}^{m} (g_m^n \cos n\ \lambda + h_m^n \operatorname{sen} n\ \lambda)\ P_m^n$$

$$T_{e,m} = \sum_{n=0}^{m} (\overline{g}_m^n \cos n\ \lambda + \overline{h}_m^n \operatorname{sen} n\ \lambda)\ P_m^n .$$

El término $T_{i,m}$ corresponde a la subcolección $\{m_j\}$ de $\{m_i\}$ para la cual, V es convergente.

El término $T_{e,m}$ corresponde a la subcolección $\{m_k\}$ para la cual V es divergente y se usa la asociada S'.

Los coeficientes $P_m^n = P_m^n\ (\cos\ \theta)$ son los polinomios asociados de Legendre.

Se han conservado los coeficientes g_m^n , h_m^n , como se usan en la ecuación de Gauss [1].

De todo lo precedente se deduce $g_0^0 = \sum m_j$. Toda m_j dista del origen $h_j \leqslant r$.

También g_1^0, g_1^1 , h_1^1, son las componentes del vector $\overline{u}_1$, en la medida del punto singular de orden uno residiendo en O, y dado por $V_1 = \overline{u}_1\ A$, ver la ecuación (5.1). En la misma forma g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2, h_2^2 lo son de $\frac{1}{2!}\ \{\overline{u}_2 ,\ \overline{v}_2\}$, etc.

Para toda la colección $\{m_j\}$ puede escribirse:

$$V(m_j) = \frac{g_0^0}{r} P_0^0 + \frac{1}{r^2} [g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \operatorname{sen} \lambda) P_1^1]$$

$$+ \frac{1}{r^3} [g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \operatorname{sen} \lambda) P_2^1$$

$$+ (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2] + \dots \qquad (8.2)$$

por lo visto en el cap. VI, puede efectuarse una S_c tal, que O_c sea centro de $\{m_j\}$, el eje $\overline{OZ}$ bisectriz del ángulo formado por los ejes del cuadripolo dado en (8.2) y el plano YOZ contenga esos ejes. Entonces puede escribirse en lugar de la ecuación (8.2), su forma canónica

$$V(m_j) = \frac{1}{r} a_0^0 P_0^0 + \frac{1}{r^3} [a_2^0 P_2^0 + a_2^2 \cos 2\lambda P_2^2] + \dots \qquad (8.3)$$

en a_j^i, b_j^i, i, j son índices como g_j^i, h_j^i.

En efecto si el punto singular de orden dos dado en la ecuación (8.2) tiene un momento M y sus ejes dados por los vectores unitarios

$$\bar{u}_1 = (0, -y_1, z_1), \quad \bar{u}_2 = (0, y_1, z_1)$$

se obtiene facilmente $a_2^1 = b_2^1 = b_2^2 = 0$, (ver el sistema de ecuaciones (8.10) en este mismo cap. Aplicación E)).

Si se tiene $\{m_j\}$ homogénea y simétrica con respecto al eje $\overline{ZZ'}$, V es independiente de λ y la ecuación (8.3) se reduce a

$$V = \frac{1}{r} a_0^0 + \frac{1}{r^3} a_2^0 P_2^0 + \frac{1}{r^4} a_3^0 P_3^0 + \dots \qquad (8.4)$$

Si se impone en $\{m_j\}$ la condición de simetría con respecto al plano XOY facilmente se ve que de la ecuación (8.3) se tiene

$$V = \frac{1}{r} a_0^0 + \frac{1}{r^3} [a_2^0 \ P_2^0 + a_2^2 \cos 2 \lambda P_2^2]$$

$$+ \frac{1}{r^4} [(a_3^1 \cos \lambda + b_3^1 \operatorname{sen} \lambda) \ P_3^1 + \tag{8.5}$$

$$+ (a_3^3 \cos 3\lambda + b_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) \ P_3^3] + \frac{1}{r^5} [a_4^0 \ P_4^0 + \ldots] + \ldots$$

Si simultáneamente se imponen las condiciones que en (8.4) y (8.5) se tiene

$$V = \frac{1}{r} a_0^0 + \frac{1}{r^3} a_2^0 \ P_2^0 + \frac{1}{r^5} a_4^0 \ P_4^0 + \ldots \tag{8.6}$$

Desde luego si hay simetría esférica, V es independiente de λ y θ y de la (8.3) se tiene $V = \frac{1}{r} a_0^0$ como es bien sabido.

También, si $P(r, \lambda, \theta)$ es interior a un cascarón esférico de radio a con una distribución homogénea dada por (8.1) $V_0 = a_0^0 = \Sigma m_k$ entonces, usando S' de S_0, V independiente de λ y θ se tiene

$$V = \frac{1}{a} a_0^0 = \text{constante.}$$

Sea una distribución esférica homogénea $V_0 = a_0^0$ con centro en $Q(0, 0, z_0)$, para un punto $P(r, \lambda, \theta)$, se tiene

$$V = \frac{1}{r} g_0^0 + \frac{1}{r^2} g_1^0 \ P_1^0 + \frac{1}{r^3} g_2^0 \ P_2^0 + \ldots,$$

en que $g_1^0 = z_0 g_0^0$, $g_2^0 = \frac{1}{2!} z_0^2 g_2^0$, ...

D) Un ejemplo en una dimension: Sea m_0 residiendo $Q\,(-b)$, m_1 residiendo de $P\,(+r)$ en forma tal, que $m_0 b = m_1 r$, sea $f = \frac{m_1}{r}$.

Desde P para la medida V de m_0 se tiene:

$$V = \frac{m_0 m_1}{(r+b)} = \frac{m_0 m_1}{r} - \frac{b\, m_0 m_1}{r^2} + \frac{b^2 m_0 m_1}{r^3} - \dots$$

como $m_0 b = m_1 r$, entonces

$$V = \frac{m_0 m_1 - m_1^2}{r} + \frac{b\, m_1^2}{r^2} - \frac{b^2 m_1^2}{r^3} + \dots$$

sea $m_0 \gg m_1$ por lo cual $b \ll r$, de manera que si se desprecian los términos que tienen de b^2 en adelante, se puede escribir

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M'}{r^2}$$

De esta manera, si se aplican los desarrollos de Newton para el movimiento, y, m_1 está en una órbita elíptica alrededor de O, esta órbita tiene un giro pequeño en su plano alrededor de m_0 como se sabe.

E) Sea la distribución $\{m_i\} = \{m_j\} + \{m_k\}$; toda $m_j > 0$, toda $m_k < 0$, $|\Sigma m_k| = \Sigma m_j$.

Sea $f = \frac{1}{r}$, desde luego $\{m_i\}$ en un espacio E acotado. Para facilidad en el análisis , sea P exterior a una esfera que contiene a E.

Según lo visto en el ejemplo C), una S propia de S_Q está dada por la ecuación

$$V(m_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{T_{i,m}}{r^{m+1}} \right) \tag{8.7}$$

y

$$T_{i,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_m^n \cos n\,\lambda + h_m^n \operatorname{sen} n\,\lambda \right) P_m^n \,.$$

tomada la V en el punto P.

Como se ve, el término $\frac{1}{r^2}$ que es el primero de S con su coeficiente $g_1^0\, P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \operatorname{sen} \lambda)\, P_1^1$ está dando la medida V_1 de un punto singular de orden uno residiendo en O; el término que tiene a $\frac{1}{r^3}$, está dando la medida V_2 de un punto singular de orden dos residiendo en O, etc. (Es frecuente que a esta distribución $\{m_i\}$ se le denomine distribución de dipolo).

En la sustitución S que dá la ecuación (8.7) se pueden tomar los ejes en tal forma, que el eje $\overline{Z'Z}$ coincida con la dirección del eje del dipolo medido por V_1, se puede aplicar también una S_c a S tal, que el término que mide a V_2, sea mínimo, es decir que después de la S_c, la suma

$$(a_2^0)^2 + (a_2^1)^2 + (b_2^1)^2 + (a_2^2)^2 + (b_2^2)^2$$

tenga un valor mínimo, con lo cual se está dentro de la definición de O_c, de acuerdo con el criterio que se ha seguido.

Con estas dos condiciones se puede escribir

$$S_c : V(m_i) = \frac{1}{r^2} a_1^0\, P_1^0 + \frac{1}{r^3} a_2^2 \cos 2\,\lambda\, P_2^2 + \dots \tag{8.8}$$

por lo dicho en cap. **VII**, ésta es la forma canónica de $V(m_i)$ pues se tiene la simetría de los primeros ejes de $\{m_i\}$ con respecto al sistema de referencia. Los ejes del punto singular de orden dos medido por $\frac{1}{r^3} a_2^2 \cos 2\,\lambda\, P_2^2$, son normales entre sí, quedan en el plano XOY simétricos con respecto a los ejes $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$.

Se ha usado también la forma

$$S_c : V(m_i) = \frac{1}{r^2} a_1^0 P_1^0 + \frac{1}{r^3} b_2^2 \text{ sen } 2\lambda P_2^2 + \dots \qquad (8.9)$$

en que los ejes del punto singular de orden dos medido por el segundo término coinciden con las direcciones $\overrightarrow{OX}$, y $\overline{OY}$, [9].

Desde luego que si V_i correspondientes a puntos singulares de orden i, se ponen en función de sus propios ejes, si

$$i = 1, \quad V_1 = \frac{M_i \cos \phi}{r^2} \; ; \; i = 2, \quad V_2 = \frac{M_2}{r^3} \left[\frac{3}{2} \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right]$$

etc., dados por Maxwell [11] se ve que la (8.9) satisface cuando $i = 1, 2$.

A partir de la ecuación (8.7) se puede obtener la (8.8) en la siguiente forma: [9]

El vector (g_1^0, g_1^1, h_1^1) da la dirección del dipolo. Un desarrollo S_c aplicado a S : (8.7), da las coordenadas del centro O_c de $\{m_i\}$; usando las ecuaciones de A. Schmidt [12].

El punto singular de orden dos dado en la ecuación (8.7) tiene un momento m_2 y ejes con direcciones $\overline{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ que verifican las siguientes ecuaciones:

$$\sqrt{3}\, m_2 (z_1 z_2 - y_1 y_2) = g_2^2 + \sqrt{3}\, g_2^0 \qquad \sqrt{3}\, m_2 (x_1 z_2 + x_2 z_1) = 2 g_2^1$$

$$\sqrt{3}\, m_2 (y_1 z_2 + y_2 z_1) = 2 h_2^1 \qquad \sqrt{3}\, m_2 (x_1 x_2 - y_1 y_2) = 2 g_2^2$$

$$\sqrt{3}\, m_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) = 2 h_2^2 \qquad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1, \quad i = 1, 2$$

(8.10)

F) Sea $\{m_i\}$ y P residiendo en el plano $\overline{XOY}$, $f(r) = \log \frac{1}{r}$. Las coordenadas de P son (x, y) o bien las polares (r, θ). La forma canónica de $V = \Sigma\, m_i \log \frac{1}{r_i}$ está dada por

$$V = a_1 \log \frac{1}{r} + a_{11} \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \ldots$$

en que el término $a_{11} \frac{\cos 2\theta}{r^2}$ mide un V_2 de un punto singular de orden dos residiendo en O y simétrico con respecto al eje $\overline{OY}$.

G) como en ejemplo E), sea $\{m_i\} = \{m_j\} + \{m_k\}$; $m_j > 0$, para toda j, $m_k < 0$ para toda k, $\Sigma\, m_j = |\Sigma m_k|$; $\{m_i\}$ y $P\,(r, \theta)$ están en el plano XOY, $f(r) = \log \frac{1}{r}$. Si se usa un tratamiento similar al del cap. VII, se obtiene

$$V(m_i) = a_1 \frac{\partial f}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots$$

$$= - a_1 \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} + a_{11} \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \ldots$$

como en F).

IX SERIES TRIGONOMETRICAS

Cuando se encuentra uno ante un desarrollo de Fourier o de Legendre [13].

$$V = a_0 + a_1 \cos \lambda + b_1 \operatorname{sen} \lambda + \ldots \qquad (9.1)$$

$$V = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots \qquad (9.2)$$

no puede decirse de inmediato que se está ante un desarrollo de Taylor.

Sin embargo, si en la ecuación (8.2) se hace $\theta = \frac{\Pi}{2}$, $r = \text{const} = 1$, por ejemplo; la ecuación (8.2) toma la forma dada en (9.1) en que

$$a_0 = a_0 \, (g_0^0, g_2^0, g_4^0, \ldots), \qquad a_1 = a_1 \, (g_1^1, g_3^1, g_5^1, \ldots)$$

$$a_2 = a_2 \, (g_2^2, g_4^2, \ldots), \qquad b_1 = b_1 \, (b_1^1, b_3^1, b_5^1, \ldots) \qquad \text{etc.}$$

También, si el dato es la ecuación (9.1) puede construirse una distribución $\{m_i\}$ en el plano XOY, medida desde $P(x, y)$ con el criterio

$$V(m_i) = \sum_i m_i \, f(r_i), \text{ en que } f(r) = \frac{1}{r} \text{ y } r = 1$$

(en general r = constante).

En forma tal que para S de S_0 se verifique

$$g_j^n = 0 \text{ y } b_j^n = 0, \quad \text{para} \quad j \neq n .$$

Entonces la ecuación (8.2) puede escribirse

$$S: V(m_i) = \sum_{n=0}^{\infty} [(g_n^n \cos n\lambda + b_n^n \operatorname{sen} n\lambda)\ P_n^n (\frac{\pi}{2})]$$

Se esta así ante la ecuación (9.1), efectuando

$$a_n = g_n^n P_n^n (\frac{\pi}{2}), \qquad b_n = b_n^n P_n^n (\frac{\pi}{2})$$

$$P_0^0 = 1, \quad P_1^1 = 1, \quad P_2^2 = 1 \times 3, \quad P_3^3 = 1 \times 3 \times 5,$$

$$P_4^4 = 1 \times 3 \times 5 \times 7, \text{ etc.}$$

Así, un desarrollo de Fourier es un desarrollo de Taylor de la forma:

$$V(m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} m_i \frac{b_i^k}{k!} \frac{\partial^k (\frac{1}{r})}{\partial b_i^k} \qquad \text{(a)}$$

para el plano, la V medida en $P(1, \lambda)$.

La S de S_0 que se está considerando en este caso, tiene todas las propiedades algebraicas y geométricas vistas en cap. IV.

$$\text{La función } V = \begin{cases} +1 & \text{para} \quad 0 < \lambda < \pi \\ -1 & \text{para} \quad -\pi < \lambda < 0 \end{cases}$$

en que se tiene

$$V = \frac{4}{\pi}(\operatorname{sen} \lambda + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\lambda + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\lambda + \ldots) \qquad (9.3)$$

es una distribución de dipolo, es decir se está midiendo

$$\{m_i\} = \{m_j\} + \{m_k\}$$

en que $m_j > 0$ para toda j y $m_k < 0$ para toda k con la propiedad $\Sigma m_j = |\Sigma m_k|$, se ve también que en la ecuación (9.3) se tiene forma canónica pues es S_c y el eje $\overline{Y'Y}$ tiene la dirección del dipolo dado en $V_1 = \frac{4}{\pi}$ sen λ.

En forma similar se puede hacer un análisis de la ecuación (9.2), en efecto, en la ecuación (8.4) se tiene un desarrollo de Legendre, solo que esta referido al centro O_c de la distribución $S_0 : \{m_i\}$.

En general se ve que puede construirse una $\{m_i\}$ que medida con la V dada en la ecuación (8.2) desde una superficie esférica de radio $r = 1$, verifique: $g_n^i = 0$ sí $i \neq 0$; $h_j^i = 0$ para toda i, con lo que se obtiene:

$$V(m_i) = g_0^0 P_0 + g_1^0 P_1 + g_2^0 P_2 + \dots$$

El conocido teorema que dice que una función $V(\lambda, \theta)$ continua sobre una esfera [14] puede desarrollarse en harmónicos esféricos en tal forma que

$$V(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n P_n + \sum_{m=1}^{n} (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m] \tag{9.4}$$

es el caso general que incluye a las ecuaciones (9.1) y (9.2).

La ecuación (9.4) puede obtenerse de la ecuación (8.2) haciendo $r = 1$, con lo cual la ecuación (9.4) está midiendo una sustitución S de S_0 en que se tiene

$$S : V(m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} m_i \frac{b_i^k}{k!} \frac{\partial^k (\frac{1}{r})}{\partial b_i^k}$$

la medida está tomada desde puntos $P(1, \lambda, \theta)$ en el espacio. Como ya es sabido, la condición de continuidad de V puede quitarse y ponerse la de seccionalmente contínua. Si en vez de $r = 1$, se toma $r = a$, cualquier constante, se tiene que si $a > 1$ la forma (a) es descriptiva y da la medida de V de la ecuación (9.4). Si $a < 1$ entonces (a) es simplemente descriptiva y la medida de V está dada por $V(S')$ como se dijo en cap. V.

Para la cual se tiene la ecuación

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} m_i \frac{a^k}{k!} \left(\frac{\partial^k (\frac{1}{r})}{\partial r^k} \right)_{r = b_i} \qquad (a')$$

La función $f(r) = \dfrac{1}{r}$ que en este caso funciona como vehículo, ha sido tomada por lo muy general de su desarrollo. Para series dadas puede tomarse como vehículo alguna otra $f(r)$. Sea por ejemplo [15].

$$V = \lambda^m = A_m P_m(\lambda) + A_{m-2} P_{m-2}(\lambda) + \ldots + T.$$

se ve claro que hay que tomar una $f(r)$, tal que su desarrollo de un número finito de términos y es el caso visto al final del cap. V. ecuaciación (5.2).

Es obvio que existen algunos otros ejemplos de desarrollos en serie (Bessel por ejemplo) a los que se les puede hacer corresponder un desarrollo de Taylor, con un sístema de coordenadas apropiado (cilíndricas por ejemplo).

X POLINOMIOS EN UNA VARIABLE

Sea el polinomio

$$V = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{10.1}$$

Para su análisis como medida de cierta sustitución de distribución, se estará en el caso del cap. II., se sugiere del término $a_0 x^n$, que $f = r^n$.

Es obvio que puede construirse una distribución $\{m_i\}$ tal, que

$$\Sigma m_i = a_0 \quad , \quad n \Sigma m_i \frac{b_i}{1!} = a_1$$

$$n (n-1) \Sigma m_i \frac{b_i^2}{2!} = a_2 \quad \ldots \text{etc.}$$

Ejemplo: sea

$$V = 3x^2 + 10x + 8$$

$$\Sigma m_i = 3, \quad 2 \Sigma m_i b_i = 10, \tag{10.2}$$

2.1 $\Sigma m_i \frac{b_i^2}{2!} = 8$; basta con dos puntos m_1 y m_2 de orden cero para verificar estas ecuaciones.

Las raices de (10.2) son reales, entonces m_1 y m_2 son uno positivo y otro negativo, en efecto; la colección $m_1 = \frac{25}{8}$ en Q_1 $(-\frac{8}{5})$ y $m_2 = -\frac{1}{8}$ en $Q_2(0)$ satisface la ecuación (10.2) y es desarrollo de

$$V = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=0}^{2} \frac{m_i\, b_i^k}{k!} \frac{d^k (x^2)}{dx^k}$$

Se ve facilmente en (10.2) que si m_1, $m_2 > 0$ entonces V no tiene ningún cero y las raices son números complejos.

Si (10.1) es una S de S_0 se ve que la S_c tiene la ecuación

$$V = b_0\, x^n + b_2\, x^{n-2} + \ldots .\ b_n .$$

En el caso de que $n \to \infty$ y se tenga

$$V = C_0 + C_1\, x^1 + C_2\, x^2 + \ldots \qquad (10.3)$$

se ve que puede procederse como en cap. III., y considerar que en (10.3) se está ante una asociada S' de S, de tal manera que S puede construirse con la función $f = \frac{1}{r}$ y en (10.3) se está midiendo:

$$V = \sum m_i\, f(b_i) + \frac{x}{1!} \sum m_i\, f'(b_i) + \frac{x^2}{2!} \sum m_i\, f''(b_i) + \ldots$$

REFERENCIAS

[1] Chapman S, and J. Bartels: Geomagnetism, Oxford, Claredon Press, 639, 1940.

[2] Maxwell, James Clerk: Traité d'Electricité et de Magnetism, Paris, Gauthier Villars, Tomo I. 223, 1885.

[3] Bartels, Julius: Terr. Mag., 36, 248, 1936.

[4] Whittaker, E. T. and M. Watson: A course of Modern Analysis, New York, Mc Millan Co. 400, 1947.

[5] Frasser, S. Grant: Three dimensional interpretation of gravitational anomalies, Geophysics., 17: 344, 1952.

[6] Teisseire, Roman: Acta Geophysica Polonica., 228, 1956.

[7] Stratton, Julius Adams: Electromagnetic Theory, New York, McGraw Hill, 182. 1941.

[8] Slater, John and Nathaniel H. Frank: Electromagnetism, New York, McGraw Hill. 227, 1947.

[9] Chargoy, A: Anales, Inst. Geof. México, UNAM. I: 34, 1955.

[10] Widder, David V: Advanced Calculus, New York, Prentice Hall, 141, 1947.

[11] Obra citada en (2), 226.

[12] Obra citada en (1), 651.

[13] Churchill, Ruel V: Fourier Series and Boundary Value Problems, New York, McGraw Hill, 191, 1941.

[14] Obra citada en (1). 607.

[15] Obra citada en (13), 187.

[16] Obra citada en (10), 126 y 127.