El uso de los modelos de alambre en el análisis de estructuras indeterminadas

Por Leonardo Zeevaert, S. M., I. C.

De la Oficina de Ingeniería Experimental. - Departamento de Proyectos C. N. I.

EN el análisis de las estructuras hiperestáticas es sumamente ventajoso en ciertos casos, el uso de los modelos elásticos. Las ventajas se hacen más marcadas cuando la estructura por analizar es de forma complicada o de alto grado de indeterminación. El prototipo puede ser representado por un modelo construido de material homogéneo y perfectamente elástico: alambre de latón, acero, bakelita, celuloide y hule duro pueden ser utilizados en la fabricación de los modelos. Es evidente que la técnica de operación dependerá de la clase de material que se use para la fabricación del modelo. Aquí mostraré únicamente la teoría que se sigue cuando se hace uso de modelos elásticos de alambre (latón).

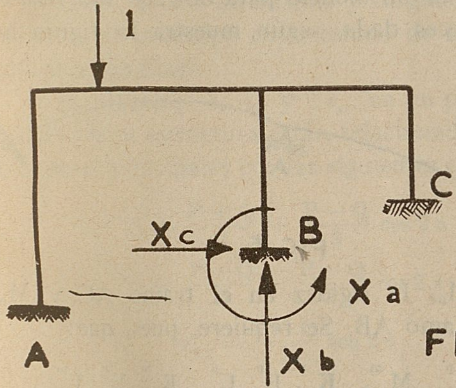

FIG. 1

Sea (figura Núm. 1) una estructura hiperestática empotrada en A, B y C; los elementos desconocidos que actúan en B serán X_a, X_b y X_c, momento, esfuerzo axial y empuje lateral, respectivamente. Se desea conocer la línea de influencia para la reacción vertical X_b en B.

Supongamos por un momento que $X_b = 0$, entonces (figura Núm. 2), la deformación en B debida a una carga unitaria aplicada en un punto O de la estructura será δ_{bo}. Ahora bien, quitemos todas las cargas de la estructura y apliquemos en B (figura Núm. 3), una fuerza unidad, según la dirección de X_b. Esta fuerza nos da en B una deformación δ_{bb} y en o una deformación de la estructura δ_{ob}.

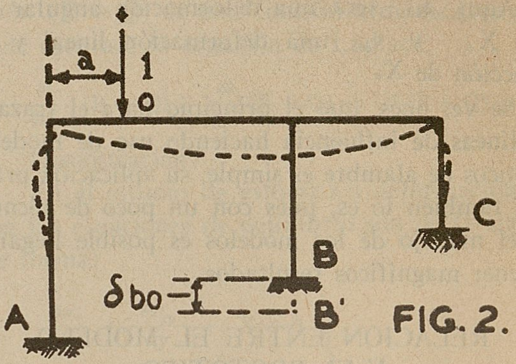

FIG. 2.

Es evidente, pues, que si el material se comporta elásticamente y por consiguiente la estructura en conjunto, resulta que para obtener una deformación δ_{bo} (figura número 3) en B, con una carga unitaria en B' habrá que multiplicar δ_{bb} por cierta fuerza para obtener δ_{bo} Si el apoyo B de la estructura en cuestión debe permanecer inmóvil, resulta que para regresar B' (figura Núm. 3), a B, se necesitará llenar el siguiente requisito:

$$\delta_{bo} + X_b \times \delta_{bb} = 0$$

de donde $X_b = -\frac{\delta_{bo}}{\delta_{bb}}$

Ahora bien, según Maxwell $\delta_{bo} = \delta_{ob}$ o sea: la deformación en "b" debida a una fuerza unidad en "o" es igual a la deformación en "o" debida a una fuerza unitaria aplicada en "b".

Según este teorema nos queda:

$$X_b = -\frac{\delta_{ob}}{\delta_{bb}}$$

Se ve claramente que si deformamos la estructura aplicando en B una deformación δ_{bb}, la elástica (figura Núm. 3), de la estructura que se obtenga de la deformación aplicada será a la vez la línea de influencia para la reacción en B.

De la misma manera se puede proceder para el momento X_a y el empuje X_c; ésto es:

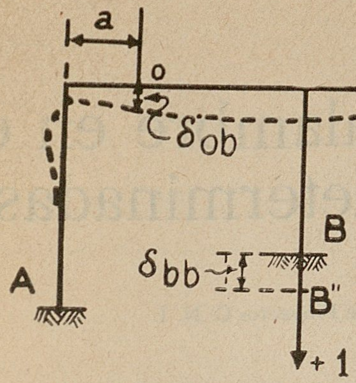

FIG. 3.

$$X_a = -\frac{\delta_{oa}}{\delta_{aa}}; \qquad X_c = -\frac{\delta_{oc}}{\delta_{cc}}$$

Aquí δ_{aa} será una deformación angular según X_a y δ_{cc} una deformación lineal y en dirección de X_c.

Se ve, pues, que el principio para el trazado de líneas de influencia haciendo uso de modelos elásticos de alambre es simple, su aplicación práctica también lo es, pues con un poco de técnica en el manejo de los modelos es posible llegar a obtener magníficos resultados.

RELACION ENTRE EL MODELO Y EL PROTOTIPO

Designaré con un índice "m" a todos los elementos del modelo y con "p" a todos los elementos del prototipo. Si "d" es un segmento pequeño de la estructura y "w" la carga por metro lineal, la cual consideraré constante en este caso, resulta que wds, será una carga concentrada elemental. Según ésto se tendrá:

$$\frac{X_b^p}{X_b^m} = \frac{\delta_{ob}{}^p \; (wds)^p \; \delta_{bb}{}^m}{\delta_{ob}{}^m \; (wds)^m \; \delta_{bb}{}^p} \; ; \; \lambda = \text{escala de líneas,}$$

considerando los valores físicos de la fracción anterior, se obtiene:

$$X_b^p = \lambda \left(\frac{w^p}{w^m} \right) X_b^m$$

De la misma manera en caso de que las δ_{oa} sean producidas por una distorsión angular, se obtendrá:

$$X_a^p = \lambda^2 \left(\frac{w^p}{w^m} \right) X_a^m$$

EL MODELO DISTORSIONADO

Hay casos en que el material de que se dispone no llena los requisitos, por lo que se refiere a obtener una relación de rigideces igual entre el modelo y el prototipo. En estos casos es necesario distorsionar el modelo geométricamente, de tal manera de dar la relación de rigideces necesarias y así obtener un modelo elásticamente similar.

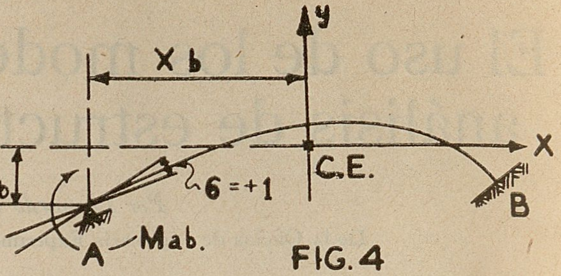

FIG. 4

Sea la figura Núm. 4, un segmento de arco AB en el cual se hace girar la tangente en A, un valor $\Theta = +1$, entonces por definición M_{ab} será la rigidez del tramo AB, ésto es, el momento necesario para hacer girar la tangente en A la unidad, o sea

$$M_{ab} = \frac{1}{\int \frac{ds}{EI}} + \frac{x_a^2}{\int x^2 \frac{ds}{EI}} + \frac{y_a^2}{\int y^2 \frac{ds}{EI}}$$

esta expresión está referida al centro elástico de la pieza AB. Si el valor EI es constante en el tramo AB, podremos escribir:

$$M_{ab} = K\,EI$$

Supongamos que se requiere determinar en que relación hay que distorsionar dos tramos adyacentes de un modelo para obtener una relación de rigideces dada, según muestra la figura número 5.

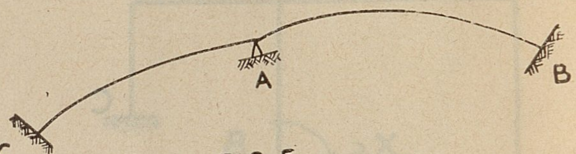

FIG. 5

Sea M_{ac} la rigidez en el tramo AC y M_{ab} la del tramo AB. Se requiere, pues, que:

$$\frac{M^p_{ab}}{M^p_{ac}} = \frac{M^m_{ab}}{M^m_{ac}} = \frac{K^p_{ab} \, E^p \, I^p_{ab}}{K^p_{ac} \, E^p \, I^p_{ac}} = \frac{K^m_{ab} \, E^m \, I^m_{ab}}{K^m_{ac} \, E^m \, I^m_{ac}}$$

Aquí K tiene las dimensiones de $1/L$, por consiguiente, si λ es la escala geométrica del tramo AC y λ_1, es la del tramo AB, podremos escribir:

$$\frac{I^p_{ab}}{I^p_{ac}} = \frac{I^m_{ab}}{I^m_{ac}} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda} \right]$$

Espero que esta breve exposición del comportamiento de los modelos elásticos, despierte el interés que el conocimiento de los elementos hiperestáticos tiene en las estructuras estáticamente indeterminadas.