

Procedimiento del perfil cuadrático para cubicaciones

Conferencia sustentada por el Ing. Jehová Guerrero y Torres, en el Salón de Actos de la Asociación de Ingenieros y Arquitectos de México, el día 28 de enero de 1942

PUEDE afirmarse que una gran mayoría de todos los trabajos de terracerías que se hacen o se han hecho en todas partes, han sido movimientos en los que se ha procurado que los cortes o los terraplenes objeto de esos movimientos tengan una sección transversal al eje, de forma trapecial. Una cantidad enorme de trabajo se dedica continuamente a hacer la cubicación de esos movimientos, y es nuestra opinión que, hasta la fecha, no se ha procurado aprovechar debidamente las propiedades geométricas de figura tan sencilla.

El procedimiento comúnmente empleado para cubicar terracerías consiste en determinar a cada cierto tramo el área de dicha sección transversal trapecial la cual varía con el espesor, que es la altura del trapecio. Tomando el promedio de dos áreas que limiten un tramo y multiplicándolo por la longitud de dicho tramo se obtiene el volumen entre esas dos secciones. Es bien sabido que este procedimiento no es en muchos casos suficientemente preciso, pero además de eso, nosotros trataremos de demostrar que a pesar de ser el preferido por su sencillez resulta exageradamente laborioso si se acude a un método en el que se aproveche debidamente la geometría del trapecio. Como ejemplo de esto último citaremos dos procedimientos, uno de los cuales es el que proponemos y que hemos llamado "procedimiento del perfil cuadrático" por las razones que se verán más adelante.

versal del terreno es plana y horizontal, de obtener el volumen que hay entre las secciones 1 y 2 que están separadas por una distancia l_1 , cualquiera. Empezaremos por valuar el volumen entre las secciones que están a distancia l y $l+dl$ respectivamente de la sección 1. Dicho volumen será igual al área del trapecio multiplicada por dl . El área del trapecio va a considerarse formada por la del rectángulo que tiene por lados b y h , y por las áreas de los triángulos rectángulos cuyos catetos son h y th ; de esta manera tenemos:

$$dV = (bh + th^2) dl$$

Entonces el volumen total será:

$$V = b \int_1^2 h dl + t \int_1^2 h^2 dl$$

el primer término de la expresión que nos da el volumen podemos fácilmente ver que es simplemente igual al área comprendida entre la rasante y el perfil del terreno, o más simplemente, el área del perfil topográfico entre las secciones de que se trata. En cuanto al segundo término pueden emplearse, que sepamos, dos interpretaciones: la propuesta por el Ing. Norberto Sánchez Gómez y la nuestra.

El Ing. Sánchez Gómez interpreta dicho segundo término como el producto del talud por el doble del momento estático del área del perfil tomando como eje a la rasante (Véase "Ingeniería, Vol. 1936"). En efecto, si determinamos el momento estático del área elemental comprendida entre las mismas secciones veremos que su valor es:

$$dM = \frac{1}{2} h^2 dl$$

y el momento estático de toda el área entre las secciones 1 y 2 valdrá:

$$M = \frac{1}{2} \int_1^2 h^2 dl;$$

eliminando la integral del segundo término de la expresión que nos da el volumen, tendremos:

$$V = bA_{pt} + 2tM,$$

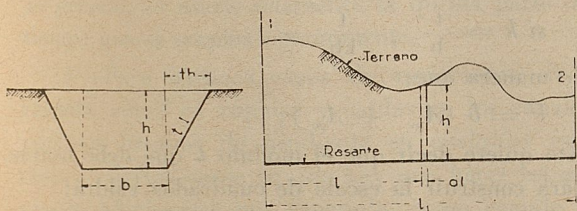


FIG 1

La figura 1, muestra un perfil de un corte. Vamos a tratar, suponiendo que la superficie trans-

de manera que para encontrar el volumen por el procedimiento mencionado se mide el área del perfil y se multiplica por la base menor, ya sea corona o plantilla, y a este producto se la agrega el momento estático multiplicado por el doble del talud. Este procedimiento podrá aplicarse ventajosamente cuando se disponga de un instrumento especial que proporcione directamente el valor del momento estático; en otra forma resulta excesivamente laborioso y por tanto inconveniente, siendo esto lo más general, ya que es muy raro que se pueda contar con el instrumento de que se ha hablado. Al final, mencionaremos una importante aplicación que nos sugiere este procedimiento en Mecánica y Estabilidad.

La interpretación que damos nosotros al segundo término de la expresión del volumen es la siguiente: si se traza a partir de la rasante una línea cuyas ordenadas sean proporcionales a los cuadrados de los espesores, que es lo que en lo sucesivo llamaremos "perfil cuadrático", el área entre la rasante y dicho perfil valdrá:

$$A_{pc} = k \int_1^2 h^2 dl$$

de manera que tendremos:

$$V = bA_{pt} + \frac{t}{k} A_{pc}$$

y así, el volumen será igual al área del perfil multiplicada por la plantilla o corona b más el área del perfil cuadrático multiplicado por el talud.

Nuestro procedimiento consistirá, por lo tanto, en trazar el perfil cuadrático, medir el área de los dos perfiles, multiplicarlos por la base y por el talud dividido entre k respectivamente, y sumar dichos productos.

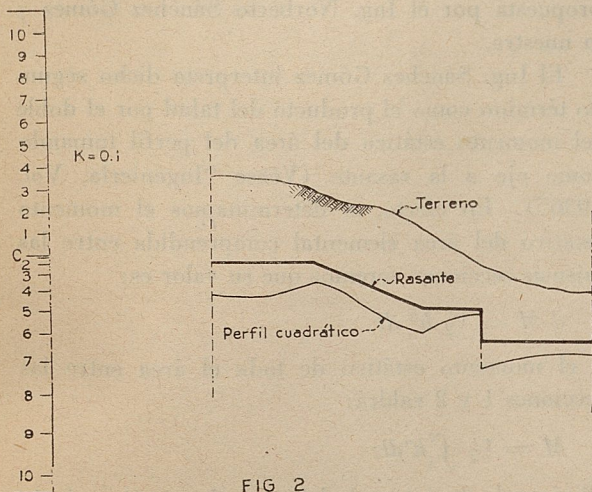


FIG 2

Para trazar el perfil cuadrático se hace uso de una escala como la de la figura 2, que está dividida

en dos partes: una de ellas es una escala común y corriente que sirve para medir los espesores directamente sobre el dibujo del perfil; la otra, cuyo origen es el mismo de la primera, es una escala de cuadrados, es decir, que la distancia que hay del origen a la línea acotada con cierto número, es igual a una constante k multiplicada por el cuadrado de dicho número. Sobra hacer mención de la sencillez de la construcción de dicha escala que se usa en la siguiente forma: si se aplica el origen común de dicha escala a la rasante, colocando su borde verticalmente, se podrá leer en un lado el espesor e inmediatamente marcar al otro lado con auxilio de la escala de cuadrados, un punto que esté de la rasante a una distancia proporcional al cuadrado del espesor; de este modo queda construido el perfil cuadrático mediante un proceso absolutamente mecánico y simple. Por supuesto que el número de puntos que así se fije dependerá de lo movido que sea el terreno; no es necesario poner puntos a cada cierta distancia, sino únicamente los que sean característicos. Da muy poco margen a equivocaciones puesto que éstas saltan a la vista inmediatamente.

Hemos dicho que en la escala de cuadrados las distancias de las líneas al origen son proporcionales a los cuadrados de sus respectivas acotaciones, interviniendo un número k como factor de proporcionalidad; esto será lo más general.

Puede contruirse la escala de cuadrados muy convenientemente de manera de que el área del perfil cuadrático tenga que multiplicarse por b , igual que el área del perfil topográfico, teniendo ésto la ventaja de ahorrar una operación de planímetro, pues en este caso pueden arearse los dos perfiles en conjunto, haciendo caso omiso de la rasante; esto tiene, además, la ventaja de que la precisión es igual por lo que respecta a la parte rectangular de la sección trapezoidal y a los triángulos. Si en la expresión del volumen sacamos como factor común b se tendrá:

$$V = b(A_{pt} + \frac{t}{kb} A_{pc});$$

$$si k = \frac{t}{b}, \quad \frac{t}{kb} = 1$$

de manera que:

$$V = b(A_{pt} + A_{pc});$$

esto quiere decir que el módulo k que debe usarse para construir la escala de cuadrados valdrá:

$$k = \frac{t}{b}$$

Por supuesto que el valor del módulo es relativo al de la escala vertical del perfil.

Discusión del procedimiento

Como ventajas principales pueden mencionarse las siguientes:

1^a—Supuesto que la expresión del volumen se ha interpretado rigurosamente, éste procedimiento es más preciso que el que más pretenda serlo cubriendo por tramos de igual intervalo, ya sea usando la fórmula del "área media", la "forma prismoidal"; o cualquiera otra que haya o pudiera haber, cuyo uso implica suponer ciertas características geométricas o tramos cuya figura sólo depende del capricho de la naturaleza.

2^a—Su empleo es más sencillo que el de cualquier otro, pues tanto el construir el perfil cuadrático, como el arear separadamente o en conjunto los perfiles, son operaciones mecánicas y fáciles, además de las cuales sólo hay que hacer una multiplicación en el caso más favorable y dos multiplicaciones y una suma en el caso más desfavorable.

3^a—Es el procedimiento más rápido.

En efecto, vamos a comparar las operaciones indispensables que se necesitan, con el más simple de los procedimientos, generalmente usados y el nuestro. Supongamos que se trata de cubicar una "hoja tipo" de un kilómetro de un terraplén. Por el procedimiento del área media hay que calcular los volúmenes parciales en intervalos de cada 20 metros para lo cual deben conocerse las áreas correspondientes, esto es: hay que consultar las tablas 51 veces, hacer 50 sumas de dos sumandos y una suma de 50 sumandos; todo esto sin tener en cuenta las estaciones fraccionarias que pudieran ser de interés.

En total 102 operaciones que no pueden considerarse mecánicas y que por tanto significan otras tantas ocasiones de equivocación, en tanto que con el procedimiento que se propone, suponiendo que se ponga un punto del perfil cuadrático a cada 20 metros, serán 53 operaciones mecánicas, 2 multiplicaciones, y una suma en el caso más desfavorable; en total sólo tres oportunidades de equivocación. Por observaciones nuestras, cremos que en lo general, se usará solamente la quinta parte del tiempo que se emplea comúnmente.

4^a—Para algunos casos de variaciones en la rasante, como en rápidas y caídas en los canales, cambios bruscos de pendiente en cualquier estación, y ciertos casos en que hay que hacer estimaciones adicionales por separado, como cuando es indispensable hacer una estimación de los cortes o rellenos que están a partir de cierto espesor, o cuan-

do haya que estimar el préstamo para formar los bordos de canales para los que no alcanza la excavación de la caja, etc., etc., este procedimiento presenta grandes ventajas sobre los ordinarios.

5^a—Cuando se necesita hacer una revisión de los cálculos es sobre todo el caso en que este procedimiento presenta las mayores ventajas, pues mientras que con los ordinarios hay que repetir todas las operaciones hechas, con el procedimiento propuesto sólo hay que hacer a lo más, una suma y dos multiplicaciones aparte de la operación mecánica del planímetro. Frecuentemente, cuando se está atacando una obra, se dan diversos tramos generalmente a contratistas, tramos que no siempre empiezan y terminan en estaciones redondas; esto significa que se van a hacer estimaciones parciales cuya cuantía tiene que confrontarse con el total; en otros procedimientos, esto frecuentemente induce al uso de cálculos auxiliares por las estaciones fraccionarias que no pueden preverse originalmente, los cuales provocan a veces discrepancias intolerables; en cambio, con el método que se discute, no hay lugar para discrepancias en los cálculos ya que para estimar la cubicación de cualquier punto a otro, basta medir el área de los perfiles entre dos verticales que correspondan a dichas estaciones cualesquiera que ellas sean.

Desventajas

1^a—Este procedimiento es inadecuado para los casos en que el terreno no puede considerarse plano y horizontal transversalmente. En efecto, si transversalmente la forma del terreno no sigue ninguna ley, es absolutamente imposible utilizar alguna propiedad geométrica que simplifique el procedimiento. Para el caso en que el terreno no pueda considerarse horizontal pero sí plano, puede todavía emplearse ventajosamente mediante el auxilio de un diagrama que proporcione, para el ancho de base de que se trata, y para el talud que se use, teniendo como variables el espesor y la pendiente transversal del terreno, el aumento equivalente en el espesor debido a la corrección por inclinación que es siempre aditiva. Por supuesto que los perfiles cuyas áreas se deben medir, son el de espesores corregidos y el cuadrático correspondiente a éste. En el caso en que el terreno sea quebrado transversalmente en un tramo que sea pequeño respecto a la longitud total de la línea, puede mediante una tabla de áreas, y previo conocimiento del área de la sección transversal, trazarse un perfil equivalente con su respectivo perfil cuadrático para no interrumpir ni va-

riar el procedimiento de cubicación; cuando no sea éste el caso, nuestro procedimiento es absolutamente desventajoso.

Conviene mucho que en estas condiciones establezcamos nuestro criterio para elegir el procedimiento más indicado. Sabemos que hay varios métodos que pueden resolver el caso, algunos de ellos sumamente prácticos e ingeniosos, a la vez que bastante precisos, como el explicado por el señor ingeniero Nicolás Durán, que consiste en aplicar directamente el planímetro a un molde que representa a escala los elementos fijos de la sección (plantilla y taludes), dibujando cada una de las secciones levantadas con el mismo punzón del planímetro una y dos veces alternativamente para obtener al final directamente sobre el planímetro la cubicación total que corresponde precisamente a la aplicación de la fórmula prismoidal igual que si se hubieran calculado independientemente volúmenes parciales en cada intervalo de los usuales. Sin embargo, entre otras, puede hacerse a estos métodos la siguiente objeción fundamental; por lo general, cuando el terreno es escarpado, es cuando son más costosas las terracerías y por tanto es cuando más conviene cubicar con la máxima precisión posible, y es entonces cuando esos procedimientos son menos precisos. A juicio nuestro, el método más conveniente sería trazar un perfil cuyas ordenadas fueran proporcionales a las áreas de las diversas secciones; esto evitaría el hacer hipótesis ilícitas sobre condiciones geométricas de formaciones naturales que no pueden satisfacer ninguna. Midiendo el área de dicho perfil se obtendrá con la máxima precisión posible el volumen, teniéndose así todas las ventajas que presenta el perfil cuadrático; este procedimiento, que llamaremos del "Perfil de Areas" viene siendo una generalización para cualquier clase de terreno, materiales, etc., del perfil cuadrático, pues cabe hacer notar que cuando se traza el perfil cuadrático de manera que pueda medirse su área en conjunto con el perfil topográfico, de hecho no se está haciendo otra cosa sino trazar un perfil cuyas ordenadas al perfil topográfico son proporcionales a las áreas, lo que equivale a trazar un perfil de áreas a partir de la línea de terreno natural del topográfico.

Ejemplo de aplicación

En la figura 3 tenemos un perfil de un canal cuya sección es la que en ella aparece; vamos a suponer que está dibujada usando las escalas más

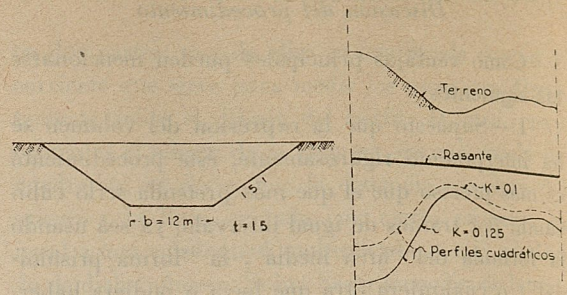


FIG 3

generalmente empleadas en las "hojas tipo"; es decir, escala vertical de 1:100 y escala horizontal 1:2,000. El perfil cuadrático lo construimos para poder medir en conjunto el área de los dos perfiles, usando para la escala el módulo siguiente:

$$k = \frac{t}{b} = \frac{1.5}{12} = 0.125$$

esto significa que la línea de acotación 5 metros de esta escala de cuadrados ira a $0.125 \times 5^2 = 3.125$ centímetros del origen, puesto que debe ser 3.125 veces 1 centímetro que es en el papel lo que nos representa 1 metro en el espesor. La línea de acotación 10 irá a $0.125 \times 10^2 = 12.5$ centímetros, etcétera, etc. Teniendo ya construido el perfil para encontrar el volumen medimos en conjunto las áreas de los perfiles, y al área en centímetros cuadrados, la multiplicamos en primer lugar por 20, puesto que cada centímetro cuadrado del perfil nos representa la superficie de un rectángulo cuya base es de 20 metros, y cuya altura es de 1 metro, por lo cual su área representa 20 m². Hecho esto multiplicamos por el ancho de la base del canal obteniendo así la cubicación total. Este ha sido el caso en que hemos usado una escala adecuada para arear en conjunto los dos perfiles.

Supongamos ahora el caso en que hubiéramos usado un módulo cualquiera $k=0.1$ para la construcción de la escala de cuadrados. Esto significa que la línea de acotación 5 metros, iría a $0.1 \times 25 = 2.5$ centímetros del origen; la de acotación 10 a 10 centímetros; etc., etc.

El perfil cuadrático trazado con dicha escala es el que aparece en la línea interrumpida. Para hacer la cubicación medimos el área del perfil topográfico independientemente y al área obtenida en centímetros cuadrados la multiplicamos por 20 metros cuadrados y por 12 metros que es la plantilla del canal; así queda obtenida una parte del volumen. Después medimos el área del perfil cuadrático y al área en centímetros cuadrados la multiplicamos por 20 metros cuadrados y por $\frac{t}{k} = \frac{1.5}{0.1} = 15$ para

al caso en que se hubiera usado la escala conveniente; así obtenemos la otra parte del volumen que sumada a la primera da la cubicación total.

Para casos de cortes o terraplenes de líneas que generalmente tienen una misma sección, sea cual fuere su longitud, como en terracerías de caminos y ferrocarriles, es sumamente conveniente que se emplee la escala adecuada para medir el área en conjunto, puesto que con la misma que sólo se construya una vez, se puede obtener una gran economía en trabajo. En todos los casos es muy conveniente que cada hoja tipo lleve dibujada una copia de la escala usada así como todos los cálculos.

No nos detendremos a dar detalles de todos los casos especiales que se pueden presentar en la aplicación del procedimiento, porque éstos no presentan dificultad alguna en ningún caso. Nos estamos refiriendo a casos de clasificación de cubicaciones por profundidades, préstamos de compensación, etcétera. Para los tanteos que son indispensables

cuando se tiene que analizar el diagrama de masas, este procedimiento, o el del perfil de áreas, presenta las mayores ventajas; tal vez valga la pena ocuparnos sobre esto último con más detenimiento en otra ocasión.

Para terminar, debemos hacer mención de una aplicación muy importante a la que induce este procedimiento considerando la interpretación dada por el ingeniero Norberto Sánchez Gómez, al segundo término de la expresión del volumen, pues si una misma expresión es proporcional al momento de una área y al mismo tiempo al área de un perfil cuadrático de ésta, es obvio que pueda obtenerse el momento de una área cualquiera respecto a un eje trazando el perfil cuadrático de su contorno respecto al mismo eje y midiendo el área de dicho perfil cuadrático. Cuando no se dispone de instrumentos adecuados, posiblemente no haya procedimiento más sencillo para el cálculo de un momento estático que el del "perfil cuadrático".

