

UNA SOLUCION EN SERIE PARA LA ECUACION BAROTROPICA
DE VORTICIDAD Y SUS APLICACIONES EN EL ESTUDIO DE
VORTICES ATMOSFERICOS *

Por

Julián Adem **

RESUMEN

A method to obtain a series solution for the barotropic non-divergent, vorticity equation is given and is applied to the case of a vortex.

A formula that gives the development of a symmetrical vortex as a function of radius, maximum velocity and latitude is obtained. A numerical example is worked out.

The convergence of the series solution for the general case is discussed and shown to depend on the scale of motion to be forecast and conclusions are drawn regarding time-steps used in a forecast and the smoothing of the initial map.

* Esta investigación se llevó a cabo en el "International Meteorological Institute" Estocolmo, Suecia durante la estancia del autor en dicho instituto. El original en inglés del artículo fue publicado en la Revista "Tellus", 8, 1956.

** Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

The possibility of improving a forecast and reducing the number of time - steps used in it by the application of this series solution, follows as a general conclusion.

Finally, a theorem that gives the scaling of the variables in an experimental model of a barotropic flow is obtained.

I. INTRODUCCION

Para describir el comportamiento dinámico de la atmósfera mediante ecuaciones que puedan resolverse de una manera práctica, es necesario buscar los mecanismos principales responsables de los cambios atmosféricos y formular un modelo teórico que tome en consideración tales mecanismos.

El modelo barotrópico de la atmósfera es el único modelo que ha sido estudiado en forma detallada y sistemática, y los reportes acerca de los resultados obtenidos (Bolin 1955, 1956) son prometedores. En este modelo las ecuaciones primitivas de movimiento pueden combinarse en una sola ecuación de pronóstico, la bien conocida ecuación de vorticidad que fué utilizada aparentemente por primera vez en aplicaciones meteorológicas en 1939 por Rossby y sus colaboradores.

Cuando consideramos el problema de integración desde el punto de vista de aplicaciones práctica, nos vemos obligados a utilizar la versión de diferencias finitas de las ecuaciones diferenciales de predicción. Por lo tanto, a pesar de que la ecuación de vorticidad se ha utilizado mucho, muy poco se conoce sobre la naturaleza y propiedades de su solución desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales.

En el presente trabajo se ha desarrollado una técnica por medio de la cual una ecuación o sistema de ecuaciones de pronóstico pueden integrarse, y ha sido aplicado al caso específico de la ecuación de vorticidad del modelo barotrópico no divergente. El resultado obtenido por este método es una serie en la variable tiempo y debe ser particularmente útil cuando se desea obtener soluciones analíticas aproximadas. El método debe, por lo tanto, conducirnos a un mejor entendimiento de la influencia de los diferentes parámetros que entran en el pronóstico.

El método es especialmente útil en el estudio de vórtices atmosféricos. Este trabajo contiene un ejemplo de su aplicación en el caso de un ciclón que inicial -

mente se encuentra dentro de una atmósfera en reposo.

En la última parte de este trabajo se presenta un estudio teórico de la naturaleza de las soluciones de la ecuación de vorticidad y su dependencia de la escala del movimiento, y algunos de los resultados obtenidos se han aplicado para obtener información de valor práctico en el pronóstico numérico.

II. SOLUCION DE LA ECUACION DE POISSON

La solución de una ecuación del tipo:

$$\nabla^2 Z = F(x, y) \quad , \quad (1)$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ y $F(x, y)$ es una función de dos variables x, y es de fundamental importancia en el pronóstico numérico. Comenzaremos por derivar una solución a tal ecuación en forma que pueda ser de utilidad para obtener algunas soluciones analíticas.

Si escribimos (1) en coordenadas polares (r, θ) y si consideramos que la función $F(x, y)$ puede expresarse como una suma de términos del tipo $F_1(r) \sin n\theta$ y $F_2(r) \cos n\theta$ donde n es un entero, trataremos con una ecuación del tipo

$$\nabla^2 Z = F_n(r) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{array} \right\} \quad (2)$$

Una solución a esta ecuación es:

$$Z = \left[\frac{r^n}{2n} \int r^{n+1} F_n(r) dr - \frac{r^{-n}}{2n} \int r^{n+1} F_n(r) dr \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{array} \right\} \quad (3)$$

como puede comprobarse fácilmente por sustitución directa en (2).

III. SOLUCION EN SERIE PARA LA ECUACION BAROTROPICA NO DIVERGENTE DE VORTICIDAD.

Sea $u = -\psi_y$ y $v = \psi_x$ donde u y v son las componentes a lo

largo de los ejes x y y respectivamente, del viento horizontal, el eje x apunta hacia el Este y el eje y hacia el Norte. Si sustituimos estos valores de u y v en la ecuación barotrópica no divergente de vorticidad, obtenemos:

$$\nabla^2 \psi_t = J(\nabla^2 \psi, \psi) - \beta \psi_x, \quad (4)$$

donde $J(\nabla^2 \psi, \psi) \equiv \psi_y (\nabla^2 \psi)_x - \psi_x (\nabla^2 \psi)_y$ y β es la variación del parámetro de Coriolis.

Dada la función de corriente ψ y las condiciones a la frontera para la tendencia ψ_t , podemos calcular ψ_t de (4), por medio de la solución de una ecuación de Poisson.

Derivando (4) con respecto de t , obtenemos:

$$\nabla^2 \psi_{tt} = J(\nabla^2 \psi_t, \psi) + J(\nabla^2 \psi, \psi_t) - \beta \psi_{tx}, \quad (5)$$

en donde ψ_t puede obtenerse de (4), que es también una ecuación de Poisson en ψ_{tt} .

De manera parecida, por derivaciones sucesivas con respecto a t , podemos obtener las ecuaciones dando las derivadas de orden superior:

$$\nabla^2 \psi_{ttt} = J(\nabla^2 \psi_{tt}, \psi) + 2 J(\nabla^2 \psi_t, \psi_t) + J(\nabla^2 \psi, \psi_{tt}) - \beta \psi_{ttx} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_{tttt} = & J(\nabla^2 \psi_{ttt}, \psi) + 3 J(\nabla^2 \psi_{tt}, \psi_t) + \\ & + 3 J(\nabla^2 \psi_t, \psi_{tt}) + J(\nabla^2 \psi, \psi_{ttt}) - \beta \psi_{tttx}. \quad (7) \end{aligned}$$

.....

Tenemos, por lo tanto, la posibilidad de obtener una solución en serie para la ecuación de vorticidad, resolviendo las ecuaciones (4), (5), (6), (7), ... que son todas del tipo (1) en la derivada mas alta con respecto a t .

La solución se obtiene como una serie de Taylor:

$$\Psi = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} t^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} t^3 + \dots \quad (8)$$

¹ En esta sección se empleará la notación de subíndices para las derivadas. Por ejemplo, $\psi_t = \partial \psi / \partial t$, $\psi_{tx} = \partial^2 \psi / \partial x \partial t$, etc.

donde ψ es la función de corriente para el tiempo inicial y Ψ la función de corriente para el tiempo t . Daremos una discusión general de esta solución en la sección V del presente trabajo.

IV. SOLUCION EN SERIE PARA UN VORTICE BAROTROPICO

Sea (r, θ) un sistema de coordenadas polares y la función de corriente inicialmente solo una función $\psi(r)$ de r y tal que para $r \geq r_0$ es igual a cero. Supongamos que $\psi(r)$ y sus tres primeras derivadas son funciones continuas y derivables.

Sustituyendo $\psi(r)$ en (4) obtenemos:

$$\nabla^2 \psi_t = -\beta \cos \theta \frac{d\psi}{dr} \quad (9)$$

de donde ψ_t puede obtenerse aplicando la fórmula (3) y especificando algunas condiciones a la frontera. Si suponemos que ψ_t es cero para $r = R_0$, obtenemos:

$$\psi_t = -\frac{\beta \cos \theta}{r} \int_0^r \psi(r) r dr + \frac{\beta r \cos \theta}{R_0^2} \int_0^{r_0} \psi(r) r dr \quad (10)$$

Supondremos de aquí en adelante en el presente trabajo que $R_0 \gg r_0$, de modo que el último término del segundo miembro de (10) puede ser despreciado.

Sustituyendo $\psi(t)$, (9) y (10) en (5), obtenemos después de un sencillo cálculo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_{tt} = & \beta \sin \theta \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{d(\nabla^2 \psi)}{dr} \int_0^r \psi(r) r dr \right] + \\ & + \beta^2 \left[-\frac{\psi}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2r^2} \int_0^r \frac{d\psi}{dr} r^2 dr \right] \quad (11) \end{aligned}$$

ecuación que, al aplicar nuevamente (3) y condiciones a la frontera del mismo tipo empleado para determinar ψ_t , nos da ψ_{tt} .

De manera parecida se pueden obtener las derivadas de orden superior. Por

ejemplo $\psi_{\dagger\dagger\dagger}$ contiene términos en $\beta \cos \theta$, $\beta^2 \sin 2\theta$ y $\beta^2 \cos 3\theta$.

Si en los cálculos anteriores consideramos valores numéricos que correspondan a los movimientos atmosféricos reales que deseamos estudiar, puede verse que los términos que contienen potencias de β mayores que la primera, son pequeños comparadas con los que contienen β a la primera potencia; por ejemplo, en (11) el término β^2 es, para propósitos prácticos, despreciable comparado con los términos β . Para la finalidad de esta investigación, es suficiente considerar solamente los términos β .

Al resolver (5), los términos $J(\nabla^2 \psi_{\dagger}, \psi)$ y $J(\nabla^2 \psi, \psi_{\dagger})$ dan lugar a un término β y $\beta \psi_{\dagger x}$ a un término β^2 .

En forma semejante en (6), los únicos términos β son $J(\nabla^2 \psi, \psi_{\dagger\dagger})$ y $J(\nabla^2 \psi_{\dagger\dagger}, \psi)$; en (7) los términos β son $J(\nabla^2 \psi, \psi_{\dagger\dagger\dagger})$ y $J(\nabla^2 \psi_{\dagger\dagger\dagger}, \psi)$, etc.

No es difícil, de este modo, encontrar que la solución puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, t) = & \psi(r) + \\ & + \beta \cos \theta \left[F_1 t + \frac{F_3}{3!} t^3 + \frac{F_5}{5!} t^5 + \dots \right] - \\ & - \beta \sin \theta \left[\frac{F_2}{2} t^2 + \frac{F_4}{4!} t^4 + \frac{F_6}{6!} t^6 + \dots \right] + R \quad (12) \end{aligned}$$

donde

$$F_n = -\frac{1}{2r} \int_0^r F_n^* r^2 dr + \frac{r}{2} \int_{r_0}^r F_n^* dr$$

$$F_1^* = -\frac{d\psi}{dr}$$

$$F_n^* = \frac{1}{r} \left[\frac{d(\nabla^2 \psi)}{dr} F_{n-1} - \frac{d\psi}{dr} F_{n-1}^* \right]$$

y donde R representa la suma de los términos que contienen β a una potencia superior que la primera (es decir, β^m , $m > 1$).

$$\text{Sea } \psi(r) = \psi_0 [1 - (r/r_0)^2]^4 \quad \text{para } r \leq r_0$$

$$\text{y } \psi(r) = 0 \quad \text{para } r > r_0 \quad . \quad (13)$$

Esta función de corriente representa un ciclón de radio r_0 cuando $\psi_0 < 0$ (y un anticiclón cuando $\psi_0 > 0$).

La velocidad máxima $v_{\max} = (d\psi/dr)_{\max}$ se tiene para $(r/r_0)^2 = 1/7$ y ψ_0 es dado como función del radio y de la velocidad máxima por:

$$\psi_0 = -0.525 r_0 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)_{\max}$$

Sustituyendo (13) en (12) obtenemos:

$$\frac{\Psi}{\psi_0} = \frac{\psi}{\psi_0} + r_0 \beta \cos \theta [G_1 t + G_3 \left(\frac{v_{\max}}{r_0} \right)^2 t^3 + G_5 \left(\frac{v_{\max}}{r_0} \right)^4 t^5 + \dots] +$$

$$+ r_0 \beta \sin \theta [G_2 \left(\frac{v_{\max}}{r_0} \right) t^2 + G_4 \left(\frac{v_{\max}}{r_0} \right)^3 t^4 + \dots] + R \quad (14)$$

donde G_1, G_2, G_3, \dots son funciones de la variable no dimensional r/r_0 .

Esta solución puede escribirse también en la forma:

$$\frac{\Psi}{\psi_0} = \frac{\psi}{\psi_0} + A \cos \theta [G_1^* \tau + G_3^* \tau^3 + \dots] +$$

$$+ A \sin \theta [G_2^* \tau^2 + G_4^* \tau^4 + \dots] + R \quad (14')$$

donde G_1^*, G_2^*, \dots son funciones de la variable no dimensional r/r_0 y $\tau = (v_{\max}/r_0) t$ (ó $\tau = (\psi_0/r_0^2) t$) es un tiempo no dimensional y $A = r_0^2 \beta / v_{\max}$ (ó $A = r_0^3 \beta / \psi_0$).

La solución (14) da el comportamiento de un vórtice en función de la latitud, la velocidad máxima en el vórtice y el radio del vórtice, y permite hacer un estudio comparativo de vórtices variando estos tres parámetros.

Consideremos el caso en que $\beta = 1.7 \times 10^{-13} \text{ seg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$, $r_0 = 1,000 \text{ km}$ y $v_{\max} = 30 \text{ m/s}$.

Algunos de los resultados del cálculo usando estos datos son dados en la Tabla 1, la cual da los valores de los términos βt , βt^2 y βt^3 para varios valores de r/r_0 y de t .

Tabla 1

Términos en la serie (14) para $\beta = 1.7 \times 10^{-13} \text{ seg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$, $r_0 = 1000 \text{ km}$,
 $v_{\text{max}} = 30 \text{ m/seg}$, t en horas.

Término βt para $\cos \theta = 1$							
$r/r_0 \backslash t$	2	4	6	8	10	12	14
.0	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}
.2	-12	-24	-36	-48	-60	-72	-84
.4	-18	-36	-54	-72	-90	-108	-126
.6	-19	-38	-56	-76	-95	-112	-133
.8	-15	-30	-45	-60	-75	-90	-105
1.0	-13	-26	-38	-52	-65	-76	-91
Término βt^2 para $\sin \theta = 1$							
.0	0×10^{-4}	0×10^{-4}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}
.2	15	60	14	24	37	54	73
.4	20	80	18	32	50	70	98
.6	12	48	11	19	30	43	59
.8	4	16	2	18	10	10	20
1.0	0	0	0	0	0	0	0
Término βt^3 para $\cos \theta = 1$							
.0	0×10^{-5}	0×10^{-5}	0×10^{-4}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}	0×10^{-3}
.2	5	40	13	3	6	10	17
.4	8	64	21	5	10	16	27
.6	10	80	26	6	12	21	34
.8	13	104	33	8	16	26	44
1.0	0	0	0	0	0	0	0
Valores de $\psi(r)/\psi_0$							
.0	1.00						
.2	.849						
.4	.498						
.6	.168						
.8	.017						
1.0	.0						

Los resultados se muestran también gráficamente en la Fig. 1 en la cual las líneas II y IV representan los términos βt y βt^3 de la serie calculada para $|\cos \theta| = 1$ y $t = 10$ horas. La línea III, los términos βt^2 para $\sin \theta = 1$ y el mismo tiempo $t = 10$ horas. Finalmente, la línea I representa la función de corriente inicial dibujada con escala vertical cinco veces menor que la empleada para los otros términos.

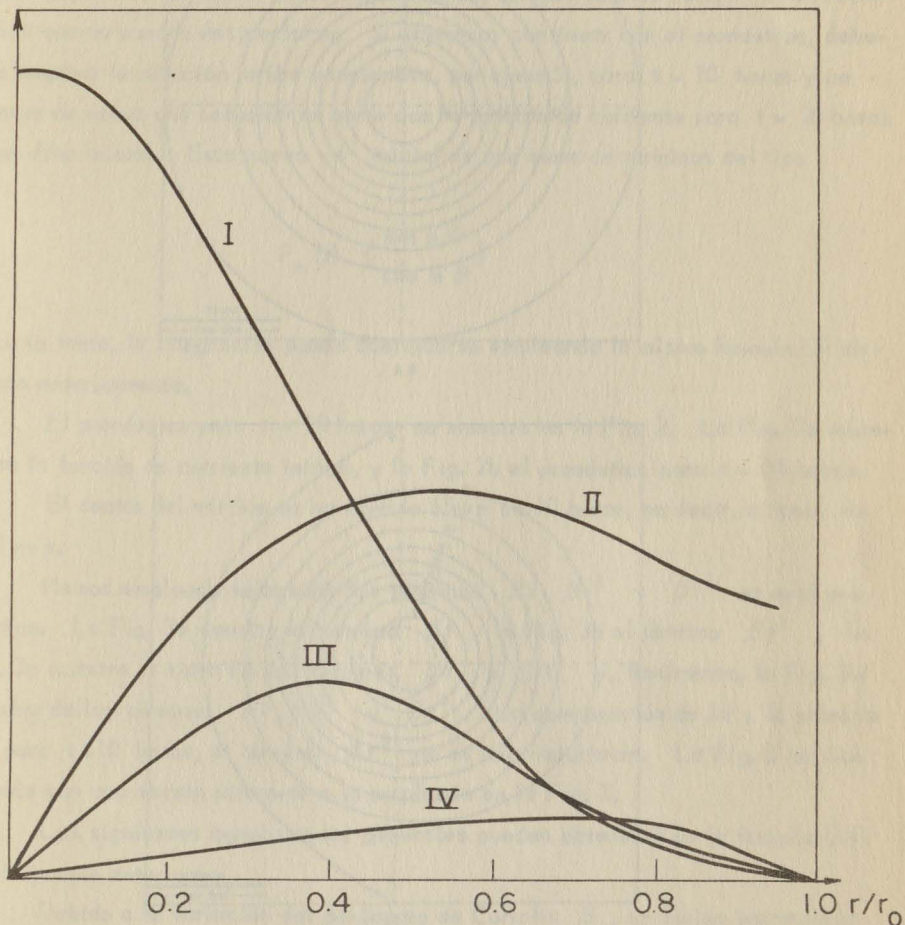
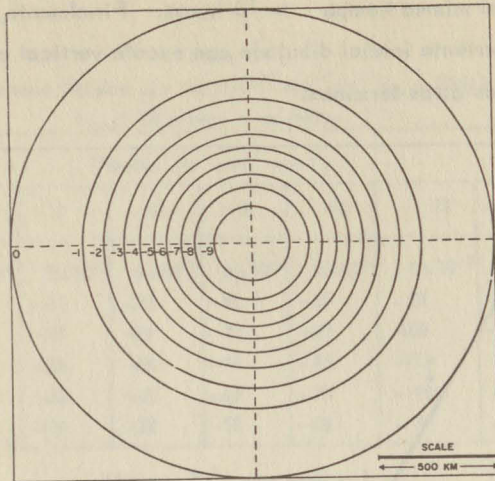
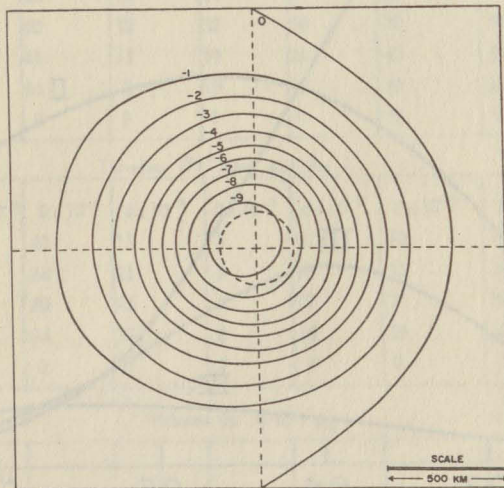


Fig. 1

La línea I representa la función de corriente inicial empleada en el ejemplo de un vórtice, como función de r/r_0 ; las líneas II y IV representan los términos βt^3 de la serie para $|\cos \theta| = 1$ y $t = 10$ horas; y III el término βt^2 calculado para $\sin \theta = 1$ y el mismo tiempo $t = 10$ horas. La función inicial de corriente está representada con una escala vertical cinco veces menor que la empleada para los otros términos.



2 a



2 b

Fig. 2

Pronóstico para un ciclón de una velocidad máxima de 30 m/s y radio de 1000 km. 2a representa la función de corriente inicial y 2b la predicción para $t = 10$ horas.

Estos cálculos muestran que un pronóstico en el cual se emplee solamente el término βt puede obtenerse hasta 2 horas aproximadamente; después el término βt^2 también es importante, y hasta 6 u 8 horas estos dos términos son los únicos importantes; después, el término βt^3 no puede ser despreciado y hasta $t = 10$ ó 12 horas se puede obtener una solución que para los fines prácticos es correcta empleando solamente estos tres términos; después de este tiempo hay otros términos que no pueden despreciarse. Si deseamos continuar con el pronóstico, debemos emplear la solución arriba mencionada, por ejemplo, para $t = 10$ horas y comenzar de nuevo una solución en serie con la función de corriente para $t = 10$ horas como dato inicial. Esta nueva ψ inicial es una suma de términos del tipo

$$F_n(t) \left\{ \begin{array}{l} \sin n \theta \\ \cos n \theta \end{array} \right\}$$

y por lo tanto, la integración puede continuarse empleando la misma fórmula (3) obtenida anteriormente.

El pronóstico para $t = 10$ horas se muestra en la Fig. 2. La Fig. 2a representa la función de corriente inicial, y la Fig. 2b el pronóstico para $t = 10$ horas.

El centro del vórtice se ha movido 65 km en 10 horas, es decir, a razón de 1.80 m/s.

Hemos empleado solamente los términos βt , βt^2 y βt^3 en este pronóstico. La Fig. 3a muestra el término βt , la Fig. 3b el término βt^2 , la Fig. 3c muestra la suma de los términos βt y βt^2 y, finalmente, la Fig. 3d la suma de los términos βt , βt^2 y βt^3 . La comparación de 3d y 3c muestra que para $t = 10$ horas, el término βt^3 no es aún importante. La Fig. 3 ha sido trazada con una escala diferente a la empleada en la Fig. 2.

Las siguientes conclusiones generales pueden obtenerse de la fórmula (14) y del ejemplo anterior:

Debido a la variación del parámetro de Coriolis β , un ciclón barotrópico no divergente que inicialmente se encuentra dentro de una atmósfera en reposo, se mueve hacia el noroeste.

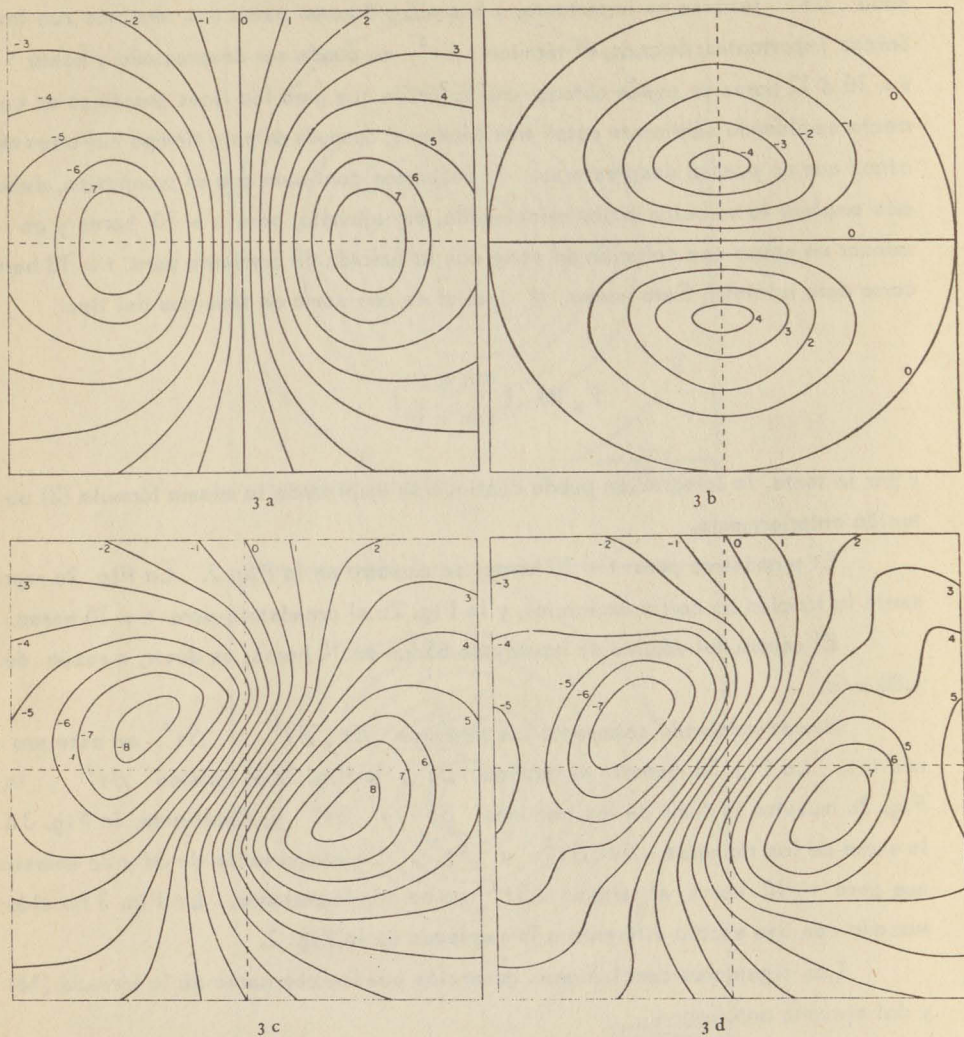


Fig. 3

Representación gráfica de los primeros términos de la solución en serie para un vórtice de radio $r = 1000$ km y velocidad máxima igual a 30 m/s, para $t = 10$ horas. 3a es el término βt , 3b el término βt^2 , 3c es la suma de los términos βt y βt^2 ; 3d la suma de los términos βt , βt^2 y βt^3 . La escala es diferente a la empleada en la Fig 2a

Inicialmente, antes que se deforme, el ciclón simétrico se mueve hacia el oeste, y su movimiento está dado por el término $r_0 \beta G_1 t \cos \theta$ de (14); a medida que aumenta el tiempo, empieza a moverse gradualmente hacia el norte, y la componente en esta dirección está dada por $\beta G_2 t^2 v_{\max} \sin \theta$. La componente inicial de dirección oeste es, por lo tanto, proporcional al radio del vórtice, y la componente de dirección norte es proporcional a la máxima velocidad del viento en el ciclón.

Es interesante notar que en nuestra solución el término βt^3 tienen signo opuesto al del término βt y aunque hemos calculado solamente los términos hasta el que contiene βt^3 , parece como si los términos en la serie (14) tuvieran signos alternados.

Los resultados arriba mencionados sugieren la interpretación física siguiente:

La variación del parámetro de Coriolis induce una aceleración resultante sobre el ciclón (Rossby, 1949) que tiende a dirigir las partículas materiales hacia el norte. Este movimiento de traslación hacia el norte combinado con el movimiento de rotación del vórtice, produce el movimiento hacia el oeste del vórtice. Este hecho fué mencionado por Rossby (1949), y puede verse sumando gráficamente las líneas de flujo de las Figs. 2a y 3a. El desplazamiento inicial del ciclón hacia el oeste aparentemente induce al desplazamiento hacia el norte representado por el término βt^2 en la serie, que a su vez induce la componente hacia el este, representada por el término βt^3 , etc.

La solución para un anticiclón puede obtenerse sustituyendo en la solución anterior un valor positivo de ψ_0 en lugar del negativo que corresponde a un ciclón; y de (14) puede verse que un anticiclón se mueve hacia el suroeste y que los resultados arriba citados pueden aplicarse a un anticiclón si la palabra "norte" es sustituida por la palabra "sur".

La solución (14') muestra que el tiempo con el que puede emplearse la serie con los primeros n términos depende de la razón v_{\max}/r_0 (ó ψ_0/r_0^2); y debido a que $\tau = (v_{\max}/r_0) t$ existe una relación lineal entre la razón r_0/v_{\max} (ó r_0^2/ψ_0) y el tiempo con el que la solución en la que se emplean los primeros n términos es válida.

En la Fig. 4 se muestran las líneas $\tau = \text{constante}$ en un diagrama $t, r_0/v_{\max}$.

(ó r_0^2/ψ_0), t es la ordenada y r_0/v_{max} es la abscisa. A cada lado de dichas líneas hemos escrito tres números que son proporcionales a la magnitud de la velocidad máxima que aparece en los términos βt , βt^2 y βt^3 cuando se calculan para el correspondiente valor constante de τ

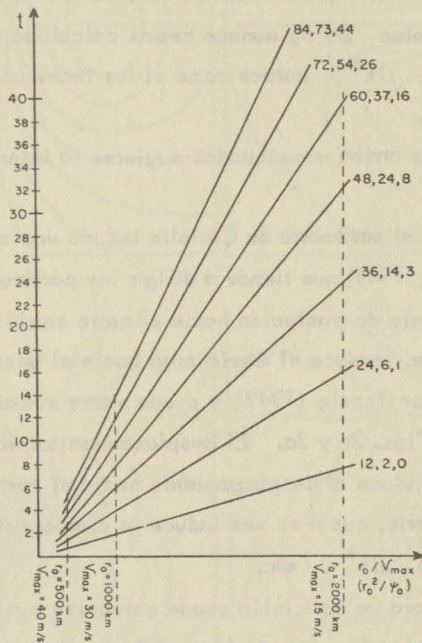


Fig. 4

Diagrama Tiempo-Escala del movimiento. La ordenada representa el tiempo en horas y la abscisa la razón r_0/v_{max} donde v_{max} es la velocidad máxima en el vórtice y r_0 es el radio; en general, la abscisa puede tomarse como r_0^2/ψ_0 donde ψ_0 y r_0 son factores escalares para la función de corriente y el plano x-y respectivamente. Las líneas rectas representan líneas de "tiempo no dimensional" constante $\tau = (\psi_0/r_0^2)t$ de la solución en serie. Nótese que cuando r_0^2/ψ_0 aumenta, el intervalo de tiempo permisible en un pronóstico aumenta. Los tres números a la derecha de cada una de estas líneas son proporcionales a la magnitud de la velocidad máxima que aparece en los términos βt , βt^2 y βt^3 de la serie calculada para el correspondiente valor constante de τ para el caso de un vórtice.

En este diagrama, tiempos 2, 8 y 12 horas de nuestro ejemplo anterior corresponden a 8, 32 y 48 horas respectivamente para un vórtice con $r_o = 2,000$ km y $v_{max} = 15$ m/s. En otras palabras, en este caso un pronóstico con solamente el término βt puede obtenerse hasta las 8 horas, en vez de 2 horas; hasta 32 horas en vez de 8 horas empleando solamente dos términos, y hasta 48 horas en vez de 12 horas, empleando tres términos. Por otra parte, para un vórtice de radio $r_o = 500$ km y $v_{max} = 40$ m/s el pronóstico puede obtenerse hasta 1 hora, 3 horas y 5 horas respectivamente.

V. SOLUCION PARA UN FLUJO ARBITRARIO BAROTROPICO NO DIVERGENTE

Una función de corriente puede escribirse siempre en la forma:

$$\psi = \psi_o P_1(x/r_o, y/r_o) \quad (15)$$

donde P_1 es una función de las variables no dimensionales x/r_o y y/r_o ; ψ_o y r_o son factores escalares de una altura normalizada de la función de corriente y un plano x - y normalizado respectivamente. ψ_o y r_o serán considerados como parámetros variables. Por ejemplo, en el caso de un vórtice hemos elegido r_o como el radio del vórtice y ψ_o como el valor de la función de corriente en el centro del vórtice.

Emplearemos también, como parámetro variable, la variación del parámetro de Coriolis β el cual, por simplicidad, es considerado como una constante.

Sustituyendo (15) en (4), obtenemos:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi_o^2}{r_o^4} P_3 - \beta \frac{\psi_o}{r_o} P_4 \quad (16)$$

donde P_3 y P_4 son funciones de las variables no dimensionales x/r_o y y/r_o . Si suponemos que $(\psi_o/r_o^3 \beta) = \text{constante}$, cuando integramos (16) obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_0 s P_5$$

donde $s = \psi_0 / r_0^2$ y P_5 es una función de x/r_0 y y/r_0 .

De manera parecida puede obtenerse, bajo la misma hipótesis, $(\psi_0 / r_0^3 \beta) =$
 $=$ constante,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \psi_0 s^2 P_6$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} = \psi_0 s^3 P_7$$

• • • • •

donde P_6, P_7, \dots son funciones de las variables no dimensionales x/r_0 y y/r_0 .

Sustituyendo los valores anteriormente calculados de $\partial \psi / \partial t, \partial^2 \psi / \partial t^2,$
 $\partial^3 \psi / \partial t^3, \dots$ en la solución en serie (8), obtenemos el resultado siguiente:

Consideremos un flujo barotrópico, incompresible, no divergente, donde la función inicial de corriente ψ es dada por (15) y β es constante. Si elegimos los parámetros variables ψ_0, r_0 y β de modo que $(\psi_0 / r_0^3 \beta) =$ constante, entonces la función de corriente Ψ para un tiempo posterior t , puede escribirse como una serie en el tiempo no dimensional $\tau = (\psi_0 / r_0^2 / r_0^2 t)$ en la forma:

$$\frac{\Psi}{\psi_0} = P_1 + P_2 \tau + P_3 \tau^2 + \dots$$

donde $P_1, P_2, P_3 \dots$ son funciones de las variables no dimensionales x/r_0 y y/r_0 .

Como la solución es independiente de la elección arbitraria de ψ_0, r_0 y β , podemos, sin perder generalidad, elegir siempre valores tales que $(\psi_0 / r_0^3 \beta) =$ constante, pero variando ψ_0, r_0 y β para un propósito comparativo. Vemos por lo tanto, que una figura similar a la Fig. 4 puede trazarse mostrando que el tiempo con el que los n primeros términos de la serie pueden aproximar la función de corriente es proporcional a la razón r_0^2 / ψ_0 .

Como corolario de la solución en serie mencionada arriba, puede obtenerse el siguiente resultado:

Si $\psi = \psi_0 F(x/r_0, y/r_0, \beta_0)$ representa una función inicial de corriente donde ψ_0 y r_0 representan la escala de cantidades normalizadas y β_0 la variación del parámetro de Coriolis; entonces la función de corriente normalizada Ψ/ψ_0 para $t = t_0$ es idéntica a la que corresponde a una función de corriente inicial $\psi_1 F(x/r_1, y/r_1, \beta_1)$ para el tiempo $t = t_1$ donde $t_1 = (\beta_0 r_0 / \beta_1 r_1)$ y $(r_1^3 \beta_1 / \psi_1) = (r_0^3 \beta_0 / \psi_0)$.

Este resultado puede ser de importancia en la construcción de modelos experimentales.

VI. APLICACIONES AL PRONOSTICO NUMERICO

Ya que la solución es una serie en el "tiempo no dimensional" $\tau = (\psi_0 / r_0^2) t$, es evidente que el alisamiento de un mapa del cual se va a hacer un pronóstico de movimientos de gran escala, es una necesidad desde el punto de vista de la naturaleza de la solución de la ecuación de vorticidad. En efecto, el alisamiento eliminará disturbios de pequeña escala y movimientos para los cuales r_0^2 / ψ_0 es mas pequeño que un cierto valor de C y podemos entonces pronosticar movimientos a gran escala y disturbios tales que $r_0^2 / \psi_0 \geq C$.

Una conclusión importante que puede sacarse de nuestra discusión es la dependencia del intervalo de tiempo permisible en un pronóstico, de la escala del movimiento que uno desea pronosticar. Para pronosticar sistemas de gran escala se necesita partir de una función de corriente inicial alisada tal que $r_0^2 / \psi_0 \geq C$, y emplear cierto intervalo de tiempo que depende del valor de C ; mientras que para predecir sistemas de pequeña escala, se permiten intervalos de tiempo mas cortos, ya que en ese caso C es mas pequeño.

Hay dos casos meteorológicos importantes, en los cuales r_0^2 / ψ_0 es pequeño; el caso de un ciclón tropical, en el que uno tiene grandes velocidades concentradas en un radio pequeño; y el caso de una corriente en chorro (jet stream) en el que también se concentran grandes velocidades en una sección pequeña.

En el caso de un ciclón, como ya se indicó anteriormente, cuando $r_0 = 500$ km y $v_{max} = 40$ m/s, el pronóstico con un término es válido hasta una

hora, mientras que cuando $r_0 = 1,000$ km y $v_{max} = 30$ m/s es válido hasta 2 horas, y cuando $r_0 = 2,000$ km y $v_{max} = 15$ m/s es válido hasta 8 horas.

Una conclusión importante que puede sacarse de nuestro análisis es la posibilidad de emplear intervalos de tiempo mas largos en un pronóstico incluyendo en el esquema de cálculo el término $\partial^2 \psi / \partial t^2$ (así como los términos de las derivadas superiores del desarrollo en serie). De hecho, en nuestro ejemplo de un vórtice de $r_0 = 1000$ km y $v_{max} = 30$ m/s un pronóstico empleando solamente el término $\partial \psi / \partial t$ es válido hasta 2 horas, mientras que, considerando también el término $\partial^2 \psi / \partial t^2$, el pronóstico puede extenderse hasta 6 u 8 horas en un solo intervalo de tiempo.

Vale la pena sugerir pues, que en vez de emplear:

$$\Psi = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t$$

con intervalos de tiempo Δt de 2 horas (por ejemplo), se pueden obtener $\partial \psi / \partial t$ y $\partial^2 \psi / \partial t^2$ de las ecuaciones de Poisson (4) y (5) y entonces usar:

$$\Psi = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} (\Delta t)^2$$

con intervalos de tiempo mayores (por ejemplo, de 6 u 8 horas).

Otra alternativa es la de emplear la solución en serie con tantos términos como sea posible.

Naturalmente que en estas consideraciones no se han tomado en cuenta las limitaciones que surgen del procedimiento práctico de emplear ecuaciones a diferencias finitas. Por ejemplo, sabemos que la distancia entre los puntos de la retícula usada en la solución de las ecuaciones a diferencias finitas en un caso real, pone un límite al intervalo de tiempo empleado en una predicción, y requiere un estudio especial (Bolin, 1955, p.28).

En conclusión puede asentarse que esta técnica para obtener una solución en serie para la ecuación barotrópica no divergente de vorticidad, puede también aplicarse a otras ecuaciones o sistemas de ecuaciones de predicción. Debe pues encontrar aplicación en una gran variedad de problemas de pronóstico numérico.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento al profesor C.G. Rossby por haberle dado el beneficio de muy estimulantes discusiones y al Dr. B. Bolin por haber leído gran parte del manuscrito y haber expresado valiosos comentarios.

REFERENCIAS

- Bolin, B., 1955: Numerical forecasting with the barotropic model. *Tellus*, 7, pp. 27-49.
- Bolin, B., 1956: An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three dimensional flow. *Tellus*, 8, pp. 1-15.
- Rossby, C.G., 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J. Marine Res.*, 2, pp. 38-55.
- Rossby, C.G., 1949: On a mechanism for the release of potential energy in the atmosphere. *J. Meteor.*, 4, pp. 135-62.